پاسخ‌نامه تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل یازدهم

.۱ ۱ ۲ **۳** ۴

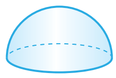
از دوران پاره‌خط AB حول خط d سطح یک دایره به شعاع ۳ ایجاد می‌شود،
پس: $S=\pi(۳)^۲=۹\pi$

.۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

از دوران دایره حول خطی که از مرکز آن می‌گذرد یک کره ایجاد می‌شود
در این‌جا شعاع این کره برابر ۲ است، پس داریم:

$$\text{حجم کره}=\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۴}{۳}\pi(۲)^۳=\frac{۳۲}{۳}\pi$$

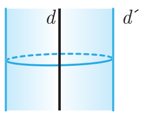
.۳ ۱ **۲** ۳ ۴



از دوران ربع دایره حول خط d یک نیم‌کره به شعاع ۳ ایجاد می‌شود.
سطح جانبی این کره $۲\pi R^۲$ و مساحت قاعده‌ی آن $\pi R^۲$ است
پس مساحت این شکل فضایی مساوی $۳\pi R^۲$ است.

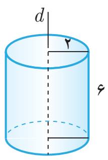
$$S=۳\pi R^۲=۳\pi(۳)^۲=۲۷\pi$$

.۴ ۱ ۲ **۳** ۴



از دوران خط d' حول خط d سطحی ایجاد می‌شود شبیه استوانه که به آن سطح استوانه‌ای گفته می‌شود. توجه کنید که این شکل از هر دو طرف نامحدود است.
پس تصور نکنید شکل ایجاد شده یک استوانه است.

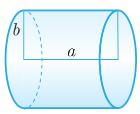
.۵ ۱ ۲ **۳** ۴



از دوران مستطیل $ABCD$ حول خط d یک استوانه به ارتفاع ۶ و شعاع قاعده‌ی ۲ به وجود می‌آید. بنابراین:

$$\text{حجم}=\pi R^۲h=\pi(۲)^۲(۶)=۲۴\pi$$

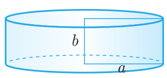
.۶ ۱ **۲** ۳ ۴



از دوران مستطیل حول طول آن استوانه‌ای به ارتفاع a و شعاع قاعده‌ی b ایجاد می‌شود.

$$\text{حجم استوانه‌ی اول}=\pi R^۲h=\pi(b)^۲a=\pi ab^۲$$

و از دوران مستطیل حول عرض آن استوانه‌ای به ارتفاع b و شعاع قاعده‌ی a ایجاد می‌گردد.

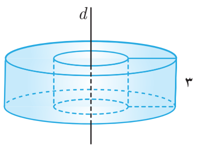


$$\text{حجم استوانه‌ی دوم}=\pi R^۲h=\pi(a)^۲b=\pi a^۲b$$

بنابراین:

$$\frac{\text{حجم استوانه‌ی اول}}{\text{حجم استوانه‌ی دوم}}=\frac{\pi ab^۲}{\pi a^۲b}=\frac{b}{a}$$

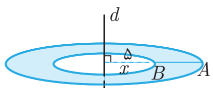
.۷ **۱** ۲ ۳ ۴



از دوران این مربع حول خط d دو استوانه‌ی قائم به ارتفاع ۳ ایجاد می‌شود که شعاع قاعده‌ی یکی از آن‌ها برابر ۵ و شعاع قاعده‌ی دیگر برابر ۲ است.
حجم خواسته شده از تفاضل حجم‌های این دو استوانه به‌دست می‌آید:

$$\text{حجم خواسته شده}=\pi R^۲h-\pi R'^۲h$$
$$=\pi(۵)^۲(۳)-\pi(۲)^۲(۳)=۶۳\pi$$

.۸ ۱ ۲ **۳** ۴

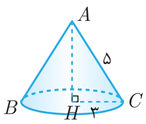


شکل حاصل از دوران سطح یک دایره است که یک سطح دایره از آن کم شده است. فرض کنیم: $AB=BC=x$

$$S=(۲x)^۲\pi-x^۲\pi=۳x^۲\pi=۱۰۸\pi\Rightarrow x^۲=۳۶$$
$$\Rightarrow x=۶\Rightarrow AC=۱۲$$

.۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

از دوران مثلث متساوی‌الساقین ABC حول ارتفاع AH یک مخروط قائم با شعاع قاعده‌ی ۳ به وجود می‌آید. با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث AHC نتیجه می‌گیریم:



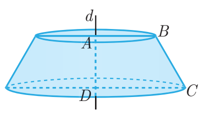
$$\text{ارتفاع مخروط}=AH$$
$$\Rightarrow AH^۲=AC^۲-CH^۲=۵^۲-۳^۲=۱۶$$
$$\Rightarrow AH=۴$$

$$\text{حجم مخروط}=\frac{۱}{۳}\pi(CH)^۲AH=\frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲(۴)=۱۲\pi$$

.۱۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

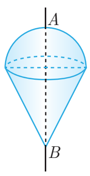
از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وتر دو مخروط قائم با قاعده‌ی مشترک به وجود می‌آید.
از دوران مثلث متساوی‌الاضلاع حول یک ضلع آن دو مخروط قائم مساوی با قاعده‌ی مشترک به وجود می‌آید.
از دوران مثلث متساوی‌الساقین حول قاعده‌ی آن دو مخروط قائم مساوی با قاعده‌ی مشترک ایجاد می‌شود.
ولی از دوران مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع وارد بر قاعده‌ی آن یک مخروط قائم تشکیل می‌شود.

.۱۱ ۱ ۲ ۳ **۴**



از دوران ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده‌های آن یک مخروط ناقص به وجود می‌آید.

.۱۲ **۱** ۲ ۳ ۴



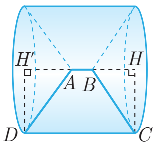
از دوران ربع دایره حول AB یک نیم‌کره و از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول AB یک مخروط قائم ایجاد می‌شود.
شعاع نیم‌کره برابر ۳ و ارتفاع مخروط برابر ۴ و شعاع قاعده‌ی مخروط برابر ۳ است.

حجم خواسته شده $=\frac{2}{3}\pi R^3+\frac{1}{3}\pi R^2 h$

حجم خواسته شده $=\frac{2}{3}\pi (3)^3+\frac{1}{3}\pi (3)^2(4)$

$=18\pi+12\pi=30\pi$

.۱۳ ۱ **۲** ۳ ۴



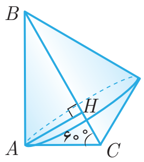
در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $ABCD$ ارتفاع‌های CH و DH' را رسم می‌کنیم دو مثلث قائم‌الزاویه BCH و ADH' هم‌نهشت هستند.

در ضمن چهارضلعی $CHH'D$ مستطیل است. بنابراین از دوران ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $ABCD$ حول قاعده‌ی AB یک استوانه ایجاد می‌شود به‌طوری‌که دو مخروط مساوی از دو قاعده‌ی آن جدا شده‌اند.

.۱۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

شکل حاصل به‌صورت حلقه‌ای خواهد بود که سطح مقطع آن کروی است.

.۱۵ **۱** ۲ ۳ ۴



ارتفاع AH وارد بر وتر BC را رسم می‌کنیم در این صورت مثلث ABC به دو مثلث قائم‌الزاویه ABH و ACH تقسیم می‌شود از دوران هر یک از این دو مثلث ایجاد شده حول BC یک مخروط قائم ایجاد می‌شود.

مخروط اول به ارتفاع BH و شعاع قاعده‌ی AH و مخروط دوم به ارتفاع CH و شعاع قاعده‌ی AH است. داریم:

حجم شکل حاصل $=\frac{1}{3}\pi(AH)^2(BH)+\frac{1}{3}\pi(AH)^2(CH)$

حجم شکل حاصل $=\frac{1}{3}\pi(AH)^2(BH+CH)$

حجم شکل حاصل $=\frac{1}{3}\pi(AH)^2(BC) \qquad (1)$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC زاویه‌ی $\hat{C}=60^\circ$ پس $\hat{B}=30^\circ$ داریم:

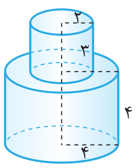
$$\overset{\Delta}{ABC}:\ \hat{B}=30^\circ \Rightarrow AC=\frac{BC}{2}\xrightarrow{AC=2} BC=4$$

$$\overset{\Delta}{AHC}:\hat{C}=60^\circ \Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AC\xrightarrow{AC=2} AH=\sqrt{3}$$

از رابطه‌ی (۱) و مقادیر به‌دست آمده استفاده کرده می‌نویسیم:

حجم شکل حاصل $=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2(4)=4\pi$

.۱۶ ۱ ۲ ۳ **۴**



از دوران این شکل حول AB دو استوانه به صورت روبه‌رو ایجاد می‌شود.

برای محاسبه‌ی مساحت کل شکل ایجاد شده باید سطح جانبی هر دو استوانه را به‌دست آورده و به مساحت دو قاعده‌ی استوانه‌ی بزرگ اضافه کنیم.

مساحت جانبی استوانه‌ی کوچک $=2\pi Rh=2\pi(2)(3)=12\pi$

مساحت جانبی استوانه‌ی بزرگ $=2\pi R'h'=2\pi(4)(4)=32\pi$

مساحت دو قاعده‌ی استوانه‌ی بزرگ $=2\pi R'^2=2\pi(4)^2=32\pi$

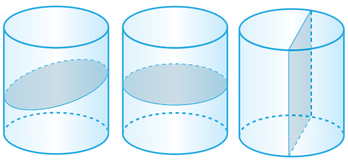
مساحت کل شکل $=12\pi+32\pi+32\pi=76\pi$

.۱۷ **۱** ۲ ۳ ۴

برخورد هر صفحه با کره یک دایره است.

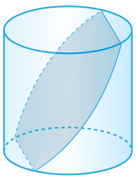
.۱۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

مقطع صفحه‌های قائم و مایل و افقی با استوانه می‌توانند مستطیل، بیضی و دایره باشند ولی هرگز سهمی به وجود نخواهد آمد.



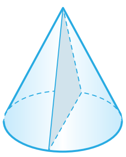
صفحه‌ی قائم — صفحه‌ی افقی — صفحه‌ی مایل

.۱۹ ۱ ۲ ۳ **۴**



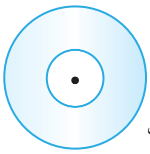
مقطع صفحه‌ی مایل با استوانه که دو قاعده‌ی آن را قطع کرده باشد قسمتی از یک بیضی است.

.۲۰ ۱ **۲** ۳ ۴



سطح مقطع یک صفحه‌ی قائم با مخروط قائم مثلث متساوی‌الساقین است البته در حالت خاص می‌تواند مثلث متساوی‌الاضلاع هم باشد که این مثلث نوعی مثلث متساوی‌الساقین است.

.۲۱ **۱** ۲ ۳ ۴



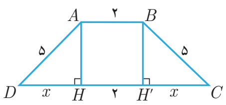
مقطع صفحه‌ی افقی با این شکل فضایی دو دایره هم مرکز به شعاع‌های ۲ و ۵ است.

مساحت مقطع حاصل $=\pi(5)^2-\pi(2)^2=21\pi$

.۲۲ ۱ **۲** ۳ ۴

سطح مقطع قائم با مخروط ناقص ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $ABCD$ است.

اگر ارتفاع‌های AH و BH' را رسم کنیم آن‌گاه مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ADH و BCH' هم‌نهشت هستند، بنابراین:



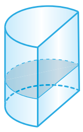
$$DH=CH'=x=\frac{8-2}{2}=3$$

پس داریم:

$$\overset{\Delta}{ADH}: AH^2 = AD^2 - DH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AH = 4$$

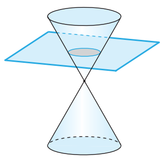
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AH(AB+DC) = \frac{1}{2}(4)(2+8) = 20$$

۲۳. ۱ ۲ ۳ **۴**



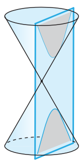
سطح مقطع صفحه‌ی افقی با نیم استوانه یک نیم‌دایره است.

۲۴. ۱ **۲** ۳ ۴



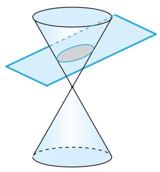
صفحه‌ی عمود بر محور، سطح مخروطی را در دایره قطع می‌کند:

۲۵. ۱ ۲ **۳** ۴



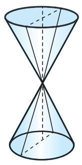
هر هذلولی از دو بخش جداگانه تشکیل شده است.

۲۶. ۱ ۲ ۳ **۴**



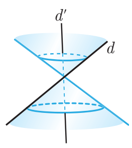
در حالتی که صفحه‌ای غیر عمود (مایل) یکی از مخروط‌های سطح مخروطی را قطع کند و موازی مولد هم نباشد، مقطع حاصل بیضی خواهد شد.

۲۷. ۱ ۲ ۳ **۴**



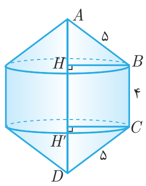
صفحه شامل محور سطح مخروطی را در دو خط متقاطع قطع می‌کند:

۲۸. ۱ ۲ **۳** ۴



از دوران خط d حول خط d' سطحی شبیه مخروط ایجاد می‌شود. توجه کنید این شکل از هر دو طرف نامحدود است پس تصور نکنید شکل ایجاد شده دو مخروط است.

۲۹. ۱ ۲ **۳** ۴



ارتفاع‌های BH و CH' را رسم می‌کنیم در این صورت ذوزنقه به یک مستطیل و دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی هم‌نهشت تقسیم می‌شود. پس از دوران ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $ABCD$ حول AD دو مخروط و یک استوانه ایجاد می‌شود.

$$\overset{\Delta}{ABH} \cong \overset{\Delta}{DCH'} \Rightarrow AH = DH'$$

$$AD = 10 \Rightarrow 2AH + 4 = 10 \Rightarrow AH = 3$$

$$\overset{\Delta}{ABH}: BH^2 = AB^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow BH = 4$$

بنابراین داریم:

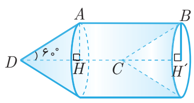
$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi(BH)^2(AH) = \frac{1}{3}\pi(4)^2(3) = 16\pi$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi(BH)^2(BC) = \pi(4)^2(4) = 64\pi$$

$$\text{حجم شکل ایجاد شده} = 2\times 16\pi + 64\pi = 96\pi$$

۳۰. ۱ **۲** ۳ ۴

اگر ارتفاع‌های AH و BH' را رسم کنیم آن‌گاه مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ADH و BCH' هم‌نهشت می‌شوند. پس اگر متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را حول DC دوران دهیم مثل آن است که مستطیل $ABH'H$ را حول DC دوران داده‌ایم. از دوران این مستطیل حول DC یک استوانه به ارتفاع $AB=6$ و شعاع قاعده‌ی AH ایجاد می‌شود.



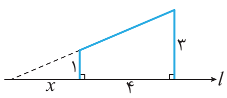
$$\overset{\Delta}{ADH}: \hat{D} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}AD = \frac{\sqrt{3}}{2}(4) = 2\sqrt{3}$$

$$\text{حجم خواسته شده} = \pi(AH)^2(AB) = \pi(2\sqrt{3})^2(6) = 72\pi$$

۳۱. ۱ ۲ **۳** ۴

با چرخش ذوزنقه حول خط l یک مخروط ناقص تشکیل می‌شود. در واقع مخروطی که یک مخروط کوچک‌تر از سر آن حذف شده است. ابتدا مقدار x را قضیه تالس به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{x}{x+4} = \frac{1}{3} \Rightarrow x + 4 = 3x$$

$$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

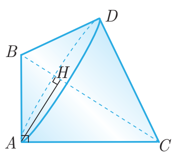
حال حجم شکل حاصل را به‌دست می‌آوریم:

$$V = \frac{\pi}{3}R^2H - \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3}(3)^2(6) - \frac{\pi}{3}(1)^2(2) = \frac{52\pi}{3}$$

۳۲. ۱ ۲ **۳** ۴

از آن‌جایی که $15^2 + 20^2 = 25^2$ است، پس مثلث داده شده قائم‌الزاویه است، و می‌خواهیم حول بزرگ‌ترین ضلعش که وتر است آن را دوران دهیم از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وترش مانند شکل دو مخروط تشکیل می‌شود. ابتدا اندازه‌ی ارتفاع AH را به‌دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{15\times 20}{25} = 12$$



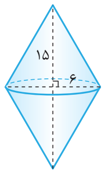
$$r = \frac{1}{3}\pi AH^2(BH) + \frac{1}{3}\pi AH^2(CH)$$

$$= \frac{1}{3}\pi AH^2(BH + CH)$$

$$= \frac{1}{3}\pi AH^2(BC)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(12)^2 \times 25 = 1200\pi$$

۳۳. ۱ ۲ ۳ **۴**

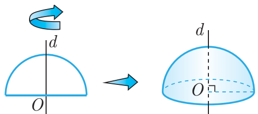


نصف قطر کوچک شعاع قاعده‌ها و نصف قطر بزرگ ارتفاع مخروط‌ها است. از دوران لوزی حول یکی از قطرهایش دو مخروط تشکیل می‌شود.

$$V = 2\times\frac{1}{3}\pi(6)^2\times(15) = 360\pi$$

۳۴. ۱ ۲ **۳** ۴

شکل حاصل یک نیم‌کره است.



$$S_{\text{کل}} = \frac{4\pi r^2}{2} + r^2\pi = 3r^2\pi = 3\times 12^2\pi = 432\pi$$

۳۵. ۱ ۲ ۳ **۴**

با دوران شکل حول پاره‌خط AB مخروطی ایجاد می‌شود که استوانه‌ای از آن خارج شده است. از قضیه تالس داریم:

$$\frac{ED}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{ED}{3} = \frac{2}{6} \Rightarrow ED = 1$$

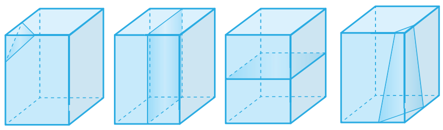
حجم شکل حاصل برابر است با:

$$\text{حجم مخروط} - \text{حجم استوانه} = \frac{\pi}{3}(6)^2(3) - \pi(4)^2(1)$$

$$= 36\pi - 16\pi = 20\pi$$

۳۶. ۱ ۲ ۳ **۴**

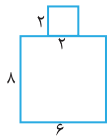
مقطع حاصل از برش مکعب مستطیل با صفحه‌های قائم، افقی و مایل می‌تواند مستطیل، مربع، مثلث و ذوزنقه باشد.



صفحه‌ی مایل — صفحه‌ی قائم — صفحه‌ی افقی — صفحه‌ی مایل

۳۷. ۱ **۲** ۳ ۴

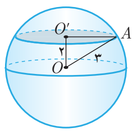
سطح مقطع حاصل شکل مقابل است که یک مربع به ضلع ۲ و یک مستطیل به اضلاع ۶ و ۸ است توجه کنید قطر قاعده‌ی استوانه‌ی کوچک ۲ و قطر قاعده‌ی استوانه‌ی بزرگ ۶ است.



$$\text{مساحت مقطع} = 8\times 6 + 2\times 2 = 48 + 4 = 52$$

۳۸. ۱ ۲ **۳** ۴

سطح مقطع برخورد یک صفحه با کره یک دایره است.



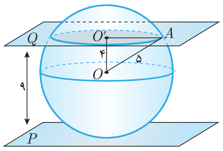
چون $OO' = 2$ پس نتیجه می‌گیریم:

$$\overset{\Delta}{OO'A}: O'A^2 = OA^2 - OO'^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

$$\text{مساحت مقطع حاصل} = \pi O'A^2 = 5\pi$$

۳۹. **۱** ۲ ۳ ۴

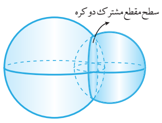
صفحه‌ی Q به فاصله‌ی ۹ از صفحه‌ی P کره را در یک دایره قطع می‌کند در این صورت فاصله‌ی مرکز این مقطع تا مرکز کره برابر ۴ خواهد بود در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $OO'A$ از قضیه‌ی فیثاغورس استفاده کرده، می‌نویسیم:



$$O'A^2 = OA^2 - OO'^2$$
$$= 5^2 - 4^2 = 9$$
$$\text{مساحت مقطع} = \pi O'A^2 = 9\pi$$

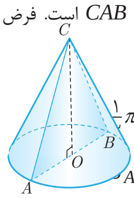
۴۰. ۱ **۲** ۳ ۴

دو کره اگر متقاطع باشند نقاط مشترک آن‌ها روی یک دایره قرار دارد.



