بسم الله الرحمن الرحیم

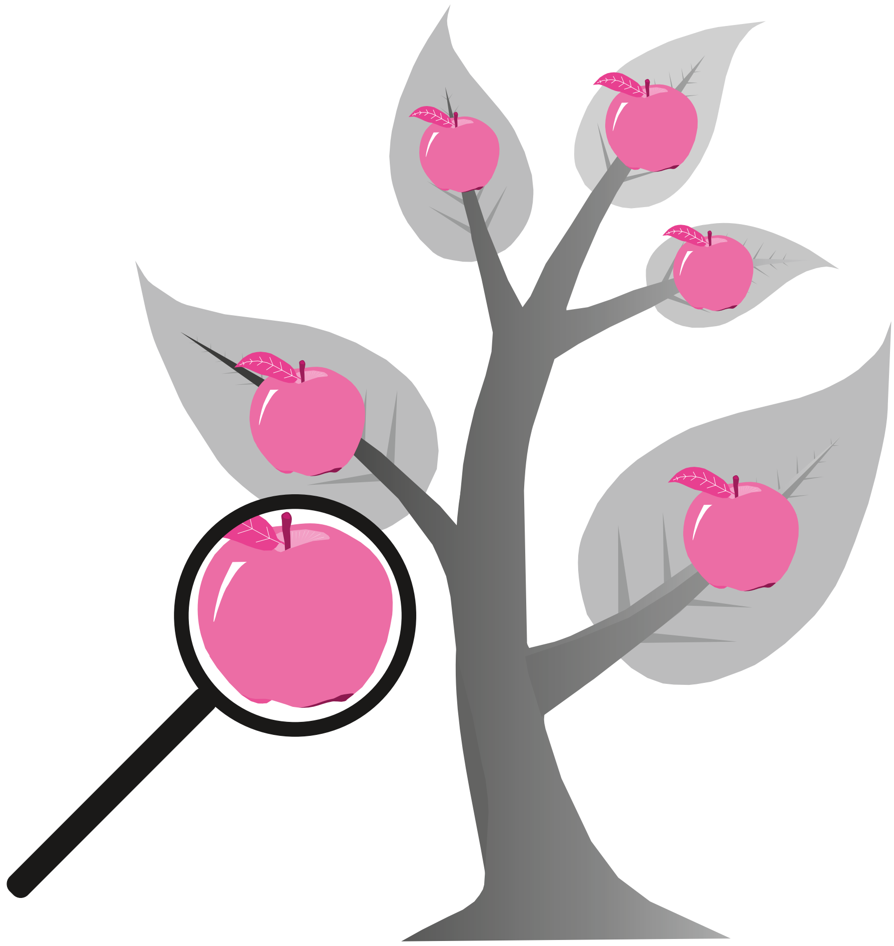
برگی از درخت المپیاد ریاضی

المپیاد ریاضی ایران

مرحله اول
از دوره ۲۳ تا کنون

مؤلف رسول حاجی زاده

انتشارات خوشخوان



درخت المپیاد درختی است که توسط انتشارات خوشخوان کاشته شده و هریک از کتاب‌های این پروژه برگی از آن است.

وظیفه‌ی ما نگهداری و آبیاری این درخت است. امیدواریم با عنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده و به بار واقعی بنشیند.

فراموش نکنید که بار و میوه‌ی این درخت شما عزیزان می‌باشید.

التماس دعا

پروژه‌ی درخت المپیاد

- اعتقاد بر این است که شروع فعالیت‌های المپیاد به صورت حرفه‌ای، باید از ابتدای دوره‌ی دبیرستان شروع شود. اکثر المپیادهای علمی در زمستان سال سوم دبیرستان تعیین تکلیف می‌شوند. بنابراین از شروع دبیرستان تا اواسط سال سوم حدوداً ۸ ترم تحصیلی می‌شود (با احتساب فصل و ترم تابستان) که لازم است برنامه‌ریزی دقیقی برای این چند ترم انجام شود.
- انتشارات خوشخوان این برنامه‌ریزی را در قالب پروژه‌ی درخت المپیاد انجام داده است که هر شاخه از درخت، مبحثی از آن المپیاد و هر برگ از آن شاخه شماره‌ای از آن مبحث می‌باشد.
- به عنوان مثال اپتیک(۱) کتابی است که در یک ترم تحصیلی در یک کلاس ممتاز می‌توان برای داوطلبان المپیاد فیزیک تدریس کرد.

با عنایات حضرت حق و با کمک تنی چند از همکاران گرامی کتب مربوط به این درخت در هر رشته‌ای از المپیاد معرفی خواهد شد.

- منتظر پیشنهادات و نظرات شما سروران هستیم.

گروه المپیاد

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

مسابقه ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش هایی هستند که کم وبیش در سرتاسر دنیای پهناور به صورت داخلی وبین المللی برگزار می شود وسال به سال به تنوع، جذبه وعظمت آن ها افزوده می‌شود. یکی ازاین همایش های باشکوه که هرسال درچندین رشته درسطح دانش آموزان سنوات آخر دوره متوسطه برگزارمی‌شود المپیادهای علمی‌می باشد که قدیمی ترین آن المپیاد ریاضی بوده و ازسال ۱۹۵۹ آغاز و تا به حال ادامه داشته است.

در حال حاضر نتیجه ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص های قدرت علمی آن کشور محسوب شده و نفرات ممتاز این المپیادها به راحتی جذب دانشگاه ها وآکادمی های ممتاز جهان شده وپس ازگذشت سنواتی چند به موفقیت های چشم‌گیری نایل می شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال های نه چندان دور از مدال آوران این المپیادها بوده اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین باردر سال ۱۳٦٦ در المپیاد ریاضی جهان که در کشور کوبا برگزار می شد شرکت کرده و باکسب یک مدال برنز به مقام ۲٦ جهان نائل آمد که تعجب همگان را برانگیخت چراکه درآن سال ایران درگیرجنگ تحمیلی بوده و جهانیان به غیر از جنگ و درگیری چیزی از ایران سراغ نداشتند و درخشش دانش آموزان ایران در آن سال و سنوات بعد نگاه ها را به سمت ایران معطوف کرده وچشم خفته آن ها را تا حدود زیادی بیدارکرد. همانطورکه از رسانه های گروهی مطلع شده اید درتمام المپیادهای علمی تیم اعزامی کشورعزیزمان درسنوات گذشته جزءکشورهای برتر بوده وضمن کسب مدال های رنگارنگ رتبه های بسیار درخشانی ازجمله رتبه اول را حائز شده اند.

نحوه گزینش نفرات اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگرند به این صورت که درابتدا درمسابقه ای سراسری تحت عنوان مرحله اول که معمولاً به صورت پرسش های چندگزینه ای مطرح می شود حدوداً هزارنفر پذیرفته شده و در رقابتی معمولاً تشریحی که مرحله ی دوم نامیده می شود شرکت می کنند. دراین مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و دردوره ی تابستانی درباشگاه دانش پژوهان جوان که متولی برگزاری تمام المپیاد های علمی می باشد شرکت کرده و پس ازگذراندن این دوره مرحله ی سوم آزمون برگزار شده و عده ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عده ای مدال نقره و عده ای دیگر مدال برنز

کسب می کنند (در این مرحله معمولاً همه‌ی افراد شرکت کننده در دوره مدال کسب می کنند) دارندگان مدال طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضاء تیم اعزامی شناسایی می شوند. دارندگان مدال طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه ی تحصیل می دهند اما دارندگان مدال های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان در کنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته ودانشگاه مورد علاقه خود درقابت می کنند با این تفاوت که این افراد سهمیه‌ی ویژه ای در پذیرفته شدن در رشته ودانشگاه مورد علاقه ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش پژوهان جوان تشریح شده است.

متأسفانه درسال های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت های المپیاد جبهه می گیرند و ادعا می کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت درکنکور سراسری بوده و هرچه دانش آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند ازکنکورفاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدال طلا (که بسیار محتمل است) آینده ی خود را تباه کرده است درحالی که با تحقیقی که درسال های گذشته انجام شده است فعالیت درزمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکورنیست بلکه مسیرفعالیت برای کسب رتبه مناسب درکنکور را بسیار هموارتر می سازد به عنوان مثال می توانید تمام مدال آوران نقره و برنز ویا حتی آن هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ولی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را دریک رشته شناسایی کرده و موفقیت های تحصیلی آن ها را در دانشگاه ها جویا شوید که نگارنده ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

به هرحال ادعا این است که فعالیت دانش آموز دریک رشته از رشته های المپیاد فواید بسیاری دارد که به تعدادی ازآن ها به صورت گذرا اشاره می شود:

۱. همان طور که خداوند به بشرتن سالم داده و انتظار می رود با ورزش ها و نرمش های مناسب ازاین نعمت خدادادی محافظت شود به هردانش آموزی نیزاستعدادی داده است که باید شکوفا وبهره ور شود. اغلب باشگاه های کشور اعم ازخصوصی و دولتی داوطلب زیادی در رشته های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت دریکی از رشته های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدن سازی و ... می باشند که وقتی ازآن افراد راجع به اهدافشان ازاین فعالیت سوأل می شود سالم نگه داشتن بدن را عنوان داشته وانتخاب شدن درتیم ملی را درنهایت عنوان می کنند. چه بسا افرادی که در این رشته ها فعالیت می کنندو هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی کنند که وقتی ازاین افراد راجع به موفقیت هایشان سؤال می شود هرگزخود را ناموفق معرفی نمی کنند و همین که توانسته اند از بدن سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می‌دانند بنابرین فعالیت دریکی اززمینه های المپیاد چه در نهایت به کسب مدال منجر شود و یا نشود همین که استعداد خدادادی پرورش می یابد موفقیتی است بس بزرگ.

۲. کتب درسی به اذعان اکثر کارشناس ها و اساتید سال به سال ساده تر شده و برای عموم دانش آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ عنوان اغناکننده نمی باشند لذا لازم است این سری ازدانش آموزان فعالیت ویژه ای را در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود داشته باشند تا احساس کنند این فعالیت ها برای آن ها اغناکننده است.

۳. فعالیت های المپیادی که درنهایت به حل سؤالات پیچیده و عمیق در رشته ی مربوطه می شود باعث می شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش آمده درزندگی به دید یک مسأله ی المپیاد نگاه کرده و درحل آن نسبت به سایر رقبا موفق تر باشند. تحقیقات نشان می دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی ازشاخه های المپیاد را دنبال می کنند (نه به نیت کسب مدال بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق ترند.

٤. زیربنای اکثر دروس پیش دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می شود بنابرین افرادی که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می کنند در دوره پیش دانشگاهی با پایه ی بسیار قوی تری با دروس مواجه می شوند و نسبت به رقبای خود راحت تر ازعهده آن ها برمی آیند.

٥. با توجه به مصوبه های موجود، کسب مدال دریکی ازالمپیاد های علمی(حتی مدال برتر) باعث اعطای امتیازهای ویژه ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه های سراسری می شود که جزئیات آن درسایت های معتبرمخصوصاً سایت باشگاه دانش پژوهان جوان موجود است.

٦. همچنین با توجه به مصوبه های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به عضویت نهادهای مختلف ازجمله بنیاد ملی نخبگان درمی آیند که با رجوع به سایت های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق یافته به اعضاء را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مفتخر است از بدو تأسیس به فکر تدوین و تألیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال و با بهره گیری از اساتید مجربی که خود در سنواتی نه چندان دور مدال آوری یکی از المپیادهای علمی بوده اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد از کسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین و تألیف شود که در آن هر کتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت المپیاد نام گرفته است و هر کتاب از این پروژه که در اختیار دارید برگی از آن درخت خواهد بود.

بدیهی است انجام چنین پروژه ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می طلبد لذا لازم است از تمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده اند، تشـــکـــر و قدردانی می نمایم و در نهایت نیز از عوامل زحمت کش انتشارات اعم از مشاورین، حروف چین ها، طراحان و کارمندان و کارگران عزیز کمال امتنان را دارم.

با تشکر
رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

پیشگفتار مؤلف

خداوند متعال را بسیار شاکرم که توفیق خدمتگذاری به دانش‌آموزان ممتاز کشور را نصیب اینجانب کرده است و اگر عمری باقی باشد امیدوارم با دعای شما عزیزان این توفیق از ما سلب نشود.

مسابقات ریاضی کشوری از سال ۱۳۶۲ در کشور عزیزمان و با همت وزارت آموزش و پرورش برگزار میشده است تا این که از سال ۱۳۶۶ این مسابقات نام المپیاد ریاضی به خود گرفته و به صورت مستدام تا به حال برگزار شده است که آخرین شیوه را به اختصار شرح می‌دهیم:

در بهمن ماه هر سال مسابقه‌ای شامل چند پرسش (پنج گزینه‌ای و پاسخ کوتاه) در بین تمام دانش‌آموزان ممتاز رشته‌ی ریاضی در پایه‌های اول، دوم و سوم در سطح کشور توسط باشگاه دانش‌پژوهان جوان برگزار شده و پاسخ برگ‌های آن تا اواسط اسفندماه توسط آن باشگاه تصحیح می‌گردد.

از بین تمام شرکت‌کنندگان حدود ۱۵۰۰ نفر برگزیده شده و به مرحله‌ی دوم راه پیدا می‌کنند. این افراد در اردیبهشت‌ماه سال بعد (یعنی همان سال تحصیلی) در مسابقه‌ای تحت عنوان مرحله‌ی دوم المپیاد ریاضی شرکت کرده و در دو روز متوالی به ۶ سؤال تشریحی (هر روز ۳ سؤال) پاسخ می‌دهند که پاسخ برگ‌های آن افراد همگی در باشگاه دانش‌پژوهان جوان و توسط اساتید آن باشگاه تصحیح و نمره‌گذاری می‌گردد.

پس از تصحیح اوراق مرحله‌ی دوم، حدوداً ۴۰ نفر برتر به دوره‌ی تابستانی راه پیدا می‌کنند که این افراد در یک دوره‌ی سه ماهه در تهران آموزش دیده و در طول دوره با آزمون‌های متعددی رتبه‌بندی می‌شوند.

در انتهای دوره‌ی تابستانی حدوداً ۱۲ نفر مدال طلا، ۱۵ نفر مدال نقره و مابقی مدال برنز دریافت می‌کنند که هریک از آنها امتیازاتی دارند از جمله اینکه دارندگان مدال طلای کشوری از شرکت در کنکور سراسری معاف بوده و در رشته‌ی دلخواه و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته می‌شوند.

پس از حدود یک سال آموزش مدام به دارندگان مدال طلا، ۶ نفر از آنها برگزیده شده و به المپیاد جهانی ریاضی در قالب یک تیم راه پیدا می‌کنند.