۴۱. ۱ ۲ **۳** ۴

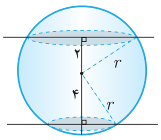
با توجه به شکل سطح مقطع مثلث متساوی‌الساقین CAB است. فرض کنیم $AO = OB = r$ شعاع قاعده و $OC = h$ ارتفاع مخروط باشد. داریم:



$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{3}\pi r^2 h = 1500\pi \Rightarrow r^2 h = 4500\\ &S_{ABC} = \frac{h(2r)}{2} = rh = 300\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\div} r = 15$$

$$\Rightarrow h = 20 \Rightarrow CA^2 = CO^2 + OA^2 = 20^2 + 15^2$$
$$= 5^2(4^2 + 3^2) = 5^2\times 5^2 \Rightarrow CA = 25$$

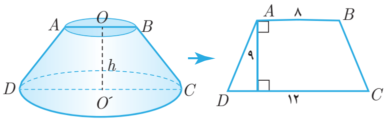
۴۲. ۱ ۲ **۳** ۴



$$\frac{\pi(r^2 - 2^2)}{\pi(r^2 - 4^2)} = 3 \Rightarrow r^2 - 4 = 3r^2 - 48$$
$$\Rightarrow 2r^2 = 44 \Rightarrow r^2 = 22 \Rightarrow r = \sqrt{22}$$

۴۳. ۱ **۲** ۳ ۴

صفحه‌ی گذرا از محور مخروط یعنی OO' این شکل را در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $ABCD$ قطع می‌کند. ارتفاع این ذوزنقه برابر ارتفاع مخروط یعنی ۹ و قاعده‌های آن $AB = 2\times 4 = 8$ و $DC = 2\times 6 = 12$ است، بنابراین:



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}OO'(AB + DC) = \frac{1}{2}(9)(8 + 12) = 90$$

۴۴. ۱ **۲** ۳ ۴

فرض کنیم h فاصله‌ی O از P باشد.

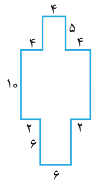
$$\frac{\pi(r^2 - h^2)}{\pi r^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4r^2 - 4h^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 3r^2 = 4h^2 \Rightarrow \left(\frac{r}{h}\right)^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۴۵. **۱** ۲ ۳ ۴

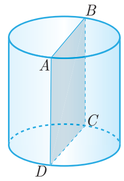
سطح مقطع خواسته شده مانند شکل است که مساحت آن برابر است با:

$$۵\times۴+۱۰\times۱۲+۶\times۶=۱۷۶$$



۴۶. **۱** ۲ ۳ ۴

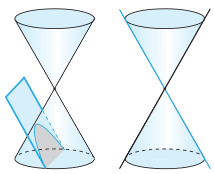
فرض کنیم r شعاع استوانه و h ارتفاع آن باشد، سطح مقطع تشکیل شده مستطیلی $ABCD$ است که یک ضلع آن $AD=h$ و یک ضلع آن $AB=۲r$ است همچنین مساحت جانبی استوانه $۲\pi rh$ است.



$$\frac{\text{مساحت جانبی استوانه}}{ABCD\ \text{مساحت}}=\frac{۲\pi rh}{۲rh}=\pi$$

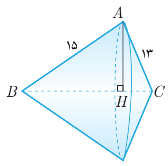
۴۷. **۱** ۲ ۳ ۴

اگر این صفحه از رأس سطح مخروطی بگذرد آن را در یک خط قطع می‌کند و اگر از رأس نگذرد آن را در یک سهمی قطع می‌کند:



۴۸. **۱** ۲ ۳ ۴

ابتدا ارتفاع AH را رسم می‌کنیم، از دوران حول BC دو مخروط به شعاع قاعده‌های AH و ارتفاع‌های BH و CH به‌دست می‌آید. پس باید اندازه‌ی AH را بیابیم.



فرض کنیم $HC=x$ در نتیجه داریم: $BH=۱۴-x$ و با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$AH^۲=AB^۲-BH^۲=AC^۲-CH^۲$$

$$\Rightarrow ۱۵^۲-(۱۴-x)^۲=۱۳^۲-x^۲\Rightarrow ۱۵^۲-۱۳^۲=(۱۴-x)^۲-x^۲$$

$$\Rightarrow (۱۵-۱۳)(۱۵+۱۳)=(۱۴-x-x)(۱۴-x+x)$$

$$\Rightarrow ۵۶=(۱۴-۲x)(۱۴)$$

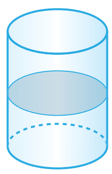
$$\Rightarrow ۱۴-۲x=۴\Rightarrow x=۵\Rightarrow AH=\sqrt{۱۳^۲-۵^۲}=۱۲$$

$$r=\frac{\pi}{۳}AH^۲(BH)+\frac{\pi}{۳}AH^۲(CH)=\frac{\pi}{۳}AH^۲(BC)$$

$$=\frac{\pi}{۳}(۱۲)^۲\times۱۴=۶۷۲\pi$$

۴۹. ۱ ۲ **۳** ۴

سطح مقطع تشکیل شده دایره‌ای هم‌نهشت با دایره‌ی استوانه است. فرض کنیم r شعاع استوانه و h ارتفاع آن باشد.



$$r^۲\pi=۱۶\Rightarrow r=\frac{۴}{\sqrt{\pi}}$$

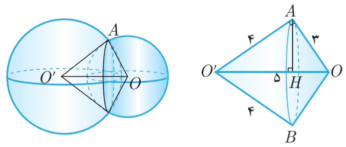
$$\text{مساحت کل استوانه}=۲r^۲\pi+۲\pi rh$$

$$\Rightarrow ۴۸=۲\pi(\frac{۴}{\sqrt{\pi}})^۲+۲\pi(\frac{۴}{\sqrt{\pi}})h$$

$$\Rightarrow ۱۶=۸\sqrt{\pi}h\Rightarrow h=\frac{۱۶}{۸\sqrt{\pi}}=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}$$

۵۰. **۱** ۲ ۳ ۴

نقاط مشترک روی دایره قرار دارند و اگر همه‌ی این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم مخروط به‌دست می‌آید.



با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

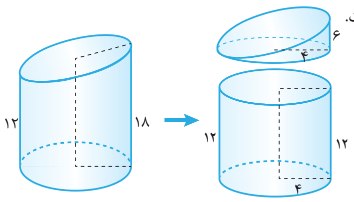
$$OH'.OO'=AO'^۲\Rightarrow O'H=\frac{۴^۲}{۵}=\frac{۱۶}{۵}$$

$$AH.OO'=AO.AO'\Rightarrow AH=\frac{۳\times۴}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$$

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h=\frac{۱}{۳}\pi AH^۲O'H=\frac{\pi}{۳}(\frac{۱۲}{۵})^۲\frac{۱۶}{۵}=\frac{۷۶۸\pi}{۱۲۵}$$

۵۱. ۱ ۲ **۳** ۴

جسم داده شده را به صورت زیر برش می‌دهیم. یک قسمت استوانه‌ی قائم به شعاع قاعده‌ی ۴ و ارتفاع ۱۲ است و دیگری نصف استوانه به ارتفاع ۶ و شعاع قاعده‌ی ۴ است.



$$\text{حجم استوانه}=\pi R^۲h=\pi(۴)^۲(۱۲)=۱۹۲\pi$$

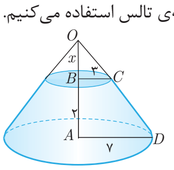
$$\text{حجم نیم استوانه}=\frac{\pi R'^۲h'}{۲}=\frac{\pi(۴)^۲(۶)}{۲}=۴۸\pi$$

$$\text{حجم جسم}=۱۹۲\pi+۴۸\pi=۲۴۰\pi$$

۵۲. ۱ ۲ ۳ **۴**

$ABCD$ ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است.

از دوران ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه حول ضلع قائم مخروط ناقص پدید می‌آید. برای به‌دست آوردن حجم مخروط ناقص ساق‌های DC و AB را امتداد می‌دهیم تا در O همدیگر را قطع کنند و از قضیه‌ی تالس استفاده می‌کنیم.



فرض کنید $OB=x$

$$\frac{x}{x+۲}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow ۷x=۳x+۶$$

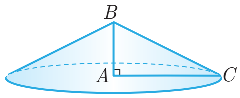
$$\Rightarrow ۴x=۶\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$$r=\frac{۱}{۳}\pi(۷)^۲\times(۲+\frac{۳}{۲})-\frac{۱}{۳}\pi(۳^۲)(\frac{۳}{۲})=\frac{\pi}{۳}(\frac{۷^۳}{۲}-\frac{۳^۳}{۲})$$

$$=\frac{\pi}{۳}\frac{(۷-۳)}{۲}(۷^۲+۳\times۷+۳^۲)=\frac{۲\pi}{۳}(۷۹)=\frac{۱۵۸\pi}{۳}$$

.۵۳ **۱** ۲ ۳ ۴

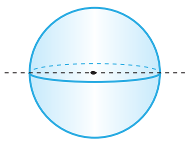
از آن‌جایی که $100^2 = 96^2 + 28^2$ است، مثلث داده شده قائم‌الزاویه است و کوچک‌ترین ضلع آن ۲۸ است می‌دانیم از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع قائمه‌ی آن یک مخروط قائم به‌دست می‌آید. که ارتفاع آن ۲۸ و شعاع قاعده‌ی آن ۹۶ است.



$$\text{حجم} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (96)^2 \times 28 = 86016\pi$$

.۵۴ ۱ **۲** ۳ ۴

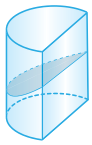
شکل حاصل کره‌ای به شعاع ۶ است که حجم آن برابر است با: $\frac{4}{3}\pi r^3$



$$V = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 288\pi$$

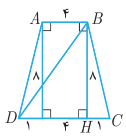
.۵۵ **۱** ۲ ۳ ۴

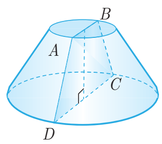
سطح مقطع صفحه‌ی مایل با یک استوانه که از قاعده‌های آن عبور نکند یک بیضی است. پس سطح مقطع صفحه مایل با یک نیم‌استوانه یک نیم‌بیضی است.



.۵۶ ۱ **۲** ۳ ۴

سطح مقطع تشکیل شده مانند شکل ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $ABCD$ است.



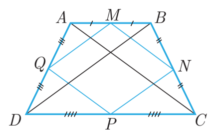


$$BD^2 = BH^2 + HD^2$$

$$BD^2 = 64 + 25 = 89$$

$\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{NC} = 1$، پس طبق عکس قضیه‌ی تالس: $MN \parallel AC$ و $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$ به همین ترتیب $\frac{PQ}{AC} = \frac{1}{2}$ و ... .

چهارضلعی که وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به هم وصل می‌کند متوازی‌الاضلاعی است که اضلاع آن موازی قطرهای چهارضلعی اولیه‌اند و محیط آن برابر است با مجموع دو قطر چهارضلعی اولیه.



$$\left.\begin{array}{l} MQ = \frac{BD}{2} \\ MN = \frac{AC}{2} \\ NP = \frac{BD}{2} \\ PQ = \frac{AC}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{محیط } MNPQ = AC + BD = 2\sqrt{89}$$

.۵۷ ۱ ۲ **۳** ۴

معادله‌ی دایره را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + \frac{a}{2}x - by - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow O(-\frac{a}{4}, \frac{b}{2}) = (-1, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{4} = -1 \Rightarrow a = 4 \\ \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 8$$

.۵۸ ۱ **۲** ۳ ۴

$$(3(x - \frac{1}{3}))^2 + 9(y+1)^2 = 27$$

$$\Rightarrow 9(x - \frac{1}{3})^2 + 9(y+1)^2 = 27$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{3})^2 + (y+1)^2 = 3 \Rightarrow R^2 = 3$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{3} \Rightarrow 2R = 2\sqrt{3}$$

.۵۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

مرکز دایره‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 2x = 4 \Rightarrow O(1, 0)$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 5 \Rightarrow O'(-2, 1)$$

$$OO' = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{10}$$

.۶۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

مختصات نقطه‌ی مورد نظر در معادله‌ی دایره صدق می‌کند:

$$a(1+1) + b(1+1) = 0 \Rightarrow 2a + 2b = 0 \Rightarrow a = -b$$

$$\Rightarrow a(x^2 + y^2) - a(x+y) = 0$$

$$\xrightarrow{\div a} x^2 + y^2 - x - y = 0$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{1+1-0}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

.۶۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم در معادله‌ی گسترده‌ی دایره $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ است، پس:

$$2 = \frac{\sqrt{4 + 36 - 4F}}{2} \Rightarrow 4 = \sqrt{40 - 4F} \Rightarrow 16 = 40 - 4F$$

$$\Rightarrow 4F = 24 \Rightarrow F = 6$$

.۶۲ **۱** ۲ ۳ ۴

فقط در دایره، همه‌ی عمودهای آن از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرند و آن نقطه‌ی ثابت مرکز آن است. با توجه به این‌که در معادله‌ی دایره ضرایب x^2 و y^2 با هم برابرند، داریم:

$$a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$$

.۶۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

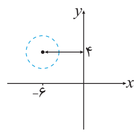
در معادله‌ی دایره ضرایب x^2 و y^2 با هم برابرند:

$$k - 2 = 6 - k \Rightarrow 2k = 8 \Rightarrow k = 4$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} 2x^2 + 2y^2 + 3x = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

۶۴. ۱ ۲ ۳ ۴



راه‌حل اول: با توجه به شکل باید شعاع دایره از ۶ کم‌تر باشد، پس اعداد طبیعی ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ می‌توانند شعاع دایره باشند.

راه‌حل دوم: معادله‌ی دایره به صورت $(x+۶)^۲+(y-۴)^۲=R^۲$ است، اگر قرار باشد، این دایره محور yها را قطع نکند با جایگذاری $x=۰$ در معادله‌ی دایره جوابی به‌دست نمی‌آید:

$$x=۰\Rightarrow ۳۶+(y-۴)^۲=R^۲\Rightarrow (y-۴)^۲=R^۲-۳۶$$

برای این‌که این معادله جواب نداشته باشد، باید $R^۲-۳۶<۰$ باشد:

$$R^۲-۳۶<۰\Rightarrow R^۲<۳۶\xrightarrow{R\in\mathbb{N}}R=۱,۲,۳,۴,۵$$

۶۵. ۱ ۲ ۳ ۴

باید نقطه‌ی مورد نظر در معادله‌ی دایره صدق کند:

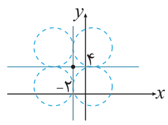
$$(-۲+m)^۲+(۵-۳m)^۲=۲۰$$

$$\Rightarrow ۴+m^۲-۴m+۹m^۲-۳۰m+۲۵=۲۰$$

$$\Rightarrow ۱۰m^۲-۳۴m+۹=۰$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{b}{a}=۳/۴$$

۶۶. ۱ ۲ ۳ ۴



طبق شکل چهار دایره داریم که دارای شعاع ۶ هستند و بر هر دو خط $x=-۲$ و $y=۴$ مماس‌اند. برای به‌دست آوردن مختصات مراکز دایره‌ها از نقطه‌ی (۴ , ۲-) به‌اندازه‌ی شعاع به سمت (راست و بالا)، (راست و پایین)، (چپ و بالا) و (چپ و پایین) حرکت می‌کنیم. بنابراین مراکز دایره‌ها نقاط $(-۸,۱۰)$، $(۴,۱۰)$، $(-۸,-۲)$ و $(۴,-۲)$ هستند که مجموع طول و عرض همه‌ی آن‌ها برابر است با:

$$-۸+۱۰+۴+۱۰-۸-۲+۴-۲=۸$$

۶۷. ۱ ۲ ۳ ۴

قطر، خطی است که از مرکز دایره عبور کند؛ مرکز دایره نقطه‌ی $O(۰,۱)$ است و خط موازی محور xها (دارای شیب صفر) که از این نقطه بگذرد، خط $y=۱$ است.

۶۸. ۱ ۲ ۳ ۴

معادله‌ی داده شده مربوط به دایره است. دایره بی‌شمار محور تقارن دارد که همگی آن‌ها از مرکز عبور می‌کنند. مرکز دایره نقطه‌ی $O(۳,-۲)$ است. پس خطی محور تقارن دایره است که از نقطه‌ی $O(۳,-۲)$ بگذرد. خط گزینه‌ی ۳ از این نقطه می‌گذرد.

$$x+۳y+۳=۰\xrightarrow{(۳,-۲)}۰=۰$$

۶۹. ۱ ۲ ۳ ۴

قطر دایره از مرکز آن عبور می‌کند، پس خط مورد نظر از $O(۱,-۲)$ عبور می‌کند. ضمناً چون بر خط $x+۲y-۱=۰$ عمود است، باید شیب آن معکوس و قرینه‌ی شیب این خط باشد، پس شیب آن ۲ است:

$$y-(-۲)=۲(x-۱)\Rightarrow y=۲x-۴$$

۷۰. ۱ ۲ ۳ ۴

خطی که بر هر دو دایره عمود است، از مرکز هر دو دایره می‌گذرد، یعنی خط‌المرکزین آن‌هاست:

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰\Rightarrow O(۱,-۱)$$

$$x^۲+y^۲+۴x+۲y=۰\Rightarrow O'(-۲,-۱)$$

$$\xrightarrow{m_{OO'}=۰}OO':y=-۱$$

۷۱. ۱ ۲ ۳ ۴

همه‌ی قطرهای دایره در مرکز آن متقاطع‌اند. پس با دو مقدار دلخواه m، دو قطر را به‌دست آورده و از تقاطع آن‌ها مرکز را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}m=-۲\Rightarrow -x+۱=۰\Rightarrow x=۱\\ m=-۱\Rightarrow y+۱=۰\Rightarrow y=-۱\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تقاطع}}O(۱,-۱)$$

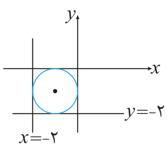
فاصله‌ی مرکز دایره از نقطه‌ای روی آن برابر شعاع دایره است:

$$O(۱,-۱),\ A(۵,۲)$$

$$\Rightarrow R=OA=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۲-(-۱))^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

۷۲. ۱ ۲ ۳ ۴

مطابق شکل دایره‌ی مورد نظر دارای مرکز $O(-۱,-۱)$ و شعاع ۱ واحد است:



$$\xrightarrow{\text{معادله ی دایره}}(x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۱$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x+۲y+۱+۱-۱=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x+۲y+۱=۰$$

۷۳. ۱ ۲ ۳ ۴

شعاع دایره برابر با فاصله‌ی مرکز دایره از هر نقطه روی آن است.

$$C(۲,-۱),O(۰,۰)$$

$$\Rightarrow R=CO=\sqrt{(۲-۰)^۲+(-۱-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله ی دایره}}(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۵$$

۷۴. ۱ ۲ ۳ ۴

نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB مرکز دایره است و طول پاره‌خط AB قطر دایره است:

$$A(۱,۲),\ B(۳,۶)\Rightarrow O(\frac{۱+۳}{۲},\frac{۲+۶}{۲})=(۲,۴)$$

$$۲R=AB=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۶-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=۲\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله ی دایره}}(x-۲)^۲+(y-۴)^۲=۵$$

۷۵. ۱ **۲** ۳ ۴

چون مرکز دایره روی خط $y=x+۲$ قرار دارد، مختصات آن را به شکل $O(x, x+۲)$ در نظر می‌گیریم، حال باید فاصله‌ی مرکز دایره از نقاط $A(۲,۳), B(-۲,۱)\Rightarrow OB=OA=R$ روی دایره برابر باشد:

$$\sqrt{(x-۲)^۲+(x+۲-۳)^۲}=\sqrt{(x+۲)^۲+(x+۲-۱)^۲}$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x+۴+x^۲+۱-۲x=x^۲+۴x+۴+x^۲+۲x+۱$$

$$\Rightarrow -۶x+۵=۶x+۵\Rightarrow x=۰$$

$$\Rightarrow R=OA=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

۷۶. **۱** ۲ ۳ ۴

تمام خطوط قائم بر دایره از مرکز آن می‌گذرند. پس نقطه‌ی $(۲,-۱)$ مرکز دایره است. فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس بر آن همان شعاع دایره است:

$$O(۲,-۱),\ y-x+۱=۰\Rightarrow R=\frac{|-۱-۲+۱|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

۷۷. **۱** ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: فاصله‌ی مرکز از خطی که بر دایره مماس است، برابر با شعاع دایره است. مرکز و شعاع دایره را از معادله‌ی آن می‌یابیم:

$$x^۲+y^۲+۴x+k=۰$$

$$\Rightarrow O(-۲,۰),\ r=\frac{\sqrt{۱۶-۴k}}{۲}=\sqrt{۴-k}$$

حال فاصله‌ی مرکز دایره از نیمساز ربع اول و سوم را می‌یابیم:

$$O(-۲,۰),\ x-y=۰\Rightarrow \frac{|-۲-۰|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۴-k}=\sqrt{۲}\Rightarrow ۴-k=۲\Rightarrow k=۲$$

راه‌حل دوم: اگر دایره بر خط $y=x$ مماس باشد، معادلات حاصل از تقاطع آن‌ها فقط یک جواب دارد:

$$x^۲+y^۲+۴x+k=۰\xrightarrow{y=x}$$

$$x^۲+x^۲+۴x+k=۰\Rightarrow ۲x^۲+۴x+k=۰$$

$$\xrightarrow{\text{یک جواب}}\Delta=۰\Rightarrow ۱۶-۸k=۰\Rightarrow k=۲$$

۷۸. ۱ **۲** ۳ ۴

فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مذکور شعاع دایره است:

$$۳x+۴y+۱=۰,\ O(۱,۲)\Rightarrow OH=\frac{|۳+۸+۱|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۲}{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}}(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=\frac{۱۴۴}{۲۵}$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۴y+۵-\frac{۱۴۴}{۲۵}=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۴y-\frac{۱۹}{۲۵}=۰$$

۷۹. **۱** ۲ ۳ ۴

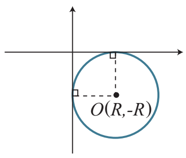
معادله‌ی دایره‌ی مورد نظر $(x-۱۳)^۲+(y-۱۳)^۲=۱۶۹$ است. جای x مقدار ۱۸ را قرار می‌دهیم:

$$(۵)^۲+(y-۱۳)^۲=۱۶۹\Rightarrow (y-۱۳)^۲=۱۴۴$$

$$\Rightarrow y-۱۳=\pm۱۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y-۱۳=۱۲\Rightarrow y=۲۵\\ y-۱۳=-۱۲\Rightarrow y=۱\end{cases}\xrightarrow{\text{فاصله ی دو نقطه}}۲۵-۱=۲۴$$

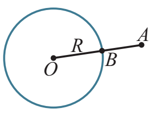
۸۰. ۱ **۲** ۳ ۴



طبق شکل اگر شعاع دایره‌ی مذکور را R در نظر بگیریم، مرکز آن نقطه $O(R,-R)$ خواهد بود و معادله‌ی آن به شکل $(x-R)^۲+(y+R)^۲=R^۲$ است.