کتاب حاضر مجموعه سؤالات المپیاد داخلی ریاضی از سال ۱۳۸۳ تاکنون می‌باشد که پس از جمع‌آوری به آن‌ها پاسخ داده شده است. پاسخ‌های سؤالات به صورت گام‌بندی شده می‌باشد. به این صورت که دانش‌آموز با دیدن سؤال ابتدا خود تلاش می‌کند تا جواب را بیابد، اگر موفق نشد به گام اول پاسخ که نوعی راهنمایی می‌باشد مراجعه کرده و پس از دیدن آن راهنمایی برای حل سؤال تلاش مجدد می‌کند که اگر پس از مدتی باز هم موفق به حل آن نشد به گام دوم و ... مراجعه می‌کند.

از تمام دوستانی که در نگارش این کتاب اعم از همکاران، پرسنل انتشارات، حروفچین، صفحه‌آرا، طراحان و ... و خصوصاً از طراحان سؤال که زحمت زیادی در این راه متقبل می‌شوند کمال تقدیر و تشکر به عمل می‌آید.

رسول حاجی‌زاده

اردیبهشت ۱۳۹۰

فهرست

فهرست

فصل ۱

دوره‌ی ۲۳

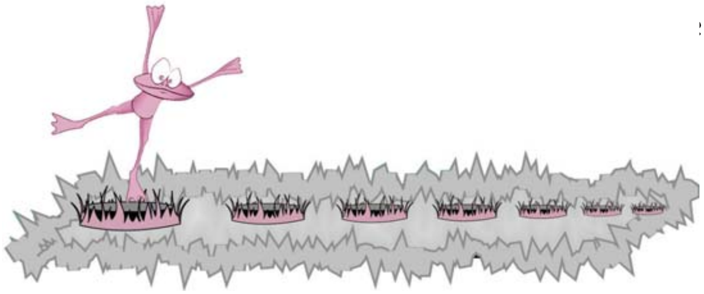
بهمن‌ماه ۱۳۸۳

سؤالات بیست و سومین المپیاد ریاضی ایران

۱ پس از بسط دادن $(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + 9x^8 + 10x^9)^2$، چند تا از ضرایب فرد است؟

الف) ۱ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ هـ) ۱۰

۲ در برکه‌ای ۷ قطعه سنگ وجود دارد که از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۷ شماره‌گذاری شده‌اند. قورباغه‌ای روی سنگ شماره‌ی یک نشسته است. فاصله‌ی سنگ‌ها به گونه‌ای است که اگر قورباغه روی سنگ iـاُم باشد می‌تواند حداکثر تا i سنگ جلو ببرد. به چند طریق ممکن است قورباغه، بدون برگشت به سمت چپ، ؛



الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ هـ) ۱۴

۳ به چند طریق می‌توان سه زیرمجموعه‌ی دوعضوی از مجموعه‌ی $\{1, 2, \cdots, 6\}$ انتخاب کرد به‌طوری که هر دو تا از آن‌ها دقیقاً یک عضو مشترک داشته باشند؟

الف) ۲۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ هـ) ۸۰

۴ به ازای چند عدد طبیعی n، $[\frac{n^2}{3}]$ عددی اول است؟ ($[x]$ جزء صحیح x است.)

الف) یک ب) دو ج) سه د) بی‌نهایت هـ) چنین عددی وجود ندارد.

۵ چهارضلعی $ABCD$ در بین چهارضلعی‌هایی که داخل نیم‌دایره‌ای به شعاع واحد قرار دارند، بیش‌ترین مساحت را دارد. مساحت $ABCD$ چقدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ج) $\frac{6}{5}$ د) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ هـ) $\sqrt{2}$

۶ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، نیمساز زاویه‌ی C مثلث ABC را به دو مثلث متساوی‌الساقین دیگر تقسیم کرده است. نسبت $\frac{BC}{AB}$ برابر با کدام‌یک از اعداد زیر است؟

الف) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) $\sqrt{2}$ د) $\frac{1}{2}$ هـ) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

۷ سهمی $y = x^2 - 2ax + 1$ و خط $y = 2b(a-x)$ را در نظر بگیرید. تعریف کنید

$$A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | \text{خط و سهمی مذکور یکدیگر را قطع نمی‌کنند}\}$$

مساحت A چقدر است؟

الف) $\frac{\pi}{4}$ ب) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ج) A بی‌کران است. د) ۱ ه) π

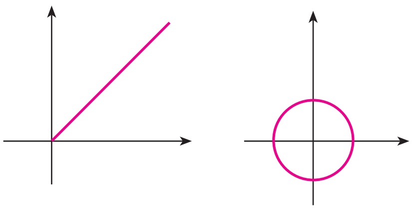
۸ ۱۸ خط در صفحه طوری رسم شده است که هر کدام افقی، عمودی یا موازی نیمساز ربع اول و سوم (یعنی خط $y = x$) است. در این وضعیت، صفحه حداکثر به چند قسمت (کران‌دار یا بی‌کران) تقسیم شده است؟

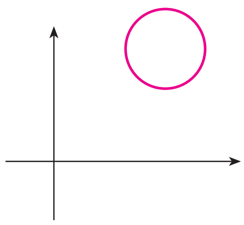
الف) ۶۳ ب) ۸۱ ج) ۱۲۱ د) ۱۲۷ ه) ۲۱۶

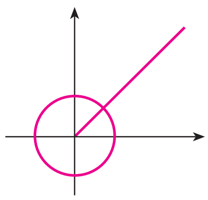
۹ فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از نقاط صفحه باشند. مجموعه‌ی $A \oplus B$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

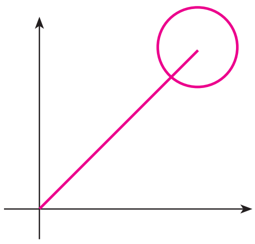
$$A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) | (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$$

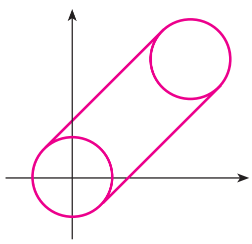
اگر A و B پاره‌خط و دایره‌ی نشان داده شده در شکل مقابل باشند، آن‌گاه $A \oplus B$ کدام‌یک از شکل‌های زیر خواهد بود؟

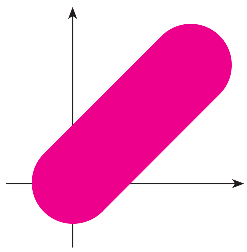


الف)


ب)


ج)


د)


ه)


۱۰ قطر یک زیرمجموعه از صفحه یعنی بزرگ‌ترین فاصله‌ی بین نقاط آن. به عنوان مثال، قطر هر مثلث برابر طول بزرگ‌ترین ضلع آن است. فرض کنید قطر دومجموعه‌ی A و B برابر d است. کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار قطر $A \oplus B$ چقدر است؟ ($A \oplus B$ همان است که در سؤال قبل تعریف شده است.)

الف) d و d ب) $\sqrt{۲}d$ و $\sqrt{۳}d$ ج) d و $۲d$ د) $\sqrt{۲}d$ و $۲d$ هـ) $۲d$ و $۳d$

۱۱ مجموعه‌های A_k، $k \in \mathbb{N}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_۱ = \text{مجموعه‌ی اعداد اول}$$
$$A_{k+۱} = \{a_۱ \times a_۲ \times \cdots \times a_{k+۱} | a_۱, a_۲, \cdots, a_{k+۱} \in A_k\}$$

توجه کنید که $a_۱, a_۲, \cdots, a_{k+۱}$ لزوماً متمایز نیستند. کدام‌یک از اعداد زیر، دست کم عضو یکی از A_kها است؟

الف) $۳^۷ \times ۲^{۲۴۳}$ ب) $۲^{۲۵} \times ۵^{۲۵}$ ج) $۲^{۲۳۱} \times ۷^{۲۵}$

د) $۲^{۱۱۱} \times ۳^۹$ هـ) $۲^{۶۰} \times ۳^{۱۲} \times ۵^۶$

۱۲ به ازای چند مقدار طبیعی برای a، معادله‌ی $\frac{۱}{y} - \frac{a}{x+y} = \frac{۱}{x}$ درمجموعه‌ی اعداد طبیعی جواب دارد؟

الف) چنین aای وجود ندارد. ب) یکی ج) دو تا

د) چهار تا هـ) بی‌نهایت

۱۳ می‌توان ثابت کرد در هر مثلث دلخواه ABC، قرینه‌ی مرکز ارتفاعیه (محل همرسی ارتفاع‌ها) نسبت به وسط ضلع BC روی دایره‌ی محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را D بنامید. اندازه‌ی زاویه‌ی DAC برابر است با:

الف) $\frac{\hat{A}}{۲}$ ب) $\frac{\hat{B}}{۲}$ ج) $۹۰ - \hat{A}$ د) $۹۰ - \hat{B}$ هـ) $۹۰ - \frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}$

۱۴ فرض کنید $f: R \to R$ تابعی وارون‌پذیر باشد و $h(x) = \frac{kf(x)}{۱-f(x)}$. اگر h وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $\frac{x}{f \circ h^{-۱}(x)} - x$ برابر است با:

الف) $f(x)$ ب) $h(x)$ ج) kx د) k هـ) $\frac{x}{f(x)} - x$

۱۵ کاغذی مستطیل شکل را چندین بار تا کرده‌ایم. در هر مرحله تا بر روی خطی موازی دو ضلع و در وسط آن‌ها زده شده است تا به مستطیلی با مساحت نصف مستطیل قبل برسیم. واضح است که در هر مرحله این کار به دو روش (افقی و عمودی) امکان‌پذیر است. در نهایت، همهٔ تا ها را بازکرده‌ایم و دیده‌ایم در مجموع ۳۱۸ خط تای افقی و عمودی تولید شده است. کاغذ چند بار تا شده است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۴ ج) ۱۵۹ د) ۳۱۷ هـ) ۳۱۸

۱۶ مربع توپری به ضلع واحد در فضا در نظر بگیرید. حجم مجموعه‌ی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها دست کم از یکی از نقاط مربع کوچک‌تر یا مساوی ۱ باشد، چقدر است؟

الف) ۲ ب) $۲(۱ + \frac{۲}{۳}\pi)$ ج) $۲(۱ + \pi)$ د) ۸ ه) $۲(۱ + \frac{۵}{۳}\pi)$

۱۷ فرض کنید $S(n)$ مجموع ارقام عدد n باشد. چند عدد هفت رقمی n وجود دارد که ارقام ۱ تا ۹ دقیقاً یک بار در بین رقم‌های n و $S(n)$ ظاهر شده باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۵۰۴۰ ه) ۱۰۰۸۰

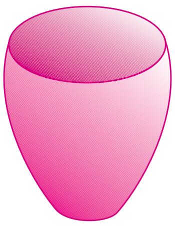
۱۸ فرض کنید عدد طبیعی a داده شده است. در هر گام، به جای عددی که در اختیار داریم یکی از عددهای $۱ + a$، $۲ + ۲a$، $۳ + ۳a$، $۴ + ۴a$ و $۵a + ۴$ را در نظر می‌گیریم و کار را با آن ادامه می‌دهیم. با شروع از کدام‌یک از اعداد زیر می‌توان بعد از تعدادی گام به عدد $۳۰^{۱۳۸۳} - ۱$ رسید؟

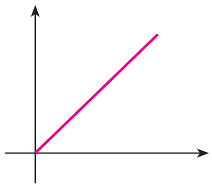
الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) هیچ‌کدام

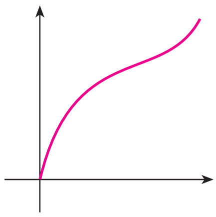
۱۹ فرض کنید $f_۰(x) = x$ و برای هر $n \geq ۰$، $f_{n+۱}(x) = \sqrt{۱ - f_n(x)}$. دامنه‌ی تابع $f_{۱۳۸۳}(x)$ کدام است؟

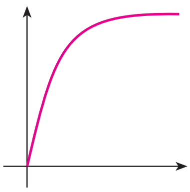
الف) $(-\infty, ۱]$ ب) $[۰, ۱]$ ج) $[۰, \frac{۱}{۲^{۱۳۸۳}}]$ د) $\{۱\}$ ه) $\{۰\}$

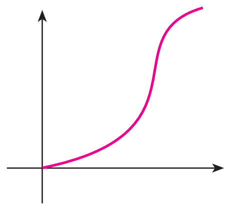
۲۰ در ظرفی به شکل روبه‌رو با نرخ ثابت در هر دقیقه یک لیتر آب می‌ریزیم:
کدام‌یک از نمودارهای زیر می‌تواند نشان‌دهنده‌ی ارتفاع آب بر حسب زمان باشد؟

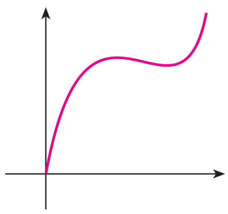


الف)


ب)


ج)


د)


ه)


۲۱ در دایره‌ای به شعاع واحد، AB کمانی 60° و XY قطر متغیری از دایره است. خطوط XA و XB یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع می‌کنند. مکان هندسی محل برخورد ارتفاع‌های مثلث PXY چیست؟

الف) دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) خطی به موازات AB و به فاصله‌ی $\frac{\sqrt{3}}{3}$ از آن

ج) دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{3}}{3}$

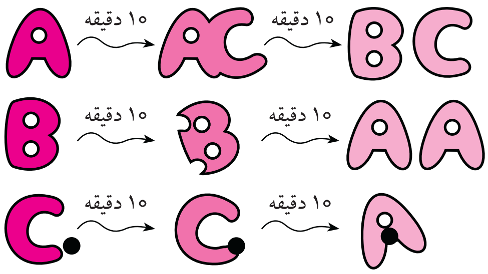
د) خطی به موازات AB و به فاصله‌ی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ از آن

ه) دایره‌ای به شعاع ۱

۲۲ یک عدد طبیعی را یکنوا می‌گوییم هرگاه رقم صفر نداشته باشد و به علاوه ارقام آن به‌صورت اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی مرتب شده باشند. مثلاً اعداد ۱۳۵۶ و ۷۲ یکنوا هستند اما اعداد ۲۲، ۲۰۳۴ و ۱۳۸۳ یکنوا نیستند. مجموع همه‌ی اعداد یکنوای چهاررقمی چند است؟

الف) ۱۳۹۹۸۶۰ ب) ۹۹۹۹۹۸۰ ج) ۷۹۵۵۴۲۰ د) ۱۲۶۰۰۰۰ ه) ۴۹۴۹۵۵۰

۲۳ بیماری کشنده‌ی ABC توسط باکتری‌ای به همین نام تولید می‌شود. این باکتری در واقع دارای سه نوع A، B و C است که طبق این قوانین به هم تبدیل می‌شوند: پس از گذشت هر ۲۰ دقیقه هر باکتری A به یک B و یک C، هر باکتری B به دو A و هر باکتری C به یک A تبدیل می‌شود. به علاوه هر بار که C به A تبدیل می‌شود یک گلبول قرمز را نیز می‌خورد!