۸۱. ۱ **۲** ۳ ۴

طبق شکل داریم:



$$AB=OA-R=\text{کم‌ترین فاصله}$$

$$x^۲+y^۲+۲x-۸y+۱۳=۰$$

$$\Rightarrow O(-۱,۴),\ R=\frac{\sqrt{۴+۶۴-۵۲}}{۲}=۲$$

$$OA=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۷-۴)^۲}=۵\Rightarrow AB=۵-۲=۳$$

۸۲. ۱ **۲** ۳ ۴

اگر نقطه‌ی A درون دایره‌ی $F(x,y)=۰$ باشد باید $F(A)<۰$ باشد، پس موارد را امتحان می‌کنیم:

$$F(x,y)=x^۲+y^۲-۲۰x+۸y-۱$$

$(۱,۲)\Rightarrow F=۱+۴-۲۰+۱۶-۱=۰\Rightarrow$ این نقطه روی دایره است.

$(۳,۱)\Rightarrow F=۹+۱-۶۰+۸-۱=-۴۳\Rightarrow$ این نقطه درون دایره است.

$$(\sqrt{۸},\sqrt{۲})\Rightarrow F=۸+۲-۲۰\sqrt{۸}+۸\sqrt{۲}-۱$$

$$=۹-۴۰\sqrt{۲}+۸\sqrt{۲}=۹-۳۲\sqrt{۲}<۰$$

پس این نقطه هم درون دایره است.

$(۰,۰)\Rightarrow F=-۱\Rightarrow$ این نقطه هم درون دایره است.

۸۳. ۱ **۲** ۳ ۴

باید وضعیت نسبی نقطه و دایره را بدانیم:

$$F=x^۲+y^۲+x+y-۱=۰\Rightarrow F(A)=۴+۹+۲-۳-۱=۱۱>۰$$

پس این نقطه بیرون دایره است و از آن دو خط می‌توان بر دایره مماس کرد.

۸۴. ۱ **۲** ۳ ۴

$$x^۲+y^۲-۴x+۴y-۱=۰$$

$$\Rightarrow O(۲,-۲),\ r=\frac{\sqrt{۱۶+۱۶+۴}}{۲}=۳$$

$$x^۲+y^۲-۴x+۸y+۱۹=۰$$

$$\Rightarrow O'(۲,-۴),\ r'=\frac{\sqrt{۱۶+۶۴-۷۶}}{۲}=۱\Rightarrow OO'=۲$$

چون $OO'=r-r'$ است، پس دو دایره مماس درون هستند.

۸۵. ۱ ۲ ۳ ۴

در معادله‌ی گسترده‌ی یک دایره باید ضرایب x^2 و y^2 برابر باشند:

$$m^2=3m-2 \Rightarrow m^2-3m+2=0$$
$$\Rightarrow (m-1)(m-2)=0 \Rightarrow m=1,2$$
$$m=1 \Rightarrow x^2+y^2+4x+8y+3=0 \quad (C_1)$$
$$m=2 \Rightarrow 4x^2+4y^2+4x+8y+12=0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+x+2y+3=0 \quad (C_2)$$

در هر یک از معادلات شعاع را می‌یابیم:

$$C_1 \to r_1=\frac{\sqrt{16+64-12}}{2}=\sqrt{17}$$
$$C_2 \to r_2=\frac{\sqrt{1+4-12}}{2}=\frac{\sqrt{-7}}{2} \Rightarrow$$ این معادله مربوط به یک دایره نیست.

۸۶. ۱ ۲ ۳ ۴

باید مرکز هر دو دایره در خط داده شده صدق کنند:

$$x^2+y^2+2x+ay=0 \Rightarrow O(-1,-\frac{a}{2})$$
$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در خط}} -\frac{a}{2}+1+2=0 \Rightarrow a=6$$
$$x^2+y^2-bx+y-1=0 \Rightarrow O'(\frac{b}{2},-\frac{1}{2})$$
$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در خط}} -\frac{1}{2}-\frac{b}{2}+2=0 \Rightarrow b=3$$

پس مراکز $O(-1,-3)$ و $O'(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ هستند و طول خط‌المرکزین برابر است با:

$$OO'=\sqrt{(\frac{3}{2}+1)^2+(-\frac{1}{2}+3)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

۸۷. ۱ ۲ ۳ ۴

معادله‌ی این دایره $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ است. نقاطی که مجموع طول و عرض آن‌ها ۳ است هم روی خط $x+y=3$ قرار دارند. پس تقاطع این خط با دایره را باید بیابیم. برای این کار فاصله‌ی مرکز دایره از خط مورد نظر را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم:

$$O(2,-1),\ x+y-3=0 \Rightarrow \frac{|2-1-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

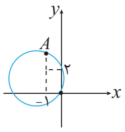
چون فاصله‌ی مرکز دایره از خط کم‌تر از شعاع است، پس خط مورد نظر در دو نقطه دایره را قطع می‌کند.

۸۸. ۱ ۲ ۳ ۴

تمام قائم‌های دایره از مرکز دایره می‌گذرند، پس نقطه‌ی $O(-1,2)$ مرکز دایره است. شعاع دایره نیز برابر با فاصله‌ی مرکز دایره از خطی است که بر آن مماس است:

$$O(-1,2),\ y-2x+1=0 \Rightarrow r=\frac{|2+2+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$$

دایره‌ی مورد نظر به شکل مقابل است. A دورترین نقطه‌ی دایره از محور xها است که فاصله‌ی آن از محور xها برابر $R+2=2+\sqrt{5}$ است.



۸۹. ۱ ۲ ۳ ۴

تنها نقطه‌ای که از آن می‌توان چند خط عمود بر دایره رسم کرد، مرکز دایره است. مرکز دایره $O(-2,-3)$ است، پس:

$$\begin{cases} a=-2 \\ b+2=-3 \Rightarrow b=-5 \end{cases}$$

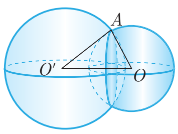
بنابراین نقطه‌ی $B(-1,-5)$ است. باید وضعیت این نقطه را نسبت به دایره بیابیم:

$$F=x^2+y^2+4x+6y=0 \Rightarrow F(B)=1+25-4-30=-8$$

پس نقطه‌ی B داخل دایره است و از آن نمی‌توان بر دایره مماس رسم کرد.

۹۰. ۱ ۲ ۳ ۴

این دو کره متقاطع‌اند، زیرا بنابر فرض تست $OO'=4$ و $r=3$ و $r'=5$ است چون $|r-r'|<OO'<r+r'$ است دو کره متقاطع‌اند.



۹۱. ۱ ۲ ۳ ۴

چون مرکز دایره روی خط $y=2x-1$ است، مختصات آن را به شکل $O(x,2x-1)$ در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی مرکز دایره از نقاط روی آن برابر شعاع دایره است:

$$(*)\quad R=OA=OB$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+(2x-1-0)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(2x-1-2)^2}$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2-6x+9+4x^2+1-4x$$
$$=x^2-2x+1+4x^2-12x+9$$
$$\Rightarrow 4x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow O(0,-1)$$
$$\xrightarrow{(*)} R=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

۹۲. ۱ ۲ ۳ ۴

مرکز دایره را نقطه‌ی $O(\alpha,\beta)$ در نظر می‌گیریم، پس $\alpha+\beta=15$ است. ضمناً فاصله‌ی مرکز دایره تا هر نقطه روی آن برابر شعاع دایره است:

$$\sqrt{(\alpha-0)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{117} \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=117$$
$$\Rightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=117 \Rightarrow 15^2-2\alpha\beta=117$$
$$\Rightarrow 2\alpha\beta=108 \Rightarrow \alpha\beta=54$$
$$\Rightarrow (\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=117-2(54)=9$$
$$\Rightarrow |\alpha-\beta|=3$$

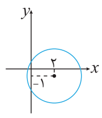
۹۳. ۱ ۲ ۳ ۴

مرکز دایره‌ی مورد نظر نقطه‌ی $(2,-1)$ است. ضمناً فاصله‌ی مرکز از خطی

که بر آن مماس است، برابر با شعاع دایره است. پس شعاع دایره برابر است با:

$$3x-4y+5=0\ ,\ O(2,-1) \Rightarrow R=\frac{|6+4+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3$$

دایره‌ای به مرکز $O(2,-1)$ و شعاع ۳ از هر چهار ناحیه‌ی مختصات می‌گذرد:



۹۴. ۱ ۲ **۳** ۴

همه‌ی قطرهای دایره در مرکز آن متقاطع‌اند. پس با در نظر گرفتن دو مقدار دلخواه برای m، دو قطر را می‌یابیم:

$$\left.\begin{array}{l} m=-1 \Rightarrow -6y=6 \Rightarrow y=-1 \\ m=2 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تقاطع}} O(2,-1)$$

فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس بر آن برابر با شعاع دایره است:

$$O(2,-1)\ ,3x+4y+8=0 \Rightarrow \frac{|6-4+8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

۹۵. ۱ ۲ ۳ **۴**

با توجه به نقطه‌ی داده شده دایره‌ی مورد نظر در ناحیه‌ی اول بر محورهای مختصات مماس است. می‌دانیم دایره‌ای که در ناحیه‌ی اول بر محورهای مختصات مماس باشد، دارای معادله‌ای به شکل زیر است:

$$(x-R)^2+(y-R)^2=R^2 \xrightarrow{A(3,6)\in\text{دایره}}$$
$$(3-R)^2+(6-R)^2=R^2$$
$$\Rightarrow 9+R^2-6R+36+R^2-12R=R^2$$
$$\Rightarrow R^2-18R+45=0 \Rightarrow (R-3)(R-15)=0$$
$$\Rightarrow R=3\ ,15$$

۹۶. ۱ **۲** ۳ ۴

مرکز دایره‌ای که در ناحیه‌ی دوم بر محورهای مختصات مماس است، روی خط $y=-x$ قرار دارد. پس مرکز دایره روی تقاطع خطوط $y=-x$ و $2x-y+6=0$ قرار دارد:

$$2x-y+6=0 \xrightarrow{y=-x} 3x+6=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=2$$

پس مرکز دایره $O(-2,2)$ است و چون بر محورهای مختصات مماس است، شعاع آن برابر با فاصله‌ی مرکز از محورهای مختصات است، پس $R=2$ است.

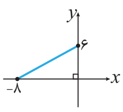
۹۷. ۱ **۲** ۳ ۴

راه‌حل اول: معادله‌ی دایره را به شکل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر می‌گیریم و مختصات نقاط را در آن قرار می‌دهیم:

$$(-8,0) \Rightarrow 64+0-8a+c=0 \xrightarrow{c=0} a=8$$
$$(0,6) \Rightarrow 0+36+6b+c=0 \xrightarrow{c=0} b=-6$$
$$(0,0) \Rightarrow c=0$$

پس معادله‌ی دایره به شکل $x^2+y^2+8x-6y=0$ است و شعاع آن $r=\frac{\sqrt{64+36}}{2}=5$ است.

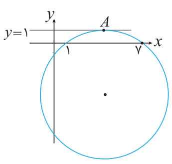
راه‌حل دوم: مثلث مورد نظر قائم‌الزاویه است. در مثلث قائم‌الزاویه شعاع دایره محیطی، نصف وتر است.



$$\text{وتر} \rightarrow \sqrt{6^2+8^2}=10 \Rightarrow 2r=10 \Rightarrow r=5$$

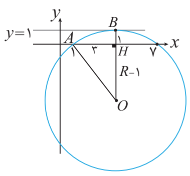
۹۸. **۱** ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: از تقارن مشخص است که نقطه‌ی $A(4,1)$ روی دایره است. پس معادله‌ی دایره را به شکل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر می‌گیریم و مختصات سه نقطه را در آن قرار می‌دهیم:



$$\left.\begin{array}{l} (1,0) \Rightarrow 1+a+c=0 \\ (7,0) \Rightarrow 49+7a+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-8 \Rightarrow c=7 \quad (*)$$
$$(4,1) \Rightarrow 16+1+4a+b+c=0 \xrightarrow{(*)} b=8$$
$$\xrightarrow{\text{معادله ی دایره}} x^2+y^2-8x+8y+7=0$$
$$\xrightarrow{\text{مرکز}} O(4,-4)$$

راه‌حل دوم: اگر شعاع دایره را R در نظر بگیریم، $R=OA=OB$ و چون $HB=1$ است، پس $OH=R-1$ است. حال در مثلث OAH رابطه‌ی فیثاغورس را می‌نویسیم:



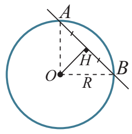
$$R^2=3^2+(R-1)^2$$
$$\Rightarrow R^2=9+R^2-2R+1$$
$$\Rightarrow R=5 \Rightarrow R-1=4$$
$$\Rightarrow O(4,-4)$$

۹۹. ۱ **۲** ۳ ۴

چون مرکز دایره روی خط $x+y=4$ است، آن را به شکل $O(x,4-x)$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس بر آن برابر شعاع دایره است. پس فاصله‌ی مرکز دایره از دو خط داده شده برابر است با:

$$O(x,4-x),\ y-x=0 \Rightarrow R=\frac{|4-x-x|}{\sqrt{1+1}}$$
$$O(x,4-x),\ y+x=0 \Rightarrow R=\frac{|4-x+x|}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \frac{|4-2x|}{\sqrt{2}}=\frac{|4|}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-2x=4 \Rightarrow x=0 \Rightarrow O(0,4) \Rightarrow R=2\sqrt{2} \\ \xrightarrow{\text{معادله ی دایره}} x^2+(y-4)^2=8 \\ 4-2x=-4 \Rightarrow x=4 \Rightarrow O(4,0) \Rightarrow R=2\sqrt{2} \\ \xrightarrow{\text{معادله ی دایره}} (x-4)^2+y^2=8 \end{array}\right.$$

.۱۰۰ ۱ **۲** ۳ ۴



اگر دایره‌ای بر دو خط وترهای مساوی ایجاد کند، فاصله‌ی مرکز دایره از آن دو خط برابر است، چرا که: $AB=۲HA=۲\sqrt{R^۲-OH^۲}$

مرکز دایره نقطه‌ی $(۱,۰)$ است. فاصله‌ی آن را از دو خط برابر می‌گذاریم:

$$\begin{cases} y-mx=۰ \\ ۲x+y-۱=۰\end{cases} \Rightarrow \frac{|-m|}{\sqrt{۱+m^۲}}=\frac{|۲-۱|}{\sqrt{۴+۱}}\Rightarrow \frac{|m|}{\sqrt{۱+m^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۵}\,|m|=\sqrt{m^۲+۱}\Rightarrow ۵m^۲=m^۲+۱$$

$$\Rightarrow m^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$$

.۱۰۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

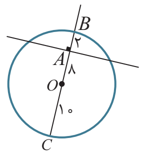
فاصله‌ی مرکز دایره از نقطه‌ای که روی دایره قرار دارد، برابر با شعاع دایره است:

$$O(۵,-۱۰)\,,\,A(-۱,-۲)\Rightarrow R=\sqrt{۶^۲+۸^۲}=۱۰$$

فاصله‌ی مرکز دایره از خط مورد نظر را می‌یابیم:

$$O(۵,-۱۰)\,,\,۳x+۴y-۱۵=۰$$

$$\Rightarrow OA=\frac{|۱۵-۴۰-۱۵|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۴۰}{۵}=۸$$



چون فاصله‌ی مرکز دایره از خط داده شده کم‌تر از شعاع است، پس خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. بزرگ‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره از A، AC است:

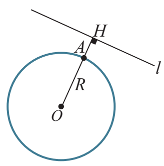
$$AC=۱۰+۸=۱۸$$

.۱۰۲ ۱ **۲** ۳ ۴

وضعیت نسبی خط و دایره‌ی مذکور را می‌یابیم. فاصله‌ی مرکز دایره از خط داده شده را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰\Rightarrow O(۱,-۲),R=\frac{\sqrt{۴+۱۶+۱۶}}{۲}=۳$$

$$O(۱,-۲),۳x+۴y-۱۵=۰\Rightarrow OH=\frac{|۳-۸-۱۵|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=۴$$



چون فاصله‌ی مرکز دایره از خط، بیش‌تر از شعاع است، پس خط مورد نظر دایره را قطع نمی‌کند. پس کم‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره از خط l، همان AH است:

$$AH=OH-R=۴-۳=۱$$

.۱۰۳ ۱ ۲ **۳** ۴

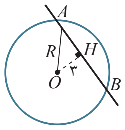
نقطه‌ای مثل $M(x,y)$ را در نظر بگیرید: $MA^۲+MB^۲=۲۲$

$$(x+۱)^۲+(y-۰)^۲+(x-۱)^۲+(y-۰)^۲=۲۲$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x+۱+y^۲+x^۲-۲x+۱+y^۲=۲۲$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲=۲۲\Rightarrow x^۲+y^۲=۱۰$$

.۱۰۴ ۱ ۲ **۳** ۴



فاصله‌ی مرکز دایره‌ی $O(۱,۴)$ را از خط مورد نظر می‌یابیم:

$$\begin{cases}۵x+۱۲y-۱۴=۰\\ O(۱,۴)\end{cases}\Rightarrow OH=\frac{|۵+۴۸-۱۴|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}=\frac{۳۹}{۱۳}=۳$$

شعاع دایره را می‌یابیم:

$$x^۲+y^۲-۲x-۸y-۸=۰\Rightarrow R=\frac{\sqrt{۴+۶۴+۳۲}}{۲}=۵$$

حال از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$AH=\sqrt{R^۲-OH^۲}=\sqrt{۲۵-۹}=۴\Rightarrow AB=۸$$

.۱۰۵ ۱ **۲** ۳ ۴

نقطه‌ی مورد نظر را $M(x,y)$ در نظر می‌گیریم:

$$AM=\sqrt{۲}MB\Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲+(y-۴)^۲}$$

$$=\sqrt{۲}\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۲)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲-۴x+۴+y^۲-۸y+۱۶$$

$$=۲(x^۲-۲x+۱+y^۲-۴y+۴)\Rightarrow x^۲+y^۲=۱۰$$

معادله‌ی داده شده در گزینه‌ی «۲» همین معادله است:

$$(۲x-y)^۲+(x+۲y)^۲=۵۰$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+y^۲-۴xy+x^۲+۴y^۲+۴xy=۵۰$$

$$\Rightarrow ۵x^۲+۵y^۲=۵۰\Rightarrow x^۲+y^۲=۱۰$$

.۱۰۶ ۱ ۲ **۳** ۴

اگر A درون دایره‌ی $F(x,y)=۰$ باشد، باید $F(A)<۰$ باشد، پس:

$$F=x^۲+y^۲-۳=۰\Rightarrow F(A)<۰$$

$$\Rightarrow m^۲+(m-۱)^۲-۳<۰\Rightarrow ۲m^۲-۲m-۲<۰$$

$$\Rightarrow m^۲-m-۱<۰\Rightarrow \Delta=\sqrt{۵}\Rightarrow \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<m<\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

.۱۰۷ **۱** ۲ ۳ ۴

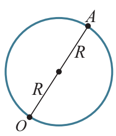
نقاط داخل و روی دایره‌ی $F(x,y)=۰$ با نامساوی $F(x,y)\le ۰$ نشان داده می‌شوند:

$$F:(x+۲)^۲+y^۲=۱۶\Rightarrow F\le ۰$$

$$\Rightarrow x^۲+۴x+y^۲+۴-۱۶\le ۰\Rightarrow x^۲+y^۲+۴x-۱۲\le ۰$$

.۱۰۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

مبدأ در معادله‌ی دایره صدق می‌کند یعنی روی دایره قرار دارد. اگر نقطه‌ای روی دایره باشد، دورترین نقطه‌ی دایره به آن، سر دیگر قطر است و دورترین فاصله برابر قطر دایره خواهد بود:

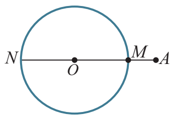


$$x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰\Rightarrow R=\frac{\sqrt{۴+۴}}{۲}=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow ۲R=۲\sqrt{۲}$$

۱۰۹.