اگر در آغاز تنها یک باکتری از نوع B وارد بدن شده باشد، پس از گذشت ۱۰ ساعت چند گلبول قرمز خورده شده است؟

الف) بین ۱۰۰ تا ۵۰۰ هزار ب) بین ۵۰۰ هزار تا ۱ میلیون ج) بین ۱ تا ۵ میلیون

د) بین ۵ تا ۱۰ میلیون ه) بیش از ۱۰ میلیون

۲۴ دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید که در آن A و B ماتریس‌هایی ۲ × ۲، I ماتریس همانی ۲ × ۲ و 0 ماتریس ۲ × ۲ با درایه‌های صفر است.

$$۲A^۶ + ۲A^۲ + A + B = 0$$
$$A^۲ - A + I = 0$$

داریم:

الف) $۳A + B = 0$ ب) $A + B = I$ ج) $A + ۳B = 0$

د) $A^۲ + B^۲ = 0$ ه) این دستگاه جواب ندارد.

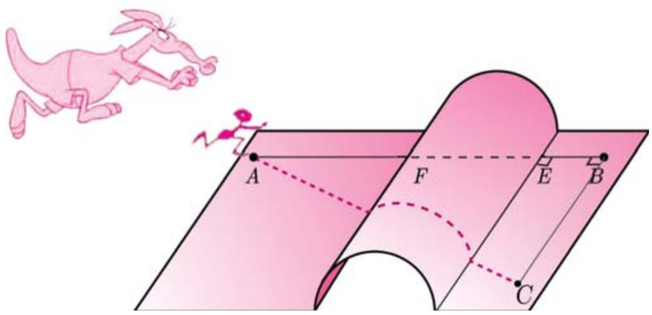
۲۵ می‌خواهیم اعداد طبیعی را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که اولاً هر دو عدد متوالی ناهمرنگ باشند و ثانیاً برای هر دو عدد ناهمرنگ a و b، یا باقی‌مانده‌ی a و b بر ۱۱ متفاوت باشد، یا باقی‌مانده a و b بر ۱۷. کم‌ترین تعداد رنگ‌های لازم چند تاست؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۷ د) ۲۱ ه) ۱۴۷

۲۶ معادله‌ی $[\sin x] + \sin x = [\frac{x}{۳}] + \frac{x}{۳}$ چند جواب حقیقی دارد؟ ($[a]$ جزء صحیح a است.)

الف) جواب ندارد. ب) یکی ج) دو تا د) سه تا ه) پنج تا

۲۷ در شکل زیر مثلث ABC قائم‌الزاویه است ($\hat{B} = ۹۰^\circ$)، $AB = ۱۰ - \pi$ و $BC = ۶$. نیم‌استوانه‌ای با شعاع واحد و محور عمود بر AB، بین نقاط A و C مانع شده است.



مورچه بنا به دلایلی (!) باید هر چه سریع‌تر از نقطه‌ی A به لانه‌اش در نقطه‌ی C برود. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برابر است با:

الف) $\sqrt{۱۳۶}$ ب) $\sqrt{۱۳۶} - \pi$ ج) ۱۰ د) $۷ + \pi$ ه) ۱۱

۲۸ مهره‌ای در مبدأ مختصات قرار داده‌ایم. در هر مرحله مهره را توسط یکی از چهار بردار (m,n)، $(-m,-n)$، $(n+1,m+1)$ یا $(-n-1,-m-1)$ به نقطه‌ی دیگری منتقل می‌کنیم و این کار را تکرار می‌کنیم. به ازای کدام‌یک از (m,n)های زیر می‌توان مهره را به هر نقطه‌ی صفحه با مختصات صحیح رساند؟

الف) $n=3$ و $m=1$ ب) $n=3$ و $m=2$ ج) $n=5$ و $m=3$

د) $n=7$ و $m=4$ ه) به ازای هیچ m و nای نمی‌توان این کار را انجام داد.

۲۹ فرض کنید $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x^{12})$ بر $f(x)$ کدام است؟

الف) x^3+x^2+x+1 ب) x^2-x+6 ج) $x+6$

د) 6 ه) $6-x$

۳۰ یک چراغ راهنمای عجیب سه کلید دارد که هر کلید آن می‌تواند در یکی از وضعیت‌های ۱، ۲ یا ۳ قرار گیرد.

می‌دانیم که اگر وضعیت هر سه کلید را همزمان تغییر دهیم، رنگ چراغ تغییر می‌کند. ابتدا هر یک از سه کلید در وضعیت ۱ هستند و چراغ قرمز است. افسر پلیس با تغییر وضعیت کلید اول از ۱ به ۲ چراغ را سبز می‌کند. حال اگر کلید دوم را هم در وضعیت ۲ قرار دهد، چراغ چه رنگی می‌شود؟

الف) قرمز ب) زرد ج) سبز

د) فقط می‌توان گفت سبز نیست. ه) هر رنگی ممکن است باشد.

پاسخ کلیدی بیست و سومین المپیاد ریاضی ایران

۱	الف	**ب**	ج	د	ه
۲	الف	**ب**	ج	د	ه
۳	الف	ب	ج	د	**ه**
۴	الف	**ب**	ج	د	ه
۵	الف	**ب**	ج	د	ه
۶	الف	ب	ج	د	**ه**
۷	الف	ب	ج	د	**ه**
۸	الف	ب	ج	**د**	ه
۹	الف	ب	ج	د	**ه**
۱۰	الف	ب	ج	**د**	ه
۱۱	الف	ب	ج	**د**	ه
۱۲	الف	**ب**	ج	د	ه
۱۳	الف	ب	ج	**د**	ه
۱۴	الف	ب	ج	**د**	ه
۱۵	الف	**ب**	ج	د	ه
۱۶	الف	ب	ج	د	**ه**
۱۷	الف	ب	ج	**د**	ه
۱۸	الف	**ب**	ج	د	ه
۱۹	الف	**ب**	ج	د	ه
۲۰	الف	**ب**	ج	د	ه
۲۱	الف	ب	**ج**	د	ه
۲۲	**الف**	ب	ج	د	ه
۲۳	الف	ب	**ج**	د	ه
۲۴	**الف**	ب	ج	د	ه
۲۵	الف	**ب**	ج	د	ه
۲۶	الف	ب	ج	**د**	ه
۲۷	الف	ب	**ج**	د	ه
۲۸	الف	ب	ج	د	**ه**
۲۹	الف	ب	ج	**د**	ه
۳۰	الف	ب	**ج**	د	ه

پاسخ تشریحی بیست و سومین المپیاد ریاضی ایران

۱

گام اول

جملات حاصل از آن بسط چگونه به‌دست می‌آیند؟

جملات حاصل از آن بسط به دو گونه‌اند:

I: مربعِ هر یک از جملات داخل پرانتز

II: دو برابر حاصل‌ضرب هر دوجمله‌ای از داخل پرانتز

گام دوم

زوج بودن ضریب کدام‌یک از جملات حاصل یقینی است؟

معلوم است که ضرایب تمام جملات ایجاد شده در بندِ II زوج هستند. در بندِ I نیز مرجعِ جملاتی که ضریب آن‌ها زوج است، دارای ضریب زوج خواهند شد.

گام سوم

مابقیِ جملات همگی ضرایبی فرد دارند آن‌ها را مشخص کنید.

فقط جملاتی از بندِ I می‌ماند که ضرایب فردی دارند. آن جملات به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$(۵x^۴)^۲ = ۲۵x^۸ \quad , \quad (۳x^۲)^۲ = ۹x^۴ \quad , \quad (۱)^۲ = ۱$$
$$(۹x^۸)^۲ = ۸۱x^{۱۶} \quad , \quad (۷x^۶)^۲ = ۴۹x^{۱۲}$$

۲

گام اول

تصور کنید که اگر تعداد سنگ‌ها زیاد بود و قرار بود قورباغه به سنگ بیستم برسد آن‌گاه آن قورباغه قبل از سنگ بیستم بر روی چه سنگی بوده است (یعنی پرش از روی چه سنگ‌هایی به سنگ بیستم فقط با یک پرش امکان‌پذیر است)؟

معلوم است که جواب، سنگ‌های ۱۰، ۱۱، ۱۲، ...، ۱۹ می‌باشد.

گام دوم

پرش به روی سنگ nـاُم از روی چه سنگ‌هایی ممکن است؟

اگر n زوج باشد آن‌گاه جواب، سنگ‌های $\frac{n}{۲}$، $\frac{n}{۲}+۱$، ...، $\frac{n}{۲}+\frac{n}{۲}-۱$ می‌باشد و اگر n فرد باشد آن‌گاه جواب، سنگ‌های $\frac{n+۱}{۲}$، $\frac{n+۱}{۲}+۱$، ...، $\frac{n-۱}{۲}+\frac{n+۱}{۲}-۱$ می‌باشد.

گام سوم

اگر تعداد طرق رسیدن قورباغه به سنگ iـاُم را a_i بنامیم آن‌گاه بین a_i و a_jهای قبل از a_i چه رابطه‌ای برقرار است؟

با توجه به گام‌های قبلی معلوم است که اگر i زوج باشد آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$a_i = a_{i-۱} + a_{i-۲} + \cdots + a_{\frac{i}{۲}}$$

و اگر i فرد باشد آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$a_i = a_{i-۱} + a_{i-۲} + \cdots + a_{\frac{i+۱}{۲}}$$

گام چهارم

با توجه به مقدار $a_۲$ و $a_۳$ که به راحتی به‌دست می‌آیند $a_۴$، $a_۵$، $a_۶$ و $a_۷$ را بیابید.

مقادیر a_i به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_۲ = ۱ \quad , \quad a_۳ = a_۲ = ۱ \quad , \quad a_۴ = a_۳ + a_۲ = ۱ + ۱ = ۲$$

$$a_۵ = a_۴ + a_۳ = ۲ + ۱ = ۳ \ , \ a_۶ = a_۵ + a_۴ + a_۳ = ۳ + ۲ + ۱ = ۶$$

$$a_۷ = a_۶ + a_۵ + a_۴ = ۶ + ۳ + ۲ = ۱۱$$

۳

گام اول

مسأله را به این صورت حالت‌بندی کنید که آن سه زیرمجموعه آیا باید هر سه عضوی مشترک داشته باشند و یا می‌توانند دوبه‌دو اشتراک داشته ولی عضوی در هر سه تای آن‌ها مشترک نباشد.

آن سه زیرمجموعه به یکی از دو شکل زیر است:

I: به شکل $\{a, b\}$، $\{a, c\}$ و $\{b, c\}$ باشند.

II: به شکل $\{a, b\}$، $\{a, c\}$ و $\{a, d\}$ باشند.

گام دوم

تعداد طرق اختصاص دادن ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ به حروف a، b و c را در حالت اول و به حروف a، b، c و d را در حالت دوم بررسی کنید.

در حالتِ I باید از ۶ رقم داده شده، ۳ رقم انتخاب کنیم که این کار به $\binom{۶}{۳}$ یعنی ۲۰ طریق، شدنی است. اختصاص دادن سه رقم منتخب به سه حرفِ a، b و c به یک طریق ممکن است، چون نقش a، b و c در حالتِ I همگی یکسان است.

در حالتِ II باید از ۶ رقم داده شده ۴ رقم انتخاب کنیم که این کار به $\binom{۶}{۴}$ یعنی ۱۵ طریق، شدنی است. در چهار حرف موجود، نقش حرفِ a با بقیه متفاوت است، بنابراین یکی از چهار رقم را به a و سه رقم دیگر را به سه حرفِ متشابه b، c و d اختصاص می‌دهیم، بنابراین جواب این حالت برابر $۱ \times ۴ \times \binom{۶}{۴}$ یعنی ۶۰ می‌باشد.

گام سوم

با توجه به حالت‌بندیِ فوق جواب نهایی را بیابید.

با توجه به حالت‌بندی گام‌های قبلی جواب موردنظر برابر $۶۰ + ۲۰$ یعنی ۸۰ می‌باشد. البته لازم به ذکر است که تعداد جواب‌ها در حالتِ II را به شکل زیر نیز می‌توان پیدا کرد:

$$۶۰ = \binom{۵}{۳}.\binom{۶}{۱} = \left(\begin{array}{c}\text{انتخاب سه رقم از ۵ رقم باقی‌مانده}\\ \text{و اختصاص آن‌ها به سه حرف یکسان}\end{array}\right) \text{ و } \left(\begin{array}{c}\text{انتخاب یک رقم از ۶ رقم و اختصاص}\\ \text{آن به حرفِ متفاوت } a\end{array}\right)$$

۴

گام اول

می‌دانیم هر عدد طبیعی مانند n به یکی از سه شکل $۳k$، $۳k + ۱$ و $۳k + ۲$ می‌باشد. در هر یک از سه حالت فوق حاصل $[\frac{n^۲}{۳}]$ را بیابید.

اگر $n = ۳k$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$[\frac{n^۲}{۳}] = [\frac{۹k^۲}{۳}] = [۳k^۲] = ۳k^۲$$

اگر $n = ۳k + ۱$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$[\frac{n^۲}{۳}] = [\frac{۹k^۲ + ۶k + ۱}{۳}] = [۳k^۲ + ۲k + \frac{۱}{۳}] = ۳k^۲ + ۲k = k(۳k + ۲)$$

و بالاخره اگر $n = ۳k + ۲$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$[\frac{n^۲}{۳}] = [\frac{۹k^۲ + ۱۲k + ۴}{۳}] = [۳k^۲ + ۴k + ۱ + \frac{۱}{۳}]$$
$$= ۳k^۲ + ۴k + ۱ = (۳k + ۱)(k + ۱)$$

گام دوم

با توجه به حالت‌بندیِ قسمت قبل در چه مواقعی $[\frac{n^۲}{۳}]$ اول می‌شود؟

در حالت اول، $۳k^۲$ فقط وقتی اول می‌شود که $k = ۱$.

در حالت دوم، $k(۳k + ۲)$ فقط وقتی اول می‌شود که $k = ۱$.

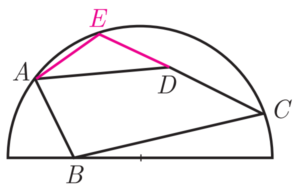
در حالت سوم، حاصلِ $(۳k + ۱)(k + ۱)$ هرگز عددی اول نمی‌شود.

بنابراین حاصل $[\frac{n^۲}{۳}]$ فقط به ازای $n = ۳$ و $n = ۴$ عددی اول می‌شود که به‌ترتیب برابرِ ۳ و ۵ به‌دست می‌آید.

۵

گام اول

اولاً استدلال کنید که ۴ رأس آن چهارضلعی باید بر روی محیط نیم‌دایره باشند.



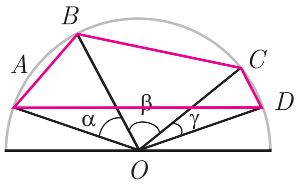
اگر رأسی مانند D از آن چهارضلعی در داخل نیم‌دایره باشد، آن‌گاه CD را امتداد می‌دهیم تا محیط نیم‌دایره را در نقطه‌ای مانند E قطع کند. معلوم است که مساحت چهارضلعیِ $ABCD$ از مساحت چهارضلعیِ $ABCD$ بیشتر است.

گام دوم

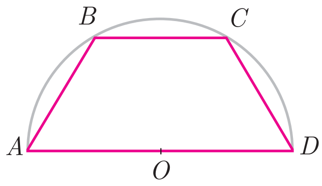
با در نظر گرفتن چهار رأس چهارضلعی بر روی محیط نیم‌دایره و با در نظر گرفتن نابرابریِ $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq ۳\sin(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳})$ برای زوایای α، β و γ با شرط $\alpha+\beta+\gamma \leq ۱۸۰^\circ$ (که به نامساوی ینسن معروف است) مسأله را حل کنید.