اگر از نقطه‌ی مورد نظر به مرکز دایره خطی رسم کنیم، نقطه‌ی M و N به ترتیب نزدیک‌ترین و دورترین نقطه‌ی دایره به نقطه‌ی A است:



کوتاه‌ترین فاصله $\Rightarrow AM = OA - R$

پس مرکز و شعاع دایره را می‌یابیم:

$$O(4, 5),\ R=4$$

$$OA=\sqrt{(1-4)^2+(1-5)^2}=5 \Rightarrow AM=5-4=1$$

۱۱۰.

برای به‌دست آوردن مقدار k دو راه داریم؛

راه‌حل اول: دایره‌ای که بر محور xها مماس است، محور xها را در یک نقطه قطع می‌کند. پس با قرار دادن $y=0$ در معادله باید فقط یک ریشه به دست بیاید:

$$y=0 \Rightarrow x^2+2x+k=0 \Rightarrow \Delta=0$$

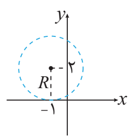
$$\Rightarrow 4-4k=0 \Rightarrow k=1$$

نزدیک نقطه‌ی دایره به A دارای فاصله‌ی $OA-R$ از آن است:

$$O(-1, 2),\ A(-5,-1) \Rightarrow OA=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

$$R=\frac{\sqrt{4+16-4}}{2}=2 \Rightarrow OA-R=5-2=3$$

راه‌حل دوم: برای محاسبه‌ی مقدار k، مرکز دایره $(-1, 2)$ است. با توجه به شکل شعاع دایره ۲ است، پس:

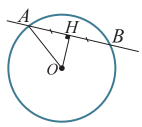


$$\frac{\sqrt{4+16-4k}}{2}=2 \Rightarrow \sqrt{5-k}=2$$

$$\Rightarrow 5-k=4 \Rightarrow k=1$$

۱۱۱.

با توجه به این‌که $AB=6$ است، پس $AH=HB=3$ است. ضمناً فاصله‌ی مرکز دایره از خط مورد نظر را می‌یابیم:



$$3x-4y+2=0,\ O(2,-3)$$

$$\Rightarrow OH=\frac{|6+12+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4$$

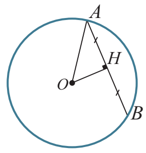
حال از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$OA^2=OH^2+AH^2=16+9=25 \Rightarrow OA=5$$

$\Rightarrow$ قطر $=10$

۱۱۲.

اگر از مرکز دایره به وسط وتری از دایره وصل کنیم، بر آن عمود است. مختصات نقطه‌ی H به صورت $(1, 2)$ داده شده است. همچنین از معادله‌ی دایره داریم:



$$x^2+y^2-4x-8y+10=0$$

$$\Rightarrow O(2,4) \Rightarrow OH=\sqrt{5}$$

$$r=\frac{\sqrt{16+64-40}}{2}=\sqrt{10}$$

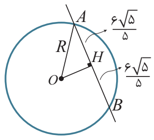
حال از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$AH^2+OH^2=OA^2 \Rightarrow AH^2+5=10$$

$$\Rightarrow AH=\sqrt{5} \Rightarrow AB=2\sqrt{5}$$

۱۱۳.

مرکز دایره $O(-2, 3)$ است. فاصله‌ی مرکز دایره از خط مورد نظر را می‌یابیم:



$$O(-2, 3),\ x-2y-4=0$$

$$\Rightarrow OH=\frac{|-2-6-4|}{\sqrt{1+4}}=\frac{12}{\sqrt{5}}$$

حال از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$R=\sqrt{(\frac{12}{\sqrt{5}})^2+(\frac{6\sqrt{5}}{5})^2}=\sqrt{\frac{144}{5}+\frac{36}{5}}=\sqrt{\frac{180}{5}}=6$$

پس معادله‌ی دایره به شکل زیر است:

$$(x+2)^2+(y-3)^2=36 \Rightarrow x^2+y^2+4x-6y-23=0$$

۱۱۴.

$$C_1: O(-1, 2),\ r=\frac{\sqrt{4+16+36}}{2}=\sqrt{14}\simeq 3.7$$

$$C_2: O'(1, -2),\ r'=\frac{\sqrt{4+16+16}}{2}=3$$

$$\Rightarrow OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\simeq 4.5$$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده، $3.7-3<4.5<3+3.7$ یعنی $|r-r'|<OO'<r+r'$ پس دو دایره در دو نقطه متقاطع‌اند.

۱۱۵.

$$x^2+y^2+2x-4y-9=0$$

$$\Rightarrow O(-1,2),\ r=\frac{\sqrt{4+16+36}}{2}=\sqrt{14}$$

$$x^2+y^2-2x+4y+4=0$$

$$\Rightarrow O'(1,-2),\ r'=\frac{\sqrt{4+16-16}}{2}=1$$

$$\Rightarrow OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

اعداد $2\sqrt{5}$ و $\sqrt{14}+1$ هر دو بین ۴ و ۵ هستند، پس برای مقایسه‌ی آن‌ها فرض می‌کنیم:

$$2\sqrt{5}>\sqrt{14}+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 20>14+1+2\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow 5>2\sqrt{14} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 25>56\ \times$$

پس فرض اولیه غلط است، یعنی $2\sqrt{5}<\sqrt{14}+1$ و ضمناً $\sqrt{14}-1<2\sqrt{5}$. پس دو دایره در دو نقطه متقاطع‌اند.

۱۱۶.

مرکز دایره‌ها به ترتیب $O(1, 0)$ و $O'(4, 4)$ است و شعاع آن‌ها ۲ و r است.

اگر دو دایره مماس خارج باشند، $OO'=r+2$ و اگر دو دایره مماس داخل باشند $OO'=|r-2|$ است، پس OO' را به دست می‌آوریم:

$OO'=\sqrt{(4-1)^2+(4-0)^2}=5$

$\xrightarrow{\text{مماس خارج}} OO'=r+2\Rightarrow 5=r+2\Rightarrow r=3$

$\xrightarrow{\text{مماس داخل}} OO'=|r-2|\Rightarrow 5=|r-2|$

$$\Rightarrow\begin{cases} r-2=5\Rightarrow r=7\\ r-2=-5\Rightarrow r=-3 \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

پس مقادیر ۷ و $r=3$ قابل قبول‌اند.

.۱۱۷ ۱ ۲ **۳** ۴

مرکز و شعاع دایره‌ی داده شده را می‌یابیم:

$x^2+y^2-8x+6y+21=0\Rightarrow O'(4,-3)$

$\Rightarrow r'=\frac{\sqrt{64+36-84}}{2}=2$

حال طول خط‌المرکزین را می‌یابیم:

$OO'=\sqrt{(4-1)^2+(-3-1)^2}=5$

چون دو دایره مماس داخل هستند، رابطه‌ی $OO'=|r-r'|$ برقرار است، پس داریم:

$$5=|r-2|\Rightarrow\begin{cases} r-2=5\Rightarrow r=7\\ \xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}}(x-1)^2+(y-1)^2=49\\ r-2=-5\Rightarrow r=-3 \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

.۱۱۸ **۱** ۲ ۳ ۴

شعاع دایره‌ی اول را می‌یابیم. فاصله‌ی مرکز از خطی که بر آن مماس است، برابر شعاع دایره است:

$O(1,0)\ ,\ 3x-4y+2=0\Rightarrow r=\frac{|3+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$

$O'(2,1)\ ,\ r'=3$

$OO'=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt2$

چون $\sqrt2<2$ است $(OO'<r'-r)$، دو دایره‌ی متداخل هستند.

.۱۱۹ ۱ **۲** ۳ ۴

دایره‌ی مورد نظر می‌تواند با دایره‌ی داده شده، مماس داخل یا خارج باشد:

$x^2+y^2-6x+8y+24=0$

$\Rightarrow O(3,-4)\ ,\ r=\frac{\sqrt{36+64-96}}{2}=1$

مرکز دایره‌ی دیگر $O'(0,0)$ و شعاع آن r' است.

$OO'=\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}=5$

$\xrightarrow{\text{مماس خارج}} OO'=r+r'\Rightarrow 5=1+r'\Rightarrow r'=4$

$\xrightarrow{\text{مماس درون}} OO'=|r-r'|\Rightarrow 5=|1-r'|$

$$\Rightarrow\begin{cases} 1-r'=5\Rightarrow r'=-4 \quad \text{غ ق ق}\\ 1-r'=-5\Rightarrow r'=6\end{cases}$$

پس شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر ۶ و دایره‌ی کوچک‌تر ۴ است. نسبت شعاع‌ها $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ است.

.۱۲۰ ۱ ۲ **۳** ۴

برای این‌که دو دایره متقاطع باشند، باید $|r-r'|<OO'<r+r'$ باشد:

$(x+3)^2+y^2=(2m+1)^2\Rightarrow O(-3,0)\ ,\ r=2m+1$

$x^2+y^2-8y-m^2+16=0$

$\Rightarrow O'(0,4)\ ,\ r'=\frac{\sqrt{64+4m^2-64}}{2}=m$

$\Rightarrow OO'=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

$|r-r'|<OO'<r+r'\Rightarrow|2m+1-m|<5<2m+1+m$

$\Rightarrow m+1<5<3m+1$

$$\Rightarrow\begin{cases} m+1<5\Rightarrow m<4\\ 3m+1>5\Rightarrow 3m>4\Rightarrow m>\frac{4}{3}\end{cases}\xrightarrow{\cap}\frac{4}{3}<m<4$$

.۱۲۱ ۱ ۲ **۳** ۴

اگر دو دایره مماس خارج باشند، رابطه‌ی $OO'=r+r'$ برقرار است:

$x^2+y^2+4\sqrt6\,y+b=0$

$\Rightarrow O(0,-2\sqrt6)\ ,\ r=\frac{\sqrt{96-4b}}{2}=\sqrt{24-b}$

$x^2+y^2-2x-3=0\Rightarrow O'(1,0)\ ,\ r'=\frac{\sqrt{4+12}}{2}=2$

$OO'=\sqrt{(1-0)^2+(0+2\sqrt6)^2}=5$

$OO'=r+r'\Rightarrow 5=\sqrt{24-b}+2\Rightarrow\sqrt{24-b}=3$

$\Rightarrow 24-b=9\Rightarrow b=15$

.۱۲۲ ۱ ۲ **۳** ۴

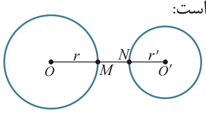
اول باید وضعیت نسبی دو دایره را بیابیم:

$x^2+y^2-8y+12=0\Rightarrow O(0,4)\ ,\ r=\frac{\sqrt{64-48}}{2}=2$

$x^2+y^2-8x+12=0\Rightarrow O'(4,0)\ ,\ r'=\frac{\sqrt{64-48}}{2}=2$

$OO'=\sqrt{16+16}=4\sqrt2$

چون $OO'>r+r'$ است، دو دایره متخارج هستند و کم‌ترین فاصله‌ی بین نقاط دو دایره برابر $OO'-(r+r')$ است:

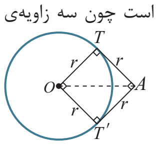


$MN=OO'-(r+r')$

$=4\sqrt2-4$

.۱۲۳ ۱ ۲ **۳** ۴

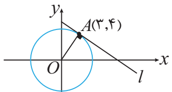
با توجه به شکل چهارضلعی $OTAT'$ مستطیل است چون سه زاویه‌ی 90° دارد و چون دو ضلع مجاور آن با هم برابرند، مربع است، پس OA قطر مربع و برابر $\sqrt2$ برابر شعاع است:



$r=2\Rightarrow OA=\sqrt2\,r=2\sqrt2$

.۱۲۴ ۱ **۲** ۳ ۴

می‌دانیم خط l در نقطه‌ی A بر شعاع دایره‌ی



(OA) مماس است. شیب پاره‌خط OA برابر است با: $\frac{۴-۰}{۳-۰}=\frac{۴}{۳}$، پس: شیب خط l، $-\frac{۳}{۴}$ است. چون از نقطه‌ی $(۳,۴)$ عبور می‌کند، معادله‌ی آن به شکل مقابل است: $y-۴=-\frac{۳}{۴}(x-۳)\Rightarrow y-۴=-\frac{۳}{۴}x+\frac{۹}{۴}$

$$\Rightarrow y+\frac{۳}{۴}x=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow ۴y+۳x=۲۵$$

۱۲۵. ۱ ۲ **۳** ۴

این دایره اگر در ناحیه‌ی اول باشد، مرکز آن $O(R,R)$، در ناحیه‌ی دوم $O(-R,R)$، در ناحیه‌ی سوم $O(-R,-R)$ و در ناحیه‌ی چهارم $O(R,-R)$ است. پس مجموع طول و عرض مرکز آن به ترتیب در چهار ناحیه $۲R$، صفر، $-۲R$ و صفر است. با توجه به عدد ۱۰- دایره در ناحیه‌ی سوم بر محورهای مختصات مماس بوده است و $-۲R=-۱۰$ است، پس $R=۵$. بنابراین معادله‌ی آن به شکل زیر است:

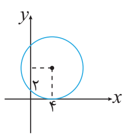
$$(x+R)^۲+(y+R)^۲=R^۲\Rightarrow(x+۵)^۲+(y+۵)^۲=۲۵$$
$$\Rightarrow(x+۵)^۲=۲۵-(y+۵)^۲\geq ۰\Rightarrow(y+۵)^۲\leq ۲۵$$
$$\Rightarrow -۵\leq y+۵\leq ۵\Rightarrow -۱۰\leq y\leq ۰$$
$$\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y=۰,-۱,-۲,\cdots,-۱۰$$

با قرار دادن مقادیر صحیح y، مقادیر x را می‌یابیم:

$$y=۰\Rightarrow x=-۵\checkmark\ ,\ y=-۱\Rightarrow x=-۲,-۸\checkmark\checkmark$$
$$y=-۲\Rightarrow x=-۹,-۱\checkmark\checkmark\ ,\ y=-۳\Rightarrow x=-۵\pm\sqrt{۲۱}$$
$$y=-۴\Rightarrow x=-۵\pm\sqrt{۲۴}\ ,\ y=-۵\Rightarrow x=۰\ ,\ -۱۰\checkmark\checkmark$$
$$y=-۶\Rightarrow x=-۵\pm\sqrt{۲۴}, y=-۷\Rightarrow x=-۵\pm\sqrt{۲۱}$$
$$y=-۸\Rightarrow x=-۹,-۱\checkmark\checkmark$$
$$y=-۹\Rightarrow x=-۲,-۸\checkmark\checkmark\ ,\ y=-۱۰\Rightarrow x=-۵\checkmark$$

پس دایره از ۱۲ نقطه با طول صحیح عبور می‌کند.

۱۲۶. ۱ ۲ ۳ **۴**



راه‌حل اول: اگر شعاع دایره را R در نظر بگیریم، مختصات مرکز آن $O(۴,R)$ خواهد بود. پس معادله‌ی دایره به شکل زیر خواهد بود:

$$(x-۴)^۲+(y-R)^۲=R^۲$$

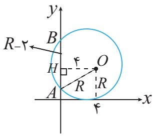
حال نقطه‌ی $(۰,۲)$ را در معادله‌ی دایره جایگذاری می‌کنیم:

$$(-۴)^۲+(۲-R)^۲=R^۲\Rightarrow ۱۶+۴+R^۲-۴R=R^۲$$
$$\Rightarrow ۴R=۲۰\Rightarrow R=۵$$

پس معادله‌ی دایره به شکل $(x-۴)^۲+(y-۵)^۲=۲۵$ است. حال $x=۰$ را در معادله‌ی دایره می‌گذاریم:

$$۱۶+(y-۵)^۲=۲۵\Rightarrow(y-۵)^۲=۹\Rightarrow y-۵=\pm ۳\Rightarrow y=۲,۸$$

راه‌حل دوم: با توجه به شکل با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث OHA



داریم:

$$(R-۲)^۲+۴^۲=R^۲$$
$$\Rightarrow R^۲-۴R+۴+۱۶=R^۲$$
$$\Rightarrow ۴R=۲۰\Rightarrow R=۵$$

عرض نقطه‌ی H میانگین عرض نقاط A و B است:

$$\frac{۲+y_B}{۲}=۵\Rightarrow y_B=۸$$

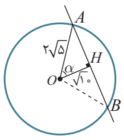
۱۲۷. ۱ **۲** ۳ ۴

مرکز دایره $O(۱,۲)$ و شعاع آن برابر است با:

$$r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۱۶+۶۰}}{۲}=۲\sqrt{۵}$$

فاصله‌ی مرکز دایره از خط داده شده هم برابر است با:

$$OH=\frac{|۳(۱)-۲-۱۱|}{\sqrt{۳^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}}=\sqrt{۱۰}$$

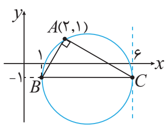


با توجه به شکل روبه‌رو، $BH=AH$ است و $\cos\alpha=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ پس $\alpha=۴۵^\circ$ و ۲α برابر ۹۰° است.

۱۲۸. **۱** ۲ ۳ ۴

مثلث مورد نظر قائم‌الزاویه است، چون طول اضلاع آن در رابطه‌ی فیثاغورس صدق می‌کند:

$$AB=\sqrt{۵}\ ,\ AC=\sqrt{۲۰}\ ,\ BC=۵$$
$$\Rightarrow BC^۲=AC^۲+AB^۲$$



پس BC قطر دایره‌ی محیطی مثلث ABC است، پس خط مماس بر دایره در نقطه‌ی C طبق شکل $x=۶$ است.

۱۲۹. ۱ ۲ **۳** ۴

اولین دایره‌ی داده شده دارای مرکز $O(۱,-۲)$ و شعاع $R=\sqrt{۵}$ است.

مرکز دایره‌ی دیگر وسط دو سر قطر آن است و شعاع آن نصف قطر است:

$$A(۳,۵)\ ,\ B(۱,-۱)\Rightarrow O'(\frac{۳+۱}{۲},\frac{۵-۱}{۲})=(۲,۲)$$
$$۲R=AB=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۵+۱)^۲}=\sqrt{۴+۳۶}=۲\sqrt{۱۰}$$
$$\Rightarrow R'=\sqrt{۱۰}$$
$$OO'=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۲+۲)^۲}=\sqrt{۱۷}$$

چون $\sqrt{۱۰}-\sqrt{۵}<\sqrt{۱۷}<\sqrt{۱۰}+\sqrt{۵}$ $(R'-R<OO'<R+R')$

پس دو دایره متقاطع در دو نقطه‌اند.

۱۳۰. ۱ **۲** ۳ ۴

کافیست معادله‌ی دو دایره را از هم کم کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}x^۲+y^۲-۴x-۶y-۱۴=۰\\x^۲+y^۲+۶x+۸y=۰\end{array}\right\}\Rightarrow ۱۰x+۱۴y+۱۴=۰$$
$$\Rightarrow ۵x+۷y+۷=۰$$

۱۳۱. ۱ ۲ ۳ **۴**

معادله‌ی دایره‌ی اول را در ۳ ضرب می‌کنیم تا ضرایب $x^۲$ و $y^۲$، یک باشند:

$$\frac{۱}{۳}x^۲+\frac{۱}{۳}y^۲-x-y+\frac{۷}{۶}=۰ \xrightarrow{\times ۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^۲+y^۲-۳x-۳y+\frac{۷}{۲}=۰ \\ x^۲+y^۲-۲x-۲y=۰ \end{array}\right\} \Rightarrow x+y-\frac{۷}{۲}=۰ \Rightarrow y=-x+\frac{۷}{۲}$$

شیب این خط ۱- است و چون $\tan ۱۳۵^\circ=-۱$ پس این خط با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی ۱۳۵° می‌سازد.