با فرض این‌که O مرکز نیم‌دایره باشد، با رسم شعاع‌های OA، OB، OC و OD خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &\leq S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} \\ &= \frac{۱}{۲}r^۲.\sin\alpha + \frac{۱}{۲}r^۲.\sin\beta + \frac{۱}{۲}r^۲.\sin\gamma \end{aligned}$$



$$= \frac{۱}{۲}[\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma]$$
$$\leq \frac{۱}{۲} \times ۳\sin(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳})$$
$$\leq \frac{۳}{۲}\sin(\frac{۱۸۰^\circ}{۳}) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$



حالت تساوی موقعی اتفاق می‌افتد که چهارضلعی به شکل مقابل ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی باشد که طول هر ساق آن ۱، طول قاعده‌ی کوچکش ۱ و طول قاعده‌ی بزرگش برابر ۲ باشد:

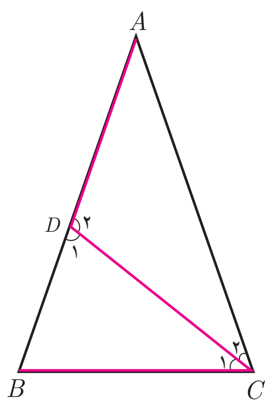
۶

راه‌حل اول:

گام اول

با تلاش بر روی زاویه‌های داخلی و خارجی مثلث‌ها، اندازه‌ی هر یک از زاویه‌های مثلث را بیابید.

اگر مقدار $\hat{C}_۱$ را برابر α در نظر بگیریم، آن‌گاه:



$$\angle C_۱ = \angle C_۲ \;\Rightarrow\; \angle C_۲ = \alpha$$
$$\angle B = \angle C \;\Rightarrow\; \angle B = ۲\alpha$$
$$\angle C_۲ = \angle A \;\Rightarrow\; \angle A = \alpha$$
$$\angle D_۲ = \angle C_۱ + \angle B = \alpha + ۲\alpha = ۳\alpha$$
$$\angle D_۱ = \angle B = ۲\alpha$$
$$\angle D_۱ + \angle D_۲ = ۱۸۰^\circ \;\Rightarrow\; ۲\alpha + ۳\alpha = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow\; ۵\alpha = ۱۸۰^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = ۳۶^\circ$$

گام دوم

با روابط مثلثاتی $\sin ۱۸^\circ$ را پیدا کرده و مسأله را حل کنید.

$$\sin ۳۶^\circ = \cos ۵۴^\circ \;\Rightarrow\; \sin[۲(۱۸^\circ)] = \cos[۳(۱۸^\circ)]$$

$$\Rightarrow\ ۲\sin ۱۸^\circ.\cos ۱۸^\circ = ۴\cos^{۳} ۱۸^\circ - ۳\cos ۱۸^\circ$$
$$\Rightarrow\ ۲\sin ۱۸^\circ = ۴\cos^{۲} ۱۸^\circ - ۳ = ۴(۱ - \sin^{۲} ۱۸^\circ) - ۳$$
$$\Rightarrow\ ۴\sin^{۲} ۱۸^\circ + ۲\sin ۱۸^\circ - ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow\ \sin ۱۸^\circ = \frac{-۲+\sqrt{۲۰}}{۸} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$$

در مسأله‌ی اصلی با رسم ارتفاع وارد بر قاعده مقدار زاویه‌ی $\hat{A}_۱$ برابر ۱۸° به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{۲BH}{AB} = ۲\sin ۱۸^\circ = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

راه‌حل دوم:

گام اول

قضیه نیمسازها را به یاد آورید و با نوشتن تناسب‌های مربوطه مسأله را حل کنید.

بدون آن‌که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود مقدار ساق مثلث ABC را برابر واحد در نظر گرفته و مقدار AD را برابر x و مقدار BD را برابر y در نظر می‌گیریم:

$$x + y = ۱ \qquad (۱)$$
$$CD = \text{نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{۱} \Rightarrow y = x^{۲} \qquad (۲)$$

با استفاده از دو رابطه‌ی به‌دست آمده خواهیم داشت:

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۱ - x = x^{۲} \Rightarrow x = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{x}{۱} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

۷

گام اول

شرط لازم و کافی برای آن‌که نمودارهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ با یکدیگر نقطه‌ی تلاقی نداشته باشد را بیان کنید.

شرط لازم و کافی برای چنین امری آن است که دستگاه زیر جواب نداشته باشد:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

به عبارت دیگر معادله‌ی $f(x) = g(x)$ در مجموعه اعداد حقیقی فاقد جواب باشد.

گام دوم

دستگاه مربوطه را تشکیل داده و پس از به‌دست آوردن معادله‌ی لازم، شرط لازم و کافی برای ریشه نداشتن معادله‌ای درجه ۲ در مجموعه اعداد حقیقی را بنویسید.

$$\begin{cases} y = x^۲ - ۲ax + ۱ \\ y = ۲ba - ۲bx \end{cases} \Rightarrow x^۲ - ۲ax + ۱ = ۲ba - ۲bx$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲(b-a)x + ۱ - ۲ab = ۰$$

معادله‌ی درجه دوم فوق باید فاقد ریشه باشد، در نتیجه مبین آن باید منفی باشد:

$$\Delta < ۰ \Rightarrow (b-a)^۲ - (۱ - ۲ab) < ۰ \Rightarrow a^۲ + b^۲ < ۱$$

می‌دانیم معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $O(۰,۰)$ و به شعاع ۱ می‌باشد. بنابراین مجموعه نقاط

$$A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^۲ | a^۲ + b^۲ < ۱\}$$

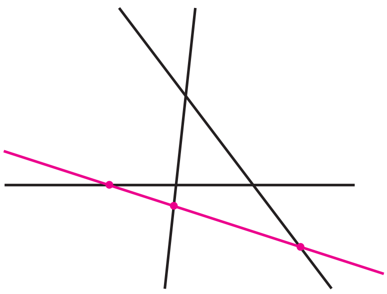
مجموعه نقاط درون دایره‌ای به شعاع ۱ است که مساحت آن برابر با $\pi(۱)^۲$ یعنی π می‌باشد.

۸

گام اول

ابتدا فرض کنید ۳ خط دوبه‌دو متقاطعی در صفحه موجود باشد. می‌دانیم آن سه خط صفحه را به ۷ ناحیه تقسیم کرده است. استدلال کنید که با رسم خط چهارم که با هیچ‌یک از خطوط قبلی موازی نبوده و هیچ سه خطی همرس نباشند به تعداد نواحی قبلی چند ناحیه افزوده می‌شود.

خط چهارم سه خط قبلی را در سه نقطه قطع می‌کند و با هر نقطه‌ی تقاطعی یک ناحیه از ناحیه‌های قبلی به دو قسمت تقسیم می‌شود. باید دقت نمود که با نقطه‌ی تقاطع آخر یک ناحیه‌ی دیگر نیز به تعداد نواحی اضافه می‌شود، بنابراین:



$$a_۴ = a_۳ + (۳) + ۱ = ۷ + (۳) + ۱ = ۱۱$$

گام دوم

به نظر شما اگر a_k نشان‌گر تعداد نواحی حاصل از تقاطع k خط در یک صفحه باشد، با رسم خط $(k+1)$ـاُم حداکثر چند ناحیه به نواحی قبلی اضافه می‌شود؟

با توجه به این‌که خط $(k+1)$ـاُم خطوط قبلی را حداکثر در k نقطه قطع می‌کند و با توجه به استدلال گام قبلی معلوم می‌شود که حداکثر نواحی ایجاد شده برابر $a_k + k + 1$ می‌باشد به عبارت دیگر رابطه‌ی $a_{k+1} = a_k + k + 1$ برقرار است.