۱۳۲. ۱ **۲** ۳ ۴

با تفاضل معادله‌ی دو دایره، معادله‌ی وتر مشترک آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\left\{\begin{array}{l} x^۲+y^۲-۲x-۴y=۱۰ \\ x^۲+y^۲=۱۰ \end{array}\right. \Rightarrow ۲x+۴y=۰$$

$$\Rightarrow x+۲y=۰ \Rightarrow x=-۲y$$

حال از معادله‌ی $x=-۲y$ در یکی از دایره‌ها استفاده می‌کنیم:

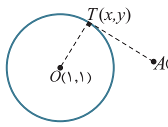
$$x^۲+y^۲=۱۰ \xrightarrow{x=-۲y} ۴y^۲+y^۲=۱۰ \Rightarrow y^۲=۲$$

$$\Rightarrow y=\pm\sqrt{۲} \Rightarrow x=\mp ۲\sqrt{۲}$$

پس نقاط تقاطع دو دایره $A(۲\sqrt{۲},-\sqrt{۲})$ و $B(-۲\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ هستند که فاصله‌ی آن‌ها از هم برابر است با:

$$AB=\sqrt{(۴\sqrt{۲})^۲+(-۲\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۳۲+۸}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$

۱۳۳. **۱** ۲ ۳ ۴



اگر نقطه‌ی تماس را T در نظر بگیریم، می‌دانیم AT بر OT عمود است، پس شیب‌ها معکوس و قرینه‌ی هم‌اند:

$$m_{OT}\times m_{AT}=-۱$$

$$\Rightarrow \frac{y-۱}{x-۱}\times\frac{y-۲}{x-۴}=-۱ \Rightarrow y^۲-۳y+۲=-x^۲+۵x-۴$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۵x-۳y+۶=۰$$

نقطه‌ی T علاوه بر معادله‌ی بالا در معادله‌ی دایره هم صدق می‌کند:

$$x^۲+y^۲-۵x-۳y+۶=۰$$

$$x^۲+y^۲-۲x-۲y-۳=۰ \Rightarrow ۳x+y-۹=۰ \Rightarrow y=۹-۳x$$

$$\xrightarrow[\text{معادله دایره}]{\text{جایگذاری در}} x^۲+(۹-۳x)^۲-۲x-۲(۹-۳x)=۳$$

$$\Rightarrow ۱۰x^۲-۵۰x+۶۰=۰ \Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰$$

$$\Rightarrow (x-۲)(x-۳)=۰ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=۲ \Rightarrow y=۳ \Rightarrow m_{AT}=-\frac{۱}{۲} \\ \Rightarrow AT: y=-\frac{۱}{۲}x+۴ \\ x=۳ \Rightarrow y=۰ \Rightarrow m_{AT}=۲ \\ \Rightarrow AT: y=۲x-۶ \quad (\text{گزینه ۱}) \end{array}\right.$$

۱۳۴. ۱ ۲ **۳** ۴

باید وضعیت نسبی دو دایره را بدانیم:

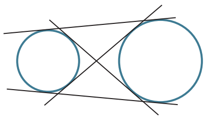
$$x^۲+y^۲+۳x+۱=۰$$

$$\Rightarrow O(-\frac{۳}{۲},۰)\ ,\ r=\frac{\sqrt{۹-۴}}{۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}\simeq ۱/۱$$

$$x^۲+y^۲-۴x+۱=۰$$

$$\Rightarrow O'(۲,۰)\ ,\ r'=\frac{\sqrt{۱۶-۴}}{۲}=\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$$

$$OO'=|۲-(-\frac{۳}{۲})|=\frac{۷}{۲}=۳/۵ \Rightarrow OO'>r+r'$$



دو دایره متخارج هستند، پس طبق شکل ۴ خط وجود دارد که بر هر دو دایره مماس‌اند.

در حالت‌های مماس خارج، متقاطع، مماس داخل و متداخل نیز تعداد مماس‌های مشترک به‌ترتیب ۳، ۲، ۱ و صفر است.

۱۳۵. ۱ **۲** ۳ ۴

در معادله‌ی دایره اولاً باید ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر باشند:

$$۳=\alpha^۲-۶ \Rightarrow \alpha^۲=۹ \Rightarrow \alpha=\pm ۳$$

حال باید $a^۲+b^۲-۴c>۰$ باشد:

$$\alpha=۳ \Rightarrow ۳x^۲+۳y^۲+۶x-۳=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۱=۰$$

$$\Rightarrow a^۲+b^۲-۴c=۴+۴>۰$$

$$\alpha=-۳ \Rightarrow ۳x^۲+۳y^۲+۶x+۳=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x+۱=۰$$

$$\Rightarrow a^۲+b^۲-۴c=۴-۴=۰$$

پس فقط $\alpha=۳$ صحیح است. در این صورت شعاع دایره $R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۸}}{۲}=\sqrt{۲}$ است.

۱۳۶. **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم اندازه‌ی خط مماس بر دایره‌ی $F(x,y)=۰$ از نقطه‌ی A برابر $F(A)$ است. اگر نقطه‌ی مورد نظر را $A(x,y)$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} F_۱=x^۲+y^۲-۴=۰ \\ F_۲=(x-۳)^۲+(y-۲)^۲-۱=۰ \end{array}\right. \Rightarrow F_۱=F_۲$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۴=(x-۳)^۲+(y-۲)^۲-۱$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۴=x^۲-۶x+۹+y^۲-۴y+۴-۱$$

$$\Rightarrow ۶x+۴y=۱۶ \Rightarrow ۳x+۲y=۸$$

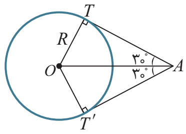
با توجه به این‌که نقطه روی خط $x+y=۴$ هم قرار دارد مختصات آن در معادله‌ی این خط صدق می‌کند:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=۴ \xrightarrow{\times ۲} ۲x+۲y=۸ \\ ۳x+۲y=۸ \rightarrow ۳x+۲y=۸ \end{array}\right. \Rightarrow x=۰ \Rightarrow y=۴$$

$$\Rightarrow A(۰,۴)$$

.۱۳۷ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به شکل زیر $\sin ۳۰^\circ=\frac{OT}{OA}=\frac{R}{OA}=\frac{۱}{۲}$ مرکز دایره نقطه‌ی $O(۱,-۲)$ است و شعاع آن برابر با:



$$R=\frac{\sqrt{۴+۱۶-۱۶}}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{R}{OA}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow OA=۲\Rightarrow \sqrt{(۳-۱)^۲+(a+۲)^۲}=۲$$

$$\Rightarrow ۴+(a+۲)^۲=۴\Rightarrow (a+۲)^۲=۰\Rightarrow a=-۲$$

.۱۳۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

ابتدا وضعیت این دو دایره را نسبت به هم مشخص می‌کنیم:

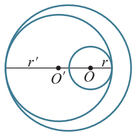
$C_۱:(x-۱)^۲+y^۲=۱\Rightarrow O(۱,۰)\,,\ r=۱$

$C_۲:(x-۳)^۲+y^۲=۲۵\Rightarrow O'(۳\,,۰)\,,\ r'=۵$

$OO'=۲\,,\ r+r'=۵\ ,\ |r-r'|=۴$

$\Rightarrow OO'<|r+r'|\Rightarrow$ دو دایره متداخل‌اند.

در حالی‌که دو دایره متداخل‌اند، بی‌شمار دایره بر هر دو دایره مماس‌اند که از بین آن‌ها بزرگ‌ترین دایره بر دایره کوچک و بزرگ مماس داخل است:



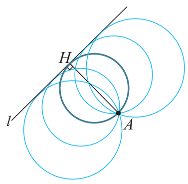
از شکل معلوم است که قطر دایره‌ی مورد نظر برابر است با:

$$۲R=r'+OO'+r=۵+۲+۱=۸$$

$$\Rightarrow R=۴$$

.۱۳۹ **۱** ۲ ۳ ۴

دایره‌هایی که از A می‌گذرند و بر خط مذکور مماس هستند، به شکل زیر هستند، که کوچک‌ترین آن‌ها دایره‌ای است که پاره‌خط AH قطر آن است.



پس فاصله‌ی A از خط مورد نظر را می‌یابیم:

$A(-۱,۲)\,,\ x+y+۵=۰$

$$\Rightarrow AH=\frac{|-۱+۲+۵|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}=۳\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow r=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

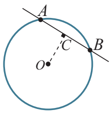
.۱۴۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

مرکز دایره نقطه‌ی $M(۳,-۱)$ است. پس همه‌ی وترهایی که از آن می‌گذرند برابر با قطر دایره است: $R=\frac{\sqrt{۳۶+۴-۴}}{۲}=۳\Rightarrow ۲R=۶$

.۱۴۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

راه‌حل اول: اگر وسط نقاط A و B را C در نظر بگیریم، می‌دانیم $x_C=\frac{x_A+x_B}{۲}$ پس سعی می‌کنیم طول نقطه‌ی C را بیابیم. ابتدا با استفاده از این‌که نقطه‌ی A روی خط و دایره قرار دارد، عرض آن و m را می‌یابیم

$$\left.\begin{matrix}۲y-x=m\\ x^۲+y^۲-۴x+۶y=۳۷\end{matrix}\right\}\xrightarrow{x=۱}۲y-۱=m\quad(*)$$



$$\Rightarrow ۱+y^۲-۴+۶y=۳۷\Rightarrow (y+۳)^۲=۴۹$$

$$\Rightarrow y+۳=\pm۷\Rightarrow y=۴ \ \text{یا}\ y=-۱۰$$

$$\xrightarrow{(*)}\begin{cases}m=۷\\ m=-۲۱\end{cases}\xrightarrow{m>۰}m=۷$$

$$\xrightarrow{\text{خط داده شده}}۲y-x=۷$$

حال خط OC عمود بر خط داده شده است، پس شیب آن (-۲) است و از مرکز دایره $O(۲,-۳)$ می‌گذرد، پس معادله‌ی آن به شکل زیر است:

$$y+۳=-۲(x-۲)\Rightarrow y=-۲x+۱$$

تقاطع خط حاصل با خط داده شده نقطه‌ی $(-۱,۳)$ است، پس $x_C=\frac{x_A+x_B}{۲}=-۱$ و از آن $x_B=-۳$ است.

راه‌حل دوم: بعد از به‌دست آوردن مقدار m، می‌توان خط و دایره را تقاطع داد:

$$۲y-x=۷\Rightarrow x=۲y-۷\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله دایره}}$$

$$(۲y-۷)^۲+y^۲-۴(۲y-۷)+۶y-۳۷=۰$$

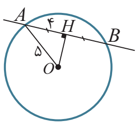
$$\Rightarrow ۴y^۲-۲۸y+۴۹+y^۲-۸y+۲۸+۶y-۳۷=۰$$

$$\Rightarrow ۵y^۲-۳۰y+۴۰=۰\Rightarrow y^۲-۶y+۸=۰$$

$$\Rightarrow (y-۲)(y-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}y=۲\Rightarrow x=-۳\\ y=۴\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

.۱۴۲ ۱ **۲** ۳ ۴

اگر طول وتری ۸ باشد، فاصله‌ی وسط آن از مرکز دایره را می‌توانیم به‌دست آوریم. با توجه به این‌که شعاع دایره ۵ است، از رابطه‌ی فیثاغورس $OH=۳$ است. پس فاصله‌ی مرکز این وترها از مرکز این دایره همیشه برابر ۳ است.

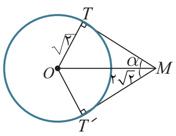


پس مکان هندسی این نقاط دایره‌ای به همین مرکز (یعنی $O(۰,۰)$) و شعاع ۳ واحد است:

$$x^۲+y^۲=۹$$

.۱۴۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

در شکل مقابل اگر شعاع دایره و فاصله‌ی نقطه‌ی M را از مرکز دایره بیابیم، داریم:



$$x^۲+y^۲-۴x=۰\Rightarrow O=(۲,۰)$$

$$\Rightarrow OM=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

$$r=\frac{\sqrt{۱۶-۰}}{۲}=۲$$

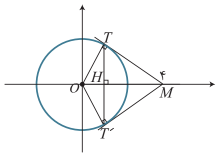
پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OTM داریم:

$$\sin\alpha=\frac{OT}{OM}=\frac{۲}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\alpha=۴۵^\circ\Rightarrow ۲\alpha=۹۰^\circ$$

.۱۴۴ **۱** ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: اگر نقطه‌های تماس را T و T' در نظر بگیریم، مطابق شکل

MT و MT' بر شعاع‌های OT و OT' عمودند. اگر مختصات T را به شکل $T(x, y)$ در نظر بگیریم، شیب خط OT برابر است با: $\frac{y}{x}$ و شیب خط MT برابر است با: $\frac{y-۰}{x-۴}$ پس حاصل‌ضرب این دو شیب باید منفی یک باشد:



$$\frac{y}{x}\times\frac{y}{x-۴}=-۱\Rightarrow\frac{y^۲}{x^۲-۴x}=-۱$$
$$\Rightarrow y^۲=۴x-x^۲$$
$$\Rightarrow y^۲+x^۲=۴x$$

با توجه به این‌که نقطه‌ی T روی دایره نیز قرار دارد، در معادله‌ی آن صدق می‌کند:

$$x^۲+y^۲=۴\Rightarrow ۴x=۴\Rightarrow x=۱\Rightarrow y=\pm\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow T(۱, \sqrt{۳})\ , T'(۱, -\sqrt{۳})\Rightarrow TT'=۲\sqrt{۳}$$

راه‌حل دوم: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OTM ، TH ارتفاع وارد بر وتر است:

$$TH=\frac{OT\times TM}{OM}=\frac{۲\times ۲\sqrt{۳}}{۴}=\sqrt{۳}\Rightarrow TT'=۲\sqrt{۳}$$

تذکر

مقدار TM را از رابطه‌ی فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:

$$TM=\sqrt{OM^۲-OT^۲}=\sqrt{۱۶-۴}=۲\sqrt{۳}$$

۱۴۵. (۱) **(۲)** (۳) (۴)

باید تقاطع دو دایره را بیابیم:

$$\left.\begin{array}{l} x^۲+y^۲-۳y=۰\\ x^۲+y^۲-۳x=۰\end{array}\right\}\Rightarrow ۳x-۳y=۰\Rightarrow x=y$$

حال $x=y$ را در یکی از معادلات جایگذاری می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲-۳y=۰\xrightarrow{x=y}۲x^۲-۳x=۰$$
$$\Rightarrow x(۲x-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=۰\\ y=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$
$$\xrightarrow{\text{نقاط تقاطع}}A(۰ , ۰)\ , B(\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۲})\Rightarrow AB=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۴۶. (۱) (۲) **(۳)** (۴)

دو دایره را تقاطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}x^۲+y^۲+۲x+۲y-۲۴=۰\\ x^۲+y^۲+۴x+۲y-۲۰=۰\end{cases}$$
$$\xrightarrow{\text{از هم کم کنیم}}۲x+۴=۰\Rightarrow x=-۲$$

با جایگذاری $x=-۲$ در یکی از معادلات داریم:

$$x^۲+y^۲+۲x+۲y-۲۴=۰\xrightarrow{x=-۲}$$
$$۴+y^۲-۴+۲y-۲۴=۰\Rightarrow y^۲+۲y-۲۴=۰$$
$$\Rightarrow(y+۶)(y-۴)=۰\Rightarrow y=۴, -۶$$

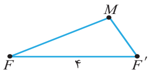
۱۴۷. (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$MA-MB=۲MA-۴\Rightarrow MA+MB=۴$$

مجموع فواصل M از دو نقطه‌ی A و B برابر ۴ است، پس M روی یک بیضی با کانون‌های A و B حرکت می‌کند.

۱۴۸. (۱) (۲) **(۳)** (۴)

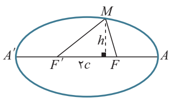
دو نقطه‌ی داده شده از هم ۴ واحد فاصله دارند $(FF'=۴)$. بنابراین اگر نقطه‌ای مثل M با شرایط مذکور در نظر بگیریم، چون مجموع هر دو ضلع مثلث از ضلع سوم بزرگ‌تر است، داریم:



$$MF+MF'>FF'\Rightarrow MF+MF'>۴$$

پس ممکن نیست نقطه‌ای داشته باشیم که مجموع فواصل آن از این دو نقطه ۳ واحد باشد.

۱۴۹. (۱) **(۲)** (۳) (۴)



محیط مثلث MFF' برابر است با:

$$MF+MF'+FF'=۲a+۲c=\text{ثابت}$$

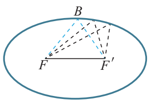
مساحت این مثلث برابر است با:

$$S=\frac{h\times ۲c}{۲}=hc$$

چون c ثابت است و با تغییر نقطه‌ی M ، مقدار h تغییر می‌کند، مساحت این مثلث متغیر است.

۱۵۰. (۱) (۲) (۳) **(۴)**

در بین مثلث‌های مختلف با شرایط گفته شده، همگی دارای قاعده‌ی یکسان $(۲c)$ هستند. پس بیش‌ترین مساحت مربوط به مثلثی است که بیش‌ترین ارتفاع را دارد. این در حالتی است که رأس دیگر نقطه‌ی B باشد و ارتفاع مثلث b باشد:



$$۲a=۴\Rightarrow a=۲$$
$$۲b=۲\Rightarrow b=۱$$
$$\Rightarrow c^۲=a^۲-b^۲=۴-۱=۳\Rightarrow c=\sqrt{۳}$$
$$S_{\max}=\frac{b\times ۲c}{۲}=bc=\sqrt{۳}$$

۱۵۱. (۱) **(۲)** (۳) (۴)

فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر را از دو کانون می‌یابیم:

$$MF=\sqrt{(۳-۲)^۲+(۵-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$
$$MF'=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۵-۴)^۲}=\sqrt{۱۷}$$

چون $MF+MF'>۲a$ است $(\sqrt{۱۷}+\sqrt{۵}>۲\sqrt{۵})$، پس نقطه‌ی مورد نظر خارج بیضی است.

۱۵۲. (۱) (۲) **(۳)** (۴)

با توجه به این‌که مرکز وسط دو کانون قرار دارد، کانون دیگر نقطه‌ی $F'(-۲, ۰)$ است. حاصل‌جمع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر $۲a$ است:

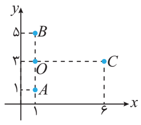
$$2a = MF + MF'$$
$$= \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} + \sqrt{(-2-1)^2 + (0-1)^2}$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{10}$$

۱۵۳. ۱ ۲ **۳** ۴

فاصله‌ی کانونی $FF' = 2c = 4$ است، پس $c = 2$ است. همچنین $2a = 6$ است، پس $a = 3$ است:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{5}$$

۱۵۴. ۱ ۲ ۳ **۴**



نقاط A و B هم طول هستند. پس طول مرکز هم ۱ است. در این صورت عرض آن باید با رأس دیگر یکسان باشد، پس مختصات مرکز $(1, 3)$ است. در این صورت $a = 5$ و $b = 2$ است:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$$

با توجه به این‌که بیضی افقی است، برای رسیدن به کانون‌ها از مرکز بیضی به اندازه‌ی c به چپ و راست حرکت می‌کنیم:

$$O(1, 3) \xrightarrow{\text{راست}} (1 + \sqrt{21}, 3)$$
$$O(1, 3) \xrightarrow{\text{چپ}} (1 - \sqrt{21}, 3)$$

۱۵۵. **۱** ۲ ۳ ۴

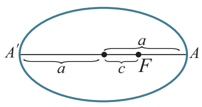
فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و A' برابر $2a = 6$ است، پس $a = 3$ است. همچنین مرکز بیضی وسط دو نقطه‌ی A و A' یعنی $O(\frac{3-3}{2}, \frac{1+1}{2}) = (0, 1)$ است:

$$2c = 2\sqrt{6} \Rightarrow c = \sqrt{6} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 6 = 3$$
$$\Rightarrow b = \sqrt{3}$$

چون A و A' هم‌عرض هستند، پس بیضی افقی است. بنابراین برای رسیدن به دو سر قطر کوچک باید از مرکز بیضی به اندازه‌ی b به بالا و پایین حرکت کنیم:

$$O(0, 1) \xrightarrow{\sqrt{3}\ \text{واحد بالا}} (0, 1 + \sqrt{3})$$
$$O(0, 1) \xrightarrow{\sqrt{3}\ \text{واحد پایین}} (0, 1 - \sqrt{3})$$

۱۵۶. ۱ ۲ **۳** ۴



دورترین و نزدیک‌ترین نقاط روی بیضی به یک کانون رئوس کانونی بیضی هستند، پس: $FA = 4$ و $FA' = 9$

$$\begin{cases} a + c = 9 \\ a - c = 4 \end{cases} \Rightarrow 2a = 13 \Rightarrow a = 6.5$$

$$\Rightarrow c = 2.5 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 42.25 - 6.25 = 36$$
$$\Rightarrow b = 6 \Rightarrow 2b = 12$$

تذکر

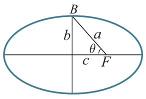
از مقادیر $a+c$ و $a-c$ مستقیماً می‌توان b^2 را محاسبه کرد:

$$(a + c)(a - c) = a^2 - c^2 = b^2$$
$$\Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow 2b = 12$$

۱۵۷. ۱ **۲** ۳ ۴

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$
$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2a}{2b} = \sqrt{2}$$

۱۵۸. **۱** ۲ ۳ ۴

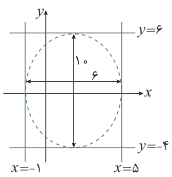


$$\cos\theta = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

۱۵۹. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$2b = 2c \Rightarrow b = c \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 2b^2$$
$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۱۶۰. **۱** ۲ ۳ ۴



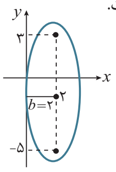
معلوم است که بیضی قائم است و در آن $2a = 10$ و $2b = 6$ است، پس $a = 5$ و $b = 3$ است:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{15}} = \frac{4}{5}$$

۱۶۱. **۱** ۲ ۳ ۴

$$2b = \frac{1}{2}(2c) \Rightarrow c = 2b \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 4b^2 = 5b^2$$
$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{5b^2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

۱۶۲. ۱ **۲** ۳ ۴



فاصله‌ی کانونی $2c = FF' = 8$ است، پس $c = 4$ است. همچنین با توجه به شکل مقدار $b = 2$ است:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 4 + 16 = 20$$
$$\Rightarrow a = 2\sqrt{5}$$
$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

۱۶۳. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$2a + 2b = 36 \Rightarrow a + b = 18 \qquad (*)$$
$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{3}{5} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{16}{25}$$
$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow b = \frac{4}{5}a$$
$$a + b = a + \frac{4}{5}a = 18 \Rightarrow \frac{9}{5}a = 18 \Rightarrow a = 10 \Rightarrow 2a = 20$$

۱۶۴. ۱ ۲ **۳** ۴

$۲b=۶$ است، پس $b=۳$ است. ضمناً $e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}=\frac{۴}{۵}$ است، پس:

$$۱-\frac{b^۲}{a^۲}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\frac{b^۲}{a^۲}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\frac{۹}{a^۲}=\frac{۹}{۲۵}$$
$$\Rightarrow a^۲=۲۵\Rightarrow a=۵$$

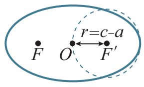
می‌دانیم $a^۲=b^۲+c^۲$، پس: $۲۵=۹+c^۲\Rightarrow c^۲=۱۶\Rightarrow c=۴$

از مرکز بیضی به اندازه‌ی c، بالا و پایین می‌رویم تا به کانون‌ها برسیم:

$$O(-۴,-۱)\xrightarrow{\text{بالا}}F(-۴,۳)$$
$$O(-۴,-۱)\xrightarrow{\text{پایین}}F(-۴,-۵)$$

۱۶۵. ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به شکل شعاع با c برابر است:



$$a-c=c\Rightarrow ۲c=a\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$$

۱۶۶. ۱ **۲** ۳ ۴

پاره خطی که در کانون بر قطر کانونی عمود است، دارای طول $\frac{b^۲}{a}$ است:

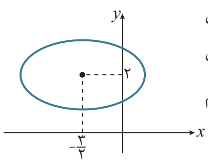
$$FM=\frac{b^۲}{a}=\frac{(۳)^۲}{۴}=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

۱۶۷. ۱ ۲ **۳** ۴

نقاطی که مجموع فواصل‌شان از دو نقطه‌ی داده شده برابر ۶ است، یک بیضی است که کانون‌های آن نقاط داده شده و $۲a=۶$ است. پس در واقع دنبال این هستیم بدانیم که بیضی مذکور محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کنند:

$$F(۱,۲),\ F'(-۴,۲)\Rightarrow FF'=۲c=۵\Rightarrow c=\frac{۵}{۲}$$
$$۲a=۶\Rightarrow a=۳\Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲=۹-\frac{۲۵}{۴}=\frac{۱۱}{۴}$$
$$\Rightarrow b=\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}\simeq ۱/۷$$

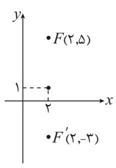
مرکز بیضی وسط دو کانون یعنی $O(-\frac{۳}{۲},۲)$ است و چون عرض دو کانون برابر است، بیضی افقی است. بیضی را رسم می‌کنیم:



دقت کنید که $b<۲$ است، پس بیضی محور xها را قطع نمی‌کند.

۱۶۸. **۱** ۲ ۳ ۴

فاصله‌ی دو خط قائم از هم ۶ واحد و فاصله‌ی دو خط افقی از هم ۱۰ واحد است. پس بیضی قائم و $۲a=۱۰$ و $۲b=۶$ است.



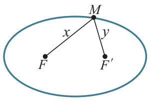
مرکز بیضی نقطه‌ی $O(\frac{۵-۱}{۲},\frac{۶-۴}{۲})$ یا $O(۲,۱)$ است.

$$c^۲=a^۲-b^۲=۲۵-۹=۱۶\Rightarrow c=۴$$

چون بیضی قائم است به اندازه‌ی c از مرکز بیضی، بالا و پایین می‌رویم تا به کانون‌ها برسیم. پس مختصات کانون‌ها نقاط $F(۲,۵)$ و $F'(۲,-۳)$ است.

۱۶۹. ۱ ۲ ۳ **۴**

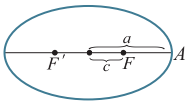
اگر $FM=x$ و $F'M=y$ بنامیم:



$$\begin{cases}x+y=۲a\\x-y=۲b\end{cases}\Rightarrow ۲x=۲a+۲b$$
$$\Rightarrow x=a+b\Rightarrow y=a-b$$
$$\Rightarrow xy=(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲=c^۲$$

۱۷۰. ۱ ۲ **۳** ۴

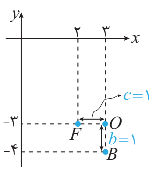
نزدیک‌ترین نقطه‌ی بیضی به کانون F، نقطه‌ی A است که فاصله‌ی آن‌ها از هم $a-c$ است: $a-c=۲$ (*)



$$۲b=\sqrt{۳۲}\Rightarrow b=۲\sqrt{۲}\Rightarrow b^۲=۸\Rightarrow a^۲-c^۲=۸$$
$$\Rightarrow (a-c)(a+c)=۸$$
$$\xrightarrow{(*)}۲(a+c)=۸\Rightarrow a+c=۴$$
$$\begin{cases}a-c=۲\\a+c=۴\end{cases}\Rightarrow ۲a=۶\Rightarrow a=۳\Rightarrow c=۱\Rightarrow ۲c=۲$$

۱۷۱. **۱** ۲ ۳ ۴

چون بیضی افقی است، مرکز آن با کانون هم‌عرض است و با رأس B، هم طول است. پس مرکز بیضی نقطه‌ی $(۳,-۳)$ است، بنابراین از شکل مشخص است که:



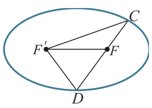
$$b=۱,c=۱\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲=۲\Rightarrow a=\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow ۲a=۲\sqrt{۲}$$

تذکر

دقت کنید که BF همان a است.

۱۷۲. ۱ ۲ ۳ **۴**

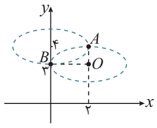
$$\text{محیط}\ \overset{\triangle}{F'CD}=F'C+F'D+CD$$
$$=\underbrace{F'C+CF}_{۲a}+\underbrace{F'D+FD}_{۲a}=۴a=۳۶\Rightarrow a=۹\quad(*)$$
$$\text{محیط}\ \overset{\triangle}{CFF'}=\underbrace{CF+CF'}_{۲a}+\underbrace{FF'}_{۲c}=۲a+۲c=۳۰$$



$$a+c=۱۵\xrightarrow{(*)}c=۶\Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲$$
$$=۸۱-۳۶=۴۵\Rightarrow b=۳\sqrt{۵}\Rightarrow ۲b=۶\sqrt{۵}$$

۱۷۳. **۱** ۲ ۳ ۴

طبق شکل مرکز نقطه‌ی $O(۲,۳)$ یا



$O(۰,۴)$ است و $b=۱$ و $a=۲$ ، پس:

$$c^۲=a^۲-b^۲=۴-۱=۳$$
$$\Rightarrow c=\sqrt{۳}\Rightarrow ۲c=۲\sqrt{۳}$$

.۱۷۴ ۱ ۲ ۳ ۴

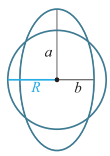
نقاطی که مجموع فواصل‌شان از دو نقطه مقدار ثابتی است، روی یک بیضی قرار دارند که دو نقطه‌ی ثابت کانون‌های آن هستند و عدد ثابت $۲a$ است، پس در واقع دنبال نقاط تقاطع بیضی و دایره مورد نظر هستیم.

$$F(۱,۳)\ ,\ F'(۱,-۱)\Rightarrow FF'=۴\Rightarrow c=۲$$
$$۲a=۵\Rightarrow a=\frac{۵}{۲}\Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲=\frac{۲۵}{۴}-۴=\frac{۹}{۴}\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

مرکز بیضی نیز وسط دو کانون است: $O(\frac{۱+۱}{۲},\frac{۳-۱}{۲})=O(۱,۱)$

دایره‌ی مورد نظر نیز دارای مرکز $O'(۱,۱)$ است:

$$(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=\frac{۷}{۲}\Rightarrow R=\sqrt{\frac{۷}{۲}}\simeq ۱/۹$$

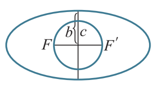


دایره و بیضی مورد نظر هم مرکز هستند و شعاع دایره از b بزرگ‌تر و از a کوچک‌تر است، پس دارای چهار نقطه‌ی تقاطع هستند.

.۱۷۵ ۱ ۲ ۳ ۴

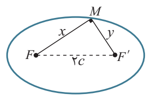
فاصله‌ی دو کانون از هم $FF'=۲c=۶$ است، پس $c=۳$ است. مجموع فواصل M از دو کانون برابر $۲a$ است، پس:

$$۲a=MF+MF=۸+۲=۱۰\Rightarrow a=۵$$
$$b^۲=a^۲-c^۲=۲۵-۹=۱۶\Rightarrow b=۴$$



چون $b>c$ است، دایره‌ای هم مرکز با بیضی و با شعاع c آن را قطع نمی‌کند.

.۱۷۶ ۱ ۲ ۳ ۴



برای راحتی اگر $MF=x$ و $MF'=y$ بنامیم، داریم $x+y=۲a$ است. ضمناً از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$x^۲+y^۲=۴c^۲\Rightarrow (x+y)^۲-۲xy=۴c^۲$$
$$\Rightarrow (۲a)^۲-۲xy=۴c^۲\Rightarrow ۴a^۲-۲xy=۴c^۲$$
$$\Rightarrow ۲xy=۴a^۲-۴c^۲\Rightarrow xy=۲(a^۲-c^۲)=۲b^۲$$

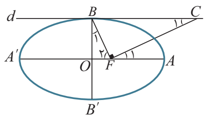
.۱۷۷ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $FM=\frac{b^۲}{a}$ است. اگر دو پاره‌خط OM و $A'B$ موازی باشند، مثلث‌های OFM و OBA' متشابه‌اند، پس:

$$\frac{FM}{OF}=\frac{OB}{A'O}\Rightarrow \frac{\frac{b^۲}{a}}{c}=\frac{b}{a}\Rightarrow b^۲=bc\Rightarrow b=c$$

.۱۷۸ ۱ ۲ ۳ ۴

از توازی d و قطر AA' داریم: $\hat{C}_۱=\hat{F}_۱$. ضمناً $\hat{F}_۱+\hat{F}_۲=۹۰^\circ$ و $\hat{F}_۲+\hat{B}_۱=۹۰^\circ$ است، پس $\hat{F}_۱=\hat{B}_۱$ و از آن می‌توان نتیجه گرفت: $\hat{C}_۱=\hat{B}_۱$. چون مثلث‌های BFC و OBF هر دو قائم‌الزاویه‌اند، پس با داشتن دو زاویه‌ی برابر متشابه‌اند:



$$\frac{CF}{BF}=\frac{OB}{OF}\Rightarrow \frac{CF}{a}=\frac{b}{c}$$
$$\Rightarrow CF=\frac{ab}{c}$$

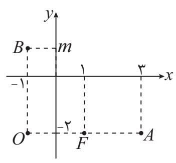
$$۲a=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}\Rightarrow a=\sqrt{۶}$$
$$۲b=۴\Rightarrow b=۲\Rightarrow c^۲=a^۲-b^۲=۶-۴=۲$$
$$\Rightarrow c=\sqrt{۲}\Rightarrow CF=\frac{۲\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۳}$$

.۱۷۹ ۱ ۲ ۳ ۴

دو بیضی می‌توان رسم کرد که در هر دو صورت افقی است. در یکی از دو حالت مختصات مرکز $O(۷,۴)$ است. در این صورت $OA=a=۴$ و $OB=b=۳$ است:

$$e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۱۶}}=\sqrt{\frac{۷}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

.۱۸۰ ۱ ۲ ۳ ۴

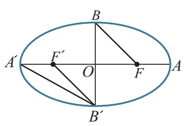


از شکل معلوم است که مرکز بیضی نقطه‌ی $O(-۱,-۲)$ است و $c=۲$ و $a=۴$ است. پس: $e=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$

.۱۸۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$OF=c$ و $OB=b$، پس: $S_{\overset{\Delta}{OBF}}=\frac{bc}{۲}$

$A'F'=a-c$ و $OB'=b$، پس: $S_{\overset{\Delta}{A'B'F'}}=\frac{b(a-c)}{۲}$



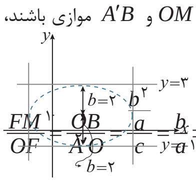
$$\frac{b(a-c)}{۲}=۶\times\frac{bc}{۲}$$
$$\Rightarrow a-c=۶c$$
$$\Rightarrow a=۷c\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۱}{۷}$$

.۱۸۲ ۱ ۲ ۳ ۴

فاصله‌ی دو سر قطر بزرگ از هم $AA'=۸$ است: $۲a=۸\Rightarrow a=۴$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow \frac{c}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow c=۲\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲=۱۶-۱۲=۴\Rightarrow b=۲$$

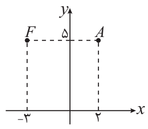
مرکز بیضی وسط پاره خط AA' یعنی نقطه‌ی $O(۲,۱)$ و چون رئوس کانونی عرض یکسانی دارند، بیضی افقی است. حال بیضی را رسم می‌کنیم:



خطوط افقی $y=۳$ و $y=-۱$ بر بیضی مماس هستند.

۱۸۳. ۱ ۲ **۳** ۴

دو حالت ممکن است اتفاق افتاده باشد: یکی این‌که A نزدیک‌ترین رأس به F باشد و حالت دیگر این‌که A دورترین رأس به F باشد:



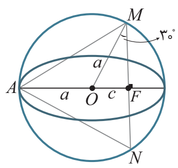
$$\text{حالت اول} \Rightarrow a-c=۵$$
$$\frac{c}{a}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \frac{c}{c+۵}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳c=۲c+۱۰$$
$$\Rightarrow c=۱۰\Rightarrow ۲c=۲۰$$
$$\text{حالت دوم} \Rightarrow a+c=۵$$
$$\frac{c}{a}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \frac{c}{۵-c}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳c=۱۰-۲c\Rightarrow ۵c=۱۰$$
$$\Rightarrow c=۲\Rightarrow ۲c=۴$$

۱۸۴. ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم $NP=\frac{۲b^۲}{a}$ و $MN=FF'=۲c$، پس مساحت مستطیل برابر است با: $S=\frac{۲b^۲}{a}\times ۲c=\frac{۴b^۲c}{a}$

$$۲a=۵\Rightarrow a=\frac{۵}{۲}$$
$$۲b=۳\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}\Rightarrow c^۲=a^۲-b^۲=\frac{۲۵}{۴}-\frac{۹}{۴}=\frac{۱۶}{۴}=۴$$
$$\Rightarrow c=۲$$
$$S=\frac{۴(\frac{۳}{۲})^۲\times ۲}{\frac{۵}{۲}}=\frac{۱۸}{\frac{۵}{۲}}=\frac{۳۶}{۵}$$

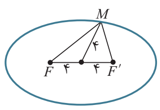
۱۸۵. **۱** ۲ ۳ ۴



شعاع دایره‌ی a است، پس $OA=OM=a$. مرکز دایره‌ی محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع محل برخورد عمودمنصف‌ها (و نیمسازها)ی آن است. پس $\hat{M}=۳۰^\circ$ و در مثلث OMF داریم:

$$\sin ۳۰^\circ=\frac{c}{a}\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow e=\frac{۱}{۲}$$

۱۸۶. ۱ ۲ **۳** ۴



$$۲a=۱۰,\ ۲b=۶\Rightarrow a=۵,\ b=۳$$
$$\Rightarrow c^۲=a^۲-b^۲=۲۵-۹=۱۶\Rightarrow c=۴$$

طبق شکل در مثلث MFF' میانه، نصف ضلع وارد بر آن است، پس این مثلث قائم‌الزاویه است.

۱۸۷. **۱** ۲ ۳ ۴

چون $۲a=۱۰$ و $۲b=۶$ است، داریم:

$$c^۲=a^۲-b^۲=۲۵-۹=۱۶\Rightarrow c=۴$$

چون در مثلث MFF' میانه، نصف ضلع وارد بر آن است، مثلث MFF' قائم‌الزاویه است و با توجه به توازی MF و NF'، زاویه‌ی $\hat{F}'=۹۰^\circ$ است. می‌دانیم اگر خطی بر بیضی مماس باشد، $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$ است، پس $\hat{M}_۱=\hat{N}$ چرا که $\hat{M}_۲=\hat{N}$ است (توازی MF و NF')، بنابراین هر دو $\hat{M}_۱=\hat{N}=۴۵^\circ$ هستند.

در مثلث قائم‌الزاویه MFF'، اگر $MF'=x$ بنامیم، $MF=۱۰-x$ است، حال رابطه‌ی فیثاغورس را می‌نویسیم:

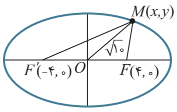
$$x^۲+(۱۰-x)^۲=۸^۲\Rightarrow x^۲+۱۰۰+x^۲-۲۰x=۶۴$$
$$\Rightarrow ۲x^۲-۲۰x+۳۶=۰\Rightarrow x^۲-۱۰x+۱۸=۰\Rightarrow \Delta=۲۸$$
$$\Rightarrow x=\frac{۱۰\pm ۲\sqrt{۷}}{۲}=۵\pm\sqrt{۷}\Rightarrow \begin{cases} MF'=۵+\sqrt{۷} \\ MF'=۵-\sqrt{۷} \end{cases}$$
$$MN=\sqrt{۲}MF'=\sqrt{۲}(۵\pm\sqrt{۷})=۵\sqrt{۲}\pm\sqrt{۱۴}$$

۱۸۸. **۱** ۲ ۳ ۴

چون $۲b=۶$ و $۲a=۱۰$ است، داریم:

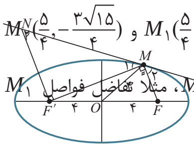
$$c^۲=a^۲-b^۲=۲۵-۹=۱۶\Rightarrow c=۴$$

پس مرکز را روی مبدأ مختصات و کانون‌های $(۴,۰)$ و $(-۴,۰)$ در نظر می‌گیریم.



$$OM=\sqrt{۱۰}\Rightarrow \sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow x^۲+y^۲=۱۰\ (*)$$
$$MF+MF'=۲a$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-۴)^۲+y^۲}+\sqrt{(x+۴)^۲+y^۲}=۱۰$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^۲+y^۲-۸x+۱۶}+\sqrt{x^۲+y^۲+۱۶+۸x}=۱۰$$
$$\xrightarrow{(*)}\sqrt{۲۶-۸x}+\sqrt{۲۶+۸x}=۱۰$$
$$\Rightarrow \sqrt{۲۶+۸x}=۱۰-\sqrt{۲۶-۸x}$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲۶+۸x=۱۰۰+۲۶-۸x-۲۰\sqrt{۲۶-۸x}$$
$$\Rightarrow ۲۰\sqrt{۲۶-۸x}=۱۰۰-۱۶x\Rightarrow ۵\sqrt{۲۶-۸x}=۲۵-۴x$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲۵(۲۶-۸x)=۶۲۵+۱۶x^۲-۲۰۰x$$
$$\Rightarrow ۱۶x^۲=۲۵\Rightarrow x^۲=\frac{۲۵}{۱۶}\Rightarrow x=\pm\frac{۵}{۴}$$
$$\xrightarrow{(*)} y^۲=۱۰-\frac{۲۵}{۱۶}=\frac{۱۳۵}{۱۶}\Rightarrow y=\pm\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$$

پس چهار نقطه با این ویژگی داریم: $M_۱(\frac{۵}{۴},\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴})$ و $M_۲(\frac{۵}{۴},-\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴})$ و $M_۳(-\frac{۵}{۴},\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴})$ و $M_۴(-\frac{۵}{۴},-\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴})$، مثلاً تفاضل فواصل $M_۱$ از دو کانون برابر است با:



$$M_۱F=\sqrt{\frac{۱۲۱}{۱۶}+\frac{۱۳۵}{۱۶}}=\sqrt{\frac{۲۵۶}{۱۶}}=۴$$

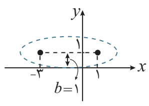
$$M_۱F'=\sqrt{\frac{۴۴۱}{۱۶}+\frac{۱۳۵}{۱۶}}=\sqrt{\frac{۵۷۶}{۱۶}}=۶$$

$$\Rightarrow M_۱F'-M_۱F=۶-۴=۲$$

۱۸۹. ۱ ۲ **۳** ۴

از شکل معلوم است که $b=۱$ واحد است.