گام سوم

اگر مجموعاً ۴ خط افقی و عمودی داشته باشیم در حالتی که دو تا از آن‌ها عمودی باشد و ۲ تا افقی، تعداد نواحی بیش‌تری خواهیم داشت و یا در حالتی که سه تا از آن‌ها عمودی و یکی افقی باشد؟

در حالت اول تعداد نواحی برابر ۹ و در حالت دوم تعداد نواحی برابر ۸ می‌باشد.

گام چهارم

با توجه به گام قبلی به نظر می‌رسد بیش‌ترین نواحی را موقعی خواهیم داشت که ۶ تا از خطوط عمودی، ۶ تا از آن‌ها افقی و ۶ تای دیگر موازی نیمساز ربع اول و سوم باشند. در این حالت تعداد نواحی ایجاد شده را به‌دست آورید.

۶ خط عمودی صفحه را به ۷ ناحیه تقسیم می‌کند.

هر یک از خطوط افقی هر یک از خطوط قبلی را در ۶ نقطه قطع می‌کنند، بنابراین با رسم خط اول ۷ ناحیه، با رسم خط دوم ۷ ناحیه‌ی دیگر، ...و بالاخره با رسم خط ششم نیز ۷ ناحیه به آن نواحی اضافه شده و با اضافه شدن ۷×۶ یعنی ۴۲ ناحیه به نواحی قبلی تعداد کل نواحی به ۴۹ می‌رسد.

هر یک از خطوط مورب را می‌توان چنان رسم کرد که اولاً هر ۱۲ خط قبلی را در ۱۲ نقطه قطع کرده و هیچ سه خطی همرس نباشند که در این‌صورت با رسم هر خط، به نواحی قبلی ۱۳ ناحیه اضافه می‌شود. بنابراین تعداد کلِ نواحیِ ایجاد شده برابر خواهد بود با:

$$? = ۴۹ + ۶ \times ۱۳ = ۴۹ + ۷۸ = ۱۲۷$$

گام پنجم

با توجه به نابرابری $m^۲ + n^۲ + k^۲ \geq \frac{(m+n+k)^۲}{۳}$ که آن را اثبات می‌کنید استدلال کنید که تعداد کل نواحی ایجاد شده نمی‌تواند از ۱۲۷ بیش‌تر باشد.

ابتدا نابرابری اشاره شده را اثبات می‌کنیم:

$$m^۲ + n^۲ + k^۲ \geq \frac{(m+n+k)^۲}{۳}$$

$$\begin{aligned}
&\iff 3m^2+3n^2+3k^2 \geq m^2+n^2+k^2+2mn+2mk+2nk\\
&\iff m^2-2mn+n^2+m^2-2mk+k^2+n^2-2nk+k^2 \geq 0\\
&\iff (m-n)^2+(m-k)^2+(n-k)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

چون تمام روابط برگشت‌پذیر بوده و نابرابری آخر واضح است پس اثبات نابرابری، تمام است فقط باید دقت نمود که تساوی موقعی اتفاق می‌افتد که $m=n=k$.

اما برای استدلال دوم گام، فرض کنید که تعداد خطوط افقی، عمودی و مورب به‌ترتیب برابر m، n و k باشد در آن صورت حداکثر تعداد کل نواحی ایجاد شده برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned}
? &= (m+1)(n+1)+(m+n+1)k\\
&= (m+n+k)+(mn+mk+nk)+1\\
&= (m+n+k)+\frac{(m+n+k)^2}{2}-\frac{(m^2+n^2+k^2)}{2}+1
\end{aligned}$$

حال از نابرابری اشاره شده استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow ? &\leq (m+n+k)+\frac{(m+n+k)^2}{2}-\frac{(m+n+k)^2}{6}+1\\
&= 18+162-54+1=127
\end{aligned}$$

۹

گام اول

نقطه‌ای از مجموعه A و نقطه‌ی دیگری را از مجموعه‌ی B در نظر گرفته و با جاگذاری آن‌ها در رابطه گزینه و یا گزینه‌هایی را رد کنید.

$(0,0)\in A\,,\ (1,0)\in B \Rightarrow\ (1,0)\in A\oplus B \Rightarrow$ [رد گزینه‌های الف و ج]

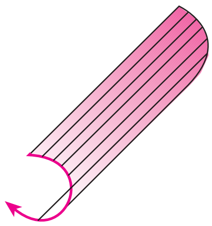
$(1,1)\in A\,,\ (1,0)\in B \Rightarrow\ (2,1)\in A\oplus B \Rightarrow$ [رد گزینه‌ی ب]

$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\in A\,,\ (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\in B \Rightarrow\ (\sqrt{2},\sqrt{2})\in A\oplus B \Rightarrow$ [رد گزینه‌ی د]

گام دوم

عمل یاد شده در صورت مسأله را شبیه‌سازی کرده و مسأله را به‌صورت مستقیم و بدون رد گزینه حل کنید.

مسأله مانند آن است که دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات را با برداری در جهت نیمساز ربع اول بکشیم (انتقال دهیم) و یا تصور کنید که نیمساز کشیده شده در مجموعه‌ی A را با دایره‌ی موجود در مجموعه‌ی B دوران دهیم (شکل مقابل) معلوم است که شکل نهایی همانند شکل موجود در گزینه‌ی ه خواهد بود.



۱۰

گام اول

تصور کنید به شما گفته‌اند که دو پاره‌خط مساوی به طول d در صفحه بکشید تا نفر مقابل شما به دلخواه خود به آن دو پاره‌خط جهت داده و تبدیل به بردار کند. طرف مقابل می‌خواهد جهت‌ها را چنان انتخاب کند که برایند بردارها بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. در چه حالتی این برایند ماکزیمم و در چه حالی می‌نیمم خواهد بود؟

در حالتی که دو پاره‌خط در یک راستا باشند طرف مقابل با انتخاب جهت‌های یکسان برای آن دو پاره‌خط به برداری به طول $۲d$ خواهد رسید و در حالتی که دو پاره‌خط را عمود بر هم بکشید طول بردار برایند دو بردار به‌دست آمده برابر $\sqrt{۲}d$ خواهد شد.

گام دوم

با تصوری که در گام قبلی از معادل‌سازی بردار به‌دست آمد ثابت کنید جواب مسأله به‌ترتیب همان اعداد $۲d$ و $\sqrt{۲}d$ می‌باشد.

اگر دقت کنید $A \oplus B$ شامل مجموعه نقاطی است که از انتهای بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به‌دست می‌آید. $\vec{a}$ برداری دلخواه است که ابتدا و انتهای آن نقاطی از A باشد و $\vec{b}$ نیز برداری است که ابتدا و انتهایش در B باشد. معلوم است که بیش‌ترین مقدار $\vec{a} + \vec{b}$ برابر $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ است و آن موقعی است که آن دو بردار در یک راستا و جهت باشند که این مقدار برابر $۲d$ است و اما کم‌ترین طول برایند برای موقعی است که دو بردار بر هم عمود شوند (البته باید توجه داشت که زاویه‌ی بین دو بردار منفرجه نیست زیرا اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه باشد آن‌گاه زاویه‌ی بین بردار $\vec{a}$ و $(-\vec{b})$ حاده بوده و برایند بزرگ‌تری دارد). برایند دو بردار با طول d که بر هم عمودند برابر $\sqrt{۲}d$ می‌باشد.