همچنین فاصله‌ی کانونی $۲c=۴$ واحد است:



$$c=۲\ ,\ b=۱\ ,\ a^۲=b^۲+c^۲=۱+۴=۵$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{۵}\Rightarrow ۲a=۲\sqrt{۵}$$

۱۹۰. ۱ ۲ **۳** ۴

فاصله‌ی کانونی $FF'=۲c=۶$ است، پس $c=۳$ است. مجموع فواصل M از دو کانون برابر با $۲a$ است:

$$۲a=MF+MF'$$

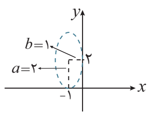
$$\Rightarrow ۲a=\sqrt{(۳+۵)^۲+۰}+\sqrt{(-۵+۳)^۲+۰}=۱۰$$

$$\Rightarrow a=۵\Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲=۲۵-۹=۱۶\Rightarrow b=۴$$

$$\Rightarrow ۲b=۸$$

۱۹۱. **۱** ۲ ۳ ۴

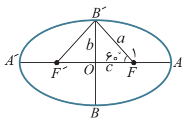
طبق شکل $a=۲$ و $b=۱$ است:



$$e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱-\frac{۱}{۴}}=\sqrt{\frac{۳}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۹۲. ۱ ۲ **۳** ۴

چون مثلث BFF' متساوی‌الاضلاع است، $\hat{F}=۶۰^\circ$ است و از آن داریم:



$$\cos ۶۰^\circ=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$$

۱۹۳. ۱ ۲ ۳ **۴**

فاصله‌ی کانون از دورترین رأس به آن برابر $a+c$ و فاصله‌ی آن از نزدیک‌ترین رأس به آن، $a-c$ است:

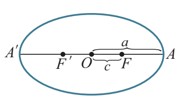
$$a+c=۳(a-c)\Rightarrow a+c=۳a-۳c$$

$$\Rightarrow ۴c=۲a\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$$

۱۹۴. **۱** ۲ ۳ ۴

فاصله‌ی کانون از نزدیک‌ترین رأس بیضی $a-c$ است. پس:

$$a-c=۲\qquad(*)$$



همچنین: $۲b=۴\sqrt{۲}\Rightarrow b=۲\sqrt{۲}\Rightarrow b^۲=۸$

$$\Rightarrow a^۲-c^۲=۸\Rightarrow(a-c)(a+c)=۸$$

$$\xrightarrow{(*)}(۲)(a+c)=۸\Rightarrow a+c=۴$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-c=۲\\a+c=۴\end{cases}\Rightarrow ۲a=۶\Rightarrow a=۳,c=۱$$

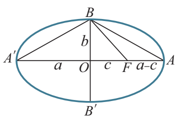
$$\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۳}$$

۱۹۵. **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $e=\frac{c}{a}$ است. اگر فاصله‌ی کانونی را نصف کنیم، صورت کسر نصف شده است، پس خروج از مرکز نصف می‌شود. همچنین با دو برابر کردن قطر بزرگ مخرج کسر هم دو برابر شده و دوباره کسر نصف می‌شود. پس در نهایت خروج از مرکز $\frac{۱}{۴}$ برابر می‌شود.

۱۹۶. ۱ **۲** ۳ ۴

ارتفاع هر دو مثلث b است:



$$S_{ABF}=\frac{b(a-c)}{۲}\ ,\ S_{BFA'}=\frac{b(a+c)}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{b(a+c)}{۲}=۳\times\frac{b(a-c)}{۲}\Rightarrow a+c=۳a-۳c$$

$$\Rightarrow ۲a=۴c\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$$

۱۹۷. ۱ **۲** ۳ ۴

باید فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مذکور برابر با شعاع دایره باشد:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+a=۰$$

$$\Rightarrow O(۱,-۲)\ ,\ R=\frac{\sqrt{۴+۱۶-۴a}}{۲}=\sqrt{۵-a}$$

$$O(۱,-۲)\ ,\ x+۳y=۰\Rightarrow\frac{|۱+۳(-۲)|}{\sqrt{۱^۲+۳^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۵-a}=\frac{۵}{\sqrt{۱۰}}\Rightarrow ۵-a=\frac{۲۵}{۱۰}\Rightarrow a=۲/۵$$

۱۹۸. **۱** ۲ ۳ ۴

باید ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ یکی باشند و $a^۲+b^۲-۴c>۰$ باشد:

$$a^۲-۷=۲\Rightarrow a^۲=۹\Rightarrow a=\pm۳$$

$$a=۳\Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۴y+۳=۰\Rightarrow x^۲+y^۲+۲y+\frac{۳}{۲}=۰$$

$\Rightarrow a^۲+b^۲-۴c=۴-۴(\frac{۳}{۲})=-۲<۰\Rightarrow$ قابل قبول نیست

$$a=-۳\Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۴y-۳=۰\Rightarrow x^۲+y^۲+۲y-\frac{۳}{۲}=۰$$

$\Rightarrow a^۲+b^۲-۴c=۴-۴(-\frac{۳}{۲})=۱۰>۰\Rightarrow$ صحیح است

۱۹۹. **۱** ۲ ۳ ۴

شعاع دایره فاصله‌ی مرکز دایره از خط مذکور است:

$$O(۲,۰)\ ,\ y-x=۰\Rightarrow\frac{|۰-۲|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}}(x-۲)^۲+(y-۰)^۲=۲$$

$$\xrightarrow{y=۱}(x-۲)^۲+۱=۲\Rightarrow(x-۲)^۲=۱$$

$$\Rightarrow x-۲=\pm۱\Rightarrow x=۳,۱$$

۲۰۰. ۱ **۲** ۳ ۴

نقطه‌ی داده شده در ناحیه‌ی اول است، پس دایره در ناحیه‌ی اول بر محورهای مختصات مماس است. بنابراین معادله‌ی آن به شکل زیر است:

$$(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$$

$$\xrightarrow{(2\,,\,1)\in \text{دایره}}(2-R)^2+(1-R)^2=R^2$$

$$\Rightarrow 4+R^2-4R+1+R^2-2R=R^2$$

$$\Rightarrow R^2-6R+5=0\Rightarrow (R-1)(R-5)=0\Rightarrow R=1,\,5$$

۲۰۱. **۱** ۲ ۳ ۴

$$x^2+y^2-2x+6y-8=0$$

$$\Rightarrow O(1,-3), r=\frac{\sqrt{4+36+32}}{2}=3\sqrt{2}$$

$$x^2+y^2+8x-4y+12=0$$

$$\Rightarrow O'(-4,2)\;,\; r'=\frac{\sqrt{64+16-48}}{2}=2\sqrt{2}$$

$$OO'=\sqrt{(1+4)^2+(-3-2)^2}=5\sqrt{2}$$

چون $r+r'=OO'$ است، دو دایره مماس خارج هستند.

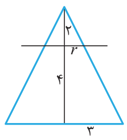
۲۰۲. ۱ **۲** ۳ ۴

تمام خطوط قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرند، پس مرکز دایره نقطه‌ی $O(-2,1)$ است و شعاع آن فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس بر آن است:

$$O(-2,1)\;,y-x+1=0\Rightarrow \frac{|1-(-2)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

۲۰۳. **۱** ۲ ۳ ۴

طبق قضیه‌ی تالس داریم:

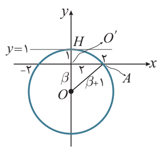


$$\frac{r}{3}=\frac{2}{6}\Rightarrow r=1$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(1)^2\times 2=\frac{2\pi}{3}$$

۲۰۴. ۱ ۲ **۳** ۴

شعاع دایره $\beta+1$ است. با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث $OO'A$ داریم:



$$\beta^2+2^2=(\beta+1)^2$$

$$\Rightarrow \beta^2+4=\beta^2+2\beta+1$$

$$\Rightarrow 2\beta=3\Rightarrow \beta=\frac{3}{2}$$

پس شعاع دایره $\frac{5}{2}$ است.

۲۰۵. **۱** ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس بر آن برابر شعاع دایره است، پس فاصله‌ی مرکز آن $O(-1,b)$ از دو خط با هم برابرند:

$$y-x=0$$
$$y-x-4=0$$

$$O(-1,b)\Rightarrow R=\frac{|b+1|}{\sqrt{2}}=\frac{|b+1-4|}{\sqrt{2}}\Rightarrow |b+1|=|b-3|$$

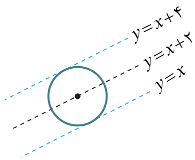
$$\Rightarrow\begin{cases} b+1=b-3\Rightarrow 1=-3 \;\; \times \\ b+1=3-b\Rightarrow 2b=2\Rightarrow b=1\end{cases}$$

پس مرکز دایره $(-1,1)$ است و شعاع آن برابر با $R=\sqrt{2}$ است. بنابراین معادله‌ی دایره به شکل زیر است:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2x-2y+1+1-2=0$$

راه‌حل دوم: دقت کنید که خطوط $y=x$ و $y=x+4$ موازی‌اند. پس مرکز دایره روی خطی موازی آن‌ها و به فاصله‌ی برابر از آن‌ها قرار دارد. این خط $y=x+2$ است که عرض از مبدأ آن میانگین عرض از مبدأ دو خط داده شده است. حال $x=-1$ را در این معادله قرار می‌دهیم:



$$y=x+2\xrightarrow{x=-1}y=1$$
$$\Rightarrow O(-1,\,1)$$

شعاع دایره نیز فاصله‌ی بین خطوط موازی $y=x$ و $y=x+2$ است:

$$\begin{matrix} y-x=0 \\ y-x-2=0\end{matrix}\;\Rightarrow\; R=\frac{|-2-0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

۲۰۶. ۱ ۲ ۳ **۴**

دو دایره مماس خارج هستند اگر رابطه‌ی $OO'=r+r'$ در آن‌ها برقرار باشد:

$$x^2+y^2-2x+8y+a=0$$

$$\Rightarrow O(1\,,-4)\;\;,\; r=\frac{\sqrt{4+64-4a}}{2}=\sqrt{17-a}$$

$$x^2+y^2+4x=0\Rightarrow O'(-2\,,\,0)\;\;,\; r'=\frac{\sqrt{16-0}}{2}=2$$

$$OO'=\sqrt{(1+2)^2+(-4-0)^2}=5$$

$$OO'=r+r'\Rightarrow 5=2+\sqrt{17-a}$$

$$\Rightarrow\sqrt{17-a}=3\Rightarrow 17-a=9\Rightarrow a=8$$

۲۰۷. ۱ **۲** ۳ ۴

چون دایره از نقطه‌ی $(-1,2)$ گذشته در ناحیه‌ی دوم بر محورهای مختصات مماس است. پس معادله‌ی آن به شکل زیر است:

$$(x+R)^2+(y-R)^2=R^2$$

$$\xrightarrow{(-1\,,\,2)\in \text{دایره}}(-1+R)^2+(2-R)^2=R^2$$

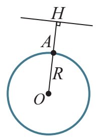
$$\Rightarrow R^2-2R+1+R^2-4R+4=R^2$$

$$\Rightarrow R^2-6R+5=0\Rightarrow (R-1)(R-5)=0$$

$$\Rightarrow R=1\,,\,5\Rightarrow 2R=2,\,10$$

۲۰۸. ۱ ۲ ۳ ۴

مشخص است که دایره‌ی داده شده، خط مذکور را قطع نمی‌کند، چرا که در غیر این صورت کم‌ترین فاصله‌ی آن از خط صفر بود. پس ما به دنبال فاصله‌ی AH هستیم که در آن:



$$AH = OH - R$$

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y-۴=۰$$

$$\Rightarrow O(۱,-۲)\ ,\ R=\frac{\sqrt{۴+۱۶+۱۶}}{۲}=۳$$

$$۳x+۴y-۱۵=۰ \Rightarrow OH=\frac{|۳(۱)+۴(-۲)-۱۵|}{\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

$$\Rightarrow AH=۴-۳=۱$$

۲۰۹. ۱ ۲ ۳ ۴

چون مرکز دایره روی همه‌ی قطرهای آن قرار دارد، پس روی خط $x-y=۲$ نیز قرار دارد. پس مختصات آن را به شکل $O(x,\ x-۲)$ در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی مرکز دایره از تمام نقاط روی دایره برابر شعاع دایره است. پس:

$$O(x,\ x-۲)\ ,\ A(۳,۰)\ ,\ B(۰,۱)$$

$$R=OA=OB$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{(x-۳)^{۲}+(x-۲)^{۲}}=\sqrt{(x-۰)^{۲}+(x-۲-۱)^{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^{۲}-۶x+۹+x^{۲}-۴x+۴=x^{۲}+x^{۲}-۶x+۹$$

$$\Rightarrow ۴x=۴ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow O(۱,-۱)$$

$$\Rightarrow R=OA=\sqrt{(۱-۳)^{۲}+(۱-۲)^{۲}}=\sqrt{۵}$$

۲۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: معادله‌ی دایره را به شکل $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ در نظر می‌گیریم و مختصات سه نقطه را در آن قرار می‌دهیم:

$$(۰,۰) \Rightarrow c=۰$$

$$\left.\begin{array}{l}(۲,۱) \Rightarrow ۴+۱+۲a+b+c=۰\\ (-۲,۴) \Rightarrow ۴+۱۶-۲a+۴b+c=۰\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{c=۰} \begin{cases} ۲a+b=-۵\\ -۲a+۴b=-۲۰\end{cases} \Rightarrow ۵b=-۲۵$$

$$b=-۵ \Rightarrow a=۰ \xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} x^{۲}+y^{۲}-۵x=۰$$

$$\Rightarrow R=\frac{\sqrt{۲۵-۰}}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

راه‌حل دوم: سه نقطه‌ی داده شده، مربوط به یک مثلث قائم‌الزاویه هستند.

$$A(۰,۰)$$

$$B(۲,۱) \Rightarrow AB=\sqrt{۵}\ ,\ AC=\sqrt{۲۰}\ ,\ BC=۵$$

$$C(-۲,۴)$$

$$\Rightarrow AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲}$$

پس BC وتر مثلث قائم الزاویه‌ی ABC است. دایره‌ی مورد نظر سؤال همان دایره محیطی مثلث است که در مثلث قائم الزاویه، شعاع آن نصف وتر مثلث یعنی $R=\frac{۵}{۲}$ است.

۲۱۱. ۱ ۲ ۳ ۴

باید فاصله‌ی مرکز دایره از خط داده شده برابر با شعاع دایره باشد:

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x-۳=۰ \Rightarrow O(۱,۰)\ ,\ r=\frac{\sqrt{۴+۱۲}}{۲}=۲$$

$$y-mx-۲=۰ \Rightarrow OH=\frac{|۰-m-۲|}{\sqrt{۱+m^{۲}}}=\frac{|m+۲|}{\sqrt{۱+m^{۲}}}$$

$$\Rightarrow OH=R \Rightarrow \frac{|m+۲|}{\sqrt{۱+m^{۲}}}=۲ \Rightarrow |m+۲|=۲\sqrt{۱+m^{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} m^{۲}+۴m+۴=۴m^{۲}+۴$$

$$\Rightarrow ۳m^{۲}-۴m=۰ \Rightarrow m(۳m-۴)=۰ \Rightarrow m=۰\ ,\ \frac{۴}{۳}$$

۲۱۲. ۱ ۲ ۳ ۴

چون مرکز دایره روی نیم‌ساز ناحیه‌ی اول است، مختصات آن را به شکل $O(x,x)$ ، $x>۰$ در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی مرکز دایره از هر نقطه روی آن و همچنین فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس بر آن برابر با شعاع دایره است:

$$O(x,x),\ A(۶,۳) \Rightarrow R=OA=\sqrt{(x-۶)^{۲}+(x-۳)^{۲}}$$

$$O(x,x)\ ,\ y-۲x=۰$$

$$\Rightarrow R=OH=\frac{|x-۲x|}{\sqrt{۱^{۲}+(-۲)^{۲}}}=\frac{|x|}{\sqrt{۵}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow OH=OA \Rightarrow \sqrt{(x-۶)^{۲}+(x-۳)^{۲}}=\frac{|x|}{\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۱۲x+۳۶+x^{۲}-۶x+۹=\frac{x^{۲}}{۵}$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}-۱۸x+۴۵=\frac{x^{۲}}{۵} \Rightarrow ۱۰x^{۲}-۹۰x+۲۲۵=x^{۲}$$

$$\Rightarrow ۹x^{۲}-۹۰x+۲۲۵=۰ \Rightarrow x^{۲}-۱۰x+۲۵=۰$$

$$\Rightarrow (x-۵)^{۲}=۰ \Rightarrow x=۵ \xrightarrow{(*)} R=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

۲۱۳. ۱ ۲ ۳ ۴

فاصله‌ی مرکز دایره از هر خط مماس بر آن، برابر با شعاع دایره است:

$$M(۲\sqrt{۵},b)\ ,\ y-۲x=۰ \Rightarrow R=\frac{|b-۴\sqrt{۵}|}{\sqrt{۱+۴}} \quad (*)$$

$$M(۲\sqrt{۵},b)\ ,\ x-۲y=۰ \Rightarrow R=\frac{|۲\sqrt{۵}-۲b|}{\sqrt{۱+۴}}$$

$$\Rightarrow |b-۴\sqrt{۵}|=|۲\sqrt{۵}-۲b|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-۴\sqrt{۵}=۲\sqrt{۵}-۲b \Rightarrow ۳b=۶\sqrt{۵} \Rightarrow b=۲\sqrt{۵}\\ \xrightarrow{(*)} R=۲\\ b-۴\sqrt{۵}=۲b-۲\sqrt{۵} \Rightarrow b=-۲\sqrt{۵} \xrightarrow{(*)} R=۶\end{cases}$$

۲۱۴. ۱ ۲ ۳ ۴

دو سر قطر بزرگ، هم‌طول هستند، پس بیضی قائم است و مرکز آن وسط

دو رأس آن است: $O(\frac{۳+۳}{۲},\frac{۶-۲}{۲})=O(۳,۲)$

ضمناً فاصله‌ی دو رأس از هم برابر با $۲a$ است، پس: $۶-(-۲)=۲a$ یعنی $a=۴$ است. از طرفی $\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$ است، پس:

$$\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{c}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow c=۲$$

حال مختصات کانون‌ها را می‌یابیم. کافیست از مرکز به اندازه‌ی ۲ واحد بالا و پایین برویم: $F(۳,۴)\,,\,F'(۳,۰)$

حال فرض کنیم بیضی در نقطه‌ی $M(x,۰)$ محور xها را قطع کند. باید جمع فاصله‌ی آن از دو کانون برابر $۲a$ باشد:

$$MF+MF'=۲a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲+(۰-۴)^۲}+\sqrt{(x-۳)^۲+۰^۲}=۸$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^۲-۶x+۹+۱۶}+|x-۳|=۸$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^۲-۶x+۲۵}=۸-|x-۳|$$

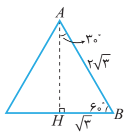
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲-۶x+۲۵=۶۴+x^۲-۶x+۹-۱۶|x-۳|$$

$$\Rightarrow ۱۶|x-۳|=۴۸$$

$$\Rightarrow |x-۳|=۳\Rightarrow \begin{cases} x-۳=۳\Rightarrow x=۶\\ x-۳=-۳\Rightarrow x=۰\end{cases}$$

۲۱۵. ۱ ۲ ۳ ۴

با دوران شکل حول محور AH یک مخروط ایجاد می‌شود که یک کره از آن خارج شده است. ابتدا حجم مخروط را محاسبه می‌کنیم. در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع نیمساز هم است. پس زاویه‌ی $\hat{A}=۳۰^\circ$ است، و ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰° در مثلث قائم الزاویه نصف وتر است. پس $HB=\sqrt{۳}$.



همچنین $\sin ۶۰^\circ=\frac{AH}{AB}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{AH}{۲\sqrt{۳}}\Rightarrow AH=۳$$

حجم مخروط:

$$V=\frac{\pi}{۳}r^۲h=\frac{\pi}{۳}(HB)^۲(AH)=\frac{\pi}{۳}(\sqrt{۳})^۲(۳)=۳\pi$$

حال حجم کره را محاسبه می‌کنیم. دایره‌ی مورد نظر، دایره‌ی محاطی مثلث است که شعاع آن $R=\frac{S}{P}$ است که در آن S مساحت و P نصف محیط مثلث است:

$$R=\frac{S}{P}=\frac{\frac{۳\times ۲\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۳(۲\sqrt{۳})}{۲}}=۱$$

$$\text{حجم کره}=\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۴}{۳}\pi(۱)^۳=\frac{۴}{۳}\pi$$

پس حجم شکل حاصل برابر است با: $۳\pi-\frac{۴}{۳}\pi=\frac{۵\pi}{۳}$

۲۱۶. ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: معادله‌ی دایره را به شکل $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ در نظر می‌گیریم و مختصات سه نقطه را در آن قرار می‌دهیم:

$$(۰,۰)\Rightarrow c=۰$$

$$(۲,۱)\Rightarrow ۴+۱+۲a+b+c=۰\xrightarrow{c=۰}۲a+b=-۵$$

$$(۱,-۲)\Rightarrow ۱+۴+a-۲b+c=۰\xrightarrow{c=۰}a-۲b=-۵$$

$$\Rightarrow ۲a-۴b=-۱۰\Rightarrow ۵b=۵\Rightarrow b=۱\Rightarrow a=-۳$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} x^۲+y^۲-۳x-۱y=۰$$

$$\Rightarrow R=\frac{\sqrt{۹+۱-۰}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

راه‌حل دوم: مثلثی که با سه نقطه‌ی داده شده ساخته می‌شود، قائم الزاویه است، چون طول اضلاع آن در رابطه‌ی فیثاغورس صدق می‌کند:

$$A(۰,۰)\,,\,B(۲,۱)\,,\,C(۱,-۲)$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{۵}\,,\quad AC=\sqrt{۵}\,,\quad BC=\sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow BC^۲=AB^۲+BC^۲$$

پس BC وتر مثلث قائم الزاویه‌ی ABC است و در مثلث قائم الزاویه شعاع دایره‌ی محیطی نصف طول وتر است، یعنی $R=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

۲۱۷. ۱ ۲ ۳ ۴

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$$

$$\Rightarrow O(۱,-۲)\,,\,r=\frac{\sqrt{۴+۱۶-۴}}{۲}=۲$$

$$O'(-۲,۲)\,,\,r'=?$$

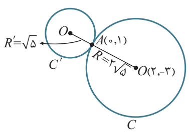
$$OO'=\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۲-۲)^۲}=۵$$

اگر دو دایره مماس خارج باشند، رابطه‌ی $OO'=r+r'$ بین آن‌ها برقرار است:

$$۵=۲+r'\Rightarrow r'=۳$$

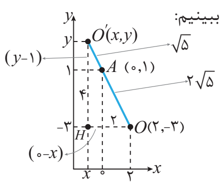
۲۱۸. ۱ ۲ ۳ ۴

تمام قائم‌های بر دایره از مرکز آن می‌گذرند، پس مرکز دایره‌ی C نقطه‌ی $O(۲,-۳)$ است و از فاصله‌ی OA شعاع دایره‌ی C برابر است با:



$$R=OA=\sqrt{۲^۲+(-۴)^۲}=۲\sqrt{۵}$$

حال اگر خط‌المرکزین OO' را جداگانه ببینیم:



با نوشتن دو بار قضیه‌ی تالس در مثلث $OO'H$:

$\frac{۲\sqrt{۵}}{۳\sqrt{۵}}=\frac{۲}{۲-x}\Rightarrow ۲-x=۳\Rightarrow x=-۱$

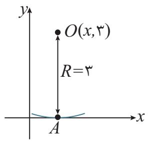
$\frac{\sqrt{۵}}{۳\sqrt{۵}}=\frac{y-۱}{y-۱+۴}\Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{y-۱}{y+۳}\Rightarrow y+۳=۳y-۳$

$\Rightarrow ۲y=۶\Rightarrow y=۳$

۲۱۹. **۱** ۲ ۳ ۴

باید توجه به شکل مختصات مرکز را می‌توان $O(x,۳)$ در نظر گرفت که فاصله‌ی آن از خط داده شده باید برابر با شعاع باشد:

$O(x,۳)\,,\ ۳x+۴y=۰$



$\Rightarrow OH=R\Rightarrow \frac{|۳x+۱۲|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=۳$

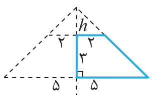
$\Rightarrow |۳x+۱۲|=۱۵$

$\Rightarrow\begin{cases}۳x+۱۲=۱۵\Rightarrow x=۱\\ ۳x+۱۲=-۱۵\Rightarrow x=-۹\end{cases}$

چون مرکز دایره در ناحیه‌ی اول است، $x>۰$ است، پس $x=۱$ صحیح است. نقطه‌ی مشترک دایره با محور xها نقطه‌ی A است که هم طول با مرکز دایره است: $A(۱,۰)$

۲۲۰. ۱ ۲ **۳** ۴

با دوران ذوزنقه حول ساق قائم، مخروطی ایجاد می‌شود که مخروط کوچک‌تری از آن جدا شده است. از قضیه‌ی تالس داریم:



$\frac{h}{h+۳}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۲h+۶=۵h$

$\Rightarrow ۳h=۶\Rightarrow h=۲$

$V-V'=\frac{۱}{۳}\pi(۵)^۲(۳+h)-\frac{۱}{۳}\pi(۲)^۲(h)$

$=\frac{۱۲۵\pi}{۳}-\frac{۸\pi}{۳}=\frac{۱۱۷\pi}{۳}=۳۹\pi$

۲۲۱. ۱ ۲ **۳** ۴

چون نقطه‌ی $(۲,-۹)$ در ناحیه‌ی چهارم است، پس دایره‌ی مذکور در ناحیه‌ی چهارم بر محورهای مختصات مماس است. دایره‌ای که در ناحیه‌ی چهارم بر محورهای مختصات مماس است دارای معادله‌ی زیر است:

$(x-R)^۲+(y+R)^۲=R^۲$

$\xrightarrow{(۲,-۹)\in \text{دایره}}(۲-R)^۲+(-۹+R)^۲=R^۲$

$\Rightarrow R^۲-۴R+۴+R^۲-۱۸R+۸۱=R^۲$

$\Rightarrow R^۲-۲۲R+۸۵=۰\Rightarrow (R-۵)(R-۱۷)=۰$

$\Rightarrow R=۵\,,۱۷$

۲۲۲. **۱** ۲ ۳ ۴

فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس بر آن برابر با شعاع دایره است:

$O(۲,-۱)\,,\ x-y-۱=۰$

$\Rightarrow R=\frac{|۲+۱-۱|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$

حال فرض کنیم دایره‌ی داده شده در نقطه‌ی $A(x,۰)$ محور xها را قطع کند. در این صورت فاصله‌ی مرکز دایره از هر نقطه روی آن برابر شعاع است، پس:

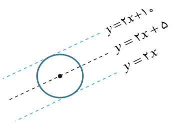
$O(۲,-۱)\,,\ A(x,۰)\Rightarrow OA=R\Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$

$\Rightarrow x^۲-۴x+۴+۱=۲\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰$

$\Rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۱,۳$

۲۲۳. ۱ ۲ **۳** ۴

خطوط داده شده موازی‌اند، پس فاصله‌ی آن‌ها از هم قطر دایره است و ضمناً مرکز دایره روی خطی موازی آن‌ها با عرض از مبدأ میانگین قرار دارد.



ابتدا از فاصله‌ی بین دو خط موازی، قطر دایره را می‌یابیم:

$\begin{matrix}y-۲x=۰\\ y-۲x-۱۰=۰\end{matrix}\Rightarrow ۲R=\frac{|۰+۱۰|}{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$

$\Rightarrow R=\sqrt{۵}$

همان‌طور که گفتیم مرکز دایره روی خطی موازی با دو خط داده شده و با عرض از مبدأ میانگین قرار دارد، پس مرکز روی خط $y=۲x+۵$ قرار دارد. بنابراین می‌توان مختصات مرکز را به شکل $(x,۲x+۵)$ در نظر گرفت. فاصله‌ی مرکز از مبدأ (که روی دایره است) باید برابر با شعاع باشد:

$(x,۲x+۵)\,,\ (۰,۰)\Rightarrow \sqrt{x^۲+(۲x+۵)^۲}=\sqrt{۵}$

$\Rightarrow x^۲+۴x^۲+۲۰x+۲۵=۵\Rightarrow ۵x^۲+۲۰x+۲۰=۰$

$\Rightarrow x^۲+۴x+۴=۰\Rightarrow (x+۲)^۲=۰\Rightarrow x=-۲$

پس مرکز دایره نقطه‌ی $O(x,۲x+۵)=(-۲,۱)$ است.

۲۲۴. ۱ ۲ **۳** ۴

مرکز دایره را $O(x,x)$ در نظر می‌گیریم. ضمناً دایره از دو نقطه‌ی $(۱,۰)$ و $(۳,۰)$ می‌گذرد. فاصله‌ی مرکز دایره از این دو نقطه باید برابر باشد (برابر با شعاع دایره):

$O(x,x)\,,\ A(۱,۰)\Rightarrow OA=\sqrt{(x-۱)^۲+x^۲}$

$O(x,x)\,,\ B(۳,۰)\Rightarrow OB=\sqrt{(x-۳)^۲+x^۲}$

$\Rightarrow OA=OB=R\Rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲+x^۲}=\sqrt{(x-۳)^۲+x^۲}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}}(x-۱)^۲+x^۲=(x-۳)^۲+x^۲$

$\Rightarrow (x-۱)^۲=(x-۳)^۲\Rightarrow x-۱=\pm(x-۳)$

$\Rightarrow\begin{cases}x-۱=x-۳\Rightarrow -۱=-۳\ \times\\ x-۱=۳-x\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲\end{cases}$

با جایگذاری $x=۲$ در $R=OA$ داریم: $R=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$

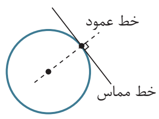
۲۲۵. ۱ **۲** ۳ ۴

شکل حاصل از دوران حول خط Δ استوانه‌ای است که کره‌ای از آن خارج شده است. پس حجم شکل حاصل برابر است با:

$V=\pi r^۲h-\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\pi(۲)^۲(۵)-\frac{۴}{۳}\pi(\frac{۳}{۲})^۳$

$=۲۰\pi-۴/۵\pi=۱۵/۵\pi$

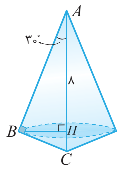
۲۲۶. ۱ ۲ ۳ ۴



اگر خطی در نقطه‌ی تقاطع با دایره، بر خط مماس عمود باشد، یعنی بر دایره عمود است و از مرکز دایره می‌گذرد، پس خط مذکور باید از مرکز دایره یعنی $O(۱,-\frac{۱}{۲})$ بگذرد.

$$۳x+۲y=a \xrightarrow{O(۱,-\frac{۱}{۲})} ۳-۱=a \Rightarrow a=۲$$

۲۲۷. ۱ ۲ ۳ ۴



$$\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{۸}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow BC=۴$$

از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$AB^۲+BC^۲=AC^۲ \Rightarrow AB^۲+۱۶=۶۴$$

$$\Rightarrow AB^۲=۴۸\Rightarrow AB=۴\sqrt{۳}$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر برابر است با ضرب اضلاع قائم تقسیم بر وتر: $BH=\frac{AB\times BC}{AC}=\frac{۴\sqrt{۳}\times ۴}{۸}=۲\sqrt{۳}$

حال به محاسبه‌ی حجم می‌پردازیم. دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وتر منجر به ساخت دو مخروط با شعاع قاعده‌ی یکسان (BH) می‌شود. پس حجم شکل حاصل جمع حجم دو مخروط است:

$$V=\frac{\pi}{۳}BH^۲\times CH+\frac{\pi}{۳}BH^۲\times AH$$

$$=\frac{\pi}{۳}BH^۲(\underbrace{CH+AH}_{AC})=\frac{\pi}{۳}(۲\sqrt{۳})^۲(۸)=۳۲\pi$$

۲۲۸. ۱ ۲ ۳ ۴

هر خط قائم بر دایره از مرکز آن می‌گذرد. پس نقطه‌ی $O(۸,۷)$ مرکز دایره‌ی C است: $O(۸,۷)\,,\,r=?$

$$x^۲+y^۲-۴x+۲y-۴=۰$$

$$\Rightarrow O'(۲,-۱),\ r'=\frac{\sqrt{۱۶+۴+۱۶}}{۲}=۳$$

$$OO'=\sqrt{(۸-۲)^۲+(۷+۱)^۲}=۱۰$$

اگر دو دایره مماس خارج باشند، رابطه‌ی $OO'=r+r'$ برقرار است:

$$۱۰=۳+r\Rightarrow r=۷$$

۲۲۹. ۱ ۲ ۳ ۴

دو کانون هم طول‌اند، پس بیضی قائم است. وسط آن‌ها هم مرکز بیضی است. فاصله‌ی آن‌ها از هم $۲c=۲$ است، پس $c=۱$ است:

$$\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{۱}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۲$$

حال فرض کنیم بیضی در نقطه‌ی $M(x\,,\,۲x)$ خط $y=۲x$ را قطع کند؛ چون مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر $۲a$ است، داریم: $M(x\,,\,۲x)\,,\,F(۱\,,\,۱)\,,\,F'(۱\,,\,-۱)\Rightarrow MF+MF'=۲a$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲+(۲x-۱)^۲}+\sqrt{(x-۱)^۲+(۲x+۱)^۲}=۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^۲-۲x+۱+۴x^۲-۴x+۱}+\sqrt{x^۲-۲x+۱+۴x^۲+۴x+۱}=۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{۵x^۲-۶x+۲}+\sqrt{۵x^۲+۲x+۲}=۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{۵x^۲-۶x+۲}=۴-\sqrt{۵x^۲+۲x+۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵x^۲-۶x+۲=۱۶+۵x^۲+۲x+۲-۸\sqrt{۵x^۲+۲x+۲}$$

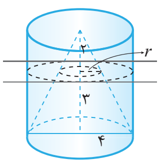
$$\Rightarrow ۸\sqrt{۵x^۲+۲x+۲}=۸x+۱۶\Rightarrow \sqrt{۵x^۲+۲x+۲}=x+۲$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵x^۲+۲x+۲=x^۲+۴x+۴\Rightarrow ۴x^۲-۲x-۲=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-x-۱=۰\Rightarrow \Delta=۹$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱\pm ۳}{۴}\Rightarrow x=۱\,,\,-\frac{۱}{۲}$$

۲۳۰. ۱ ۲ ۳ ۴



مقطع حاصل دایره‌ای است که دایره‌ی کوچک‌تری که با آن هم‌مرکز است، از آن خارج شده است. از قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{r}{۴}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow r=\frac{۸}{۵}$$

پس حلقه‌ی مورد نظر دارای مساحت زیر است:

$$S=\pi R^۲-\pi r^۲=\pi(۴)^۲-\pi(\frac{۸}{۵})^۲$$

$$=۱۶\pi-\frac{۶۴\pi}{۲۵}=\frac{۳۳۶\pi}{۲۵}=۱۳/۴۴\pi$$

۲۳۱. ۱ ۲ ۳ ۴

$$AM=۲MO\Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲+(y-۶)^۲}=۲\sqrt{x^۲+y^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲-۶x+۹+y^۲-۱۲y+۳۶=۴x^۲+۴y^۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۳y^۲+۶x+۱۲y-۴۵=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x+۴y-۱۵=۰$$

این معادله مربوط به یک دایره است، که بزرگ‌ترین وتر آن قطر آن است:

$$R=\frac{\sqrt{۴+۱۶+۶۰}}{۲}=\frac{\sqrt{۸۰}}{۲}\Rightarrow ۲R=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

۲۳۲. ۱ ۲ ۳ ۴

نقطه‌ی $(۱,-۲)$ در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد، پس دایره در ناحیه‌ی چهارم بر محورهای مختصات مماس است. معادله‌ی دایره‌ای که در ناحیه‌ی چهارم بر محورهای مختصات مماس است به شکل زیر است:

$$(x-R)^۲+(y+R)^۲=R^۲$$

$$\xrightarrow{(۱\,,\,-۲)\,\in\,\text{دایره}} (۱-R)^۲+(-۲+R)^۲=R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲-۲R+۱+R^۲-۴R+۴=R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰\Rightarrow (R-۱)(R-۵)=۰$$

$$\Rightarrow R=۱\,,\,۵$$

.۲۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴

دایره‌ی مورد نظر را به شکل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2-4x-6=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}}$$

$$(a+4)x+by+c+6=0 \quad (\text{وتر مشترک})$$

$$\Rightarrow by=-(a+4)x-6-c \Rightarrow y=\frac{-a-4}{b}x+\frac{-6-c}{b}$$

چون وتر مشترک خط $y=x$ است، داریم:

$$\frac{-a-4}{b}=1\,,\ \frac{-6-c}{b}=0 \Rightarrow \begin{cases} -a-4=b \Rightarrow b+a=-4 \\ -6-c=0 \Rightarrow c=-6 \end{cases}$$

ضمناً دایره از نقطه‌ی $(-1,4)$ می‌گذرد:

$$1+16-a+4b+c=0 \xrightarrow{c=-6} 4b-a=-11$$

با حل دو معادله و دو مجهول داریم:

$$\begin{cases} b+a=-4 \\ 4b-a=-11 \end{cases} \Rightarrow 5b=-15 \Rightarrow b=-3 \Rightarrow a=-1$$

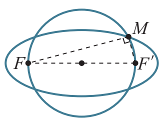
$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} x^2+y^2-x-3y-6=0$$

.۲۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$2a=2\sqrt{5} \Rightarrow a=\sqrt{5}$$

$$2b=2 \Rightarrow b=1 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=5-1=4 \Rightarrow c=2$$

با توجه به این‌که $c=2$ و شعاع دایره نیز ۲ واحد است، دایره از کانون‌ها عبور می‌کند.



چون FF' قطر دایره است، پس $\hat{M}=90^\circ$ است و طبق رابطه‌ی فیثاغورس:

$$MF^2+MF'^2=FF'^2=(2c)^2=16$$

.۲۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴

فاصله‌ی دو کانون از هم $2c=7-(-1)=8$ است:

$$c=4\,,\ 2b=6 \Rightarrow b=3 \Rightarrow a^2=b^2+c^2=9+16=25$$

$$\Rightarrow a=5 \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$$

.۲۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴

معادله‌ی دایره‌ی مورد نظر را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2=17 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ax+by+c+17=0$$

$$\Rightarrow by=-ax-c-17 \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{-c-17}{b}$$

معادله‌ی وتر مشترک $y=2x-3$ داده شده، پس:

$$\begin{cases} -\frac{a}{b}=2 \Rightarrow a=-2b \Rightarrow a+2b=0 \\ \frac{-c-17}{b}=-3 \Rightarrow -c-17=-3b \Rightarrow 3b-c=17 \end{cases}$$

ضمناً نقطه‌ی $(6,-1)$ روی دایره است:

$$36+1+6a-b+c=0 \Rightarrow 6a-b+c=-37$$

یک دستگاه سه معادله و سه مجهول داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a+2b=0 \\ \left.\begin{array}{l} 3b-c=17 \\ 6a-b+c=-37 \end{array}\right\} \Rightarrow 6a+2b=-20 \end{array}\right\} \Rightarrow 5a=-20$$

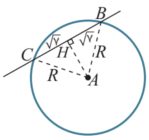
$$\Rightarrow a=-4$$

$$\Rightarrow b=2 \Rightarrow c=-11$$

$$\Rightarrow R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{16+4+44}}{2}=4$$

.۲۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴

با وصل کردن مرکز دایره به وتر، طبق شکل داریم:



$$2x-3y+1=0\,,\ A(-1,4)$$

$$\Rightarrow AH=\frac{|-2-12+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$$

از رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$R^2=HB^2+AH^2 \Rightarrow R^2=7+13=20 \Rightarrow R=2\sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله ی دایره}} (x+1)^2+(y-4)^2=20$$

$$\xrightarrow{y=2} (x+1)^2+4=20 \Rightarrow (x+1)^2=16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=4 \Rightarrow x=3 \\ x+1=-4 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$