



برگی از درخت المپیاد ریاضی و کامپیوتر

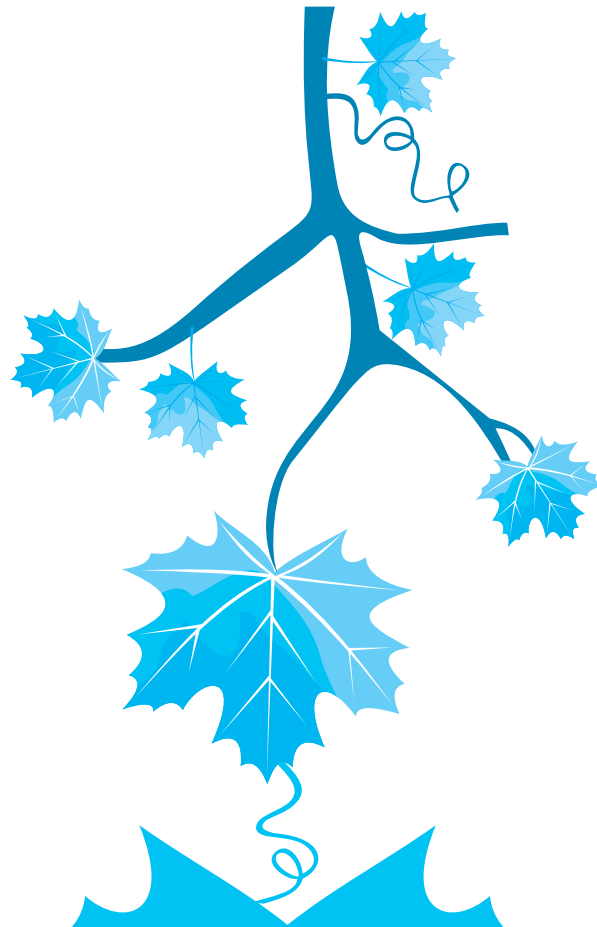
آنالیز ترکیبی

مؤلف

عباس ثروتی



انجمنارت خونتخون



درخت المپیاد درختی است که توسط
انتشارات خوشخوان کاشته شده و هر یک
از کتاب های این پروژه برگگی از آن است.
وظیفه ما نگهداری و آبیاری این درخت است. امیدواریم
با عنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده
وبه بار واقعی بنشیند. فراموش نکنید که بار و میوه ی
این درخت شما
عزیزان می باشید.
التماس دعا



پروژهی درخت المپیاد

اعتقاد بر این است که شروع فعالیت‌های المپیاد به صورت حرفه‌ای، باید از ابتدای دوره‌ی دبیرستان شروع شود. اکثر المپیادهای علمی در زمستان سال سوم دبیرستان تعیین تکلیف می‌شوند. بنابراین از شروع دبیرستان تا اواسط سال سوم حدوداً ۸ ترم تحصیلی می‌شود (با احتساب فصل و ترم تابستان) که لازم است برنامه‌ریزی دقیقی برای این چند ترم انجام شود.

انتشارات خوشخوان این برنامه‌ریزی را در قالب پروژه‌ی درخت المپیاد انجام داده است که هر شاخه از درخت، مبحثی از آن المپیاد و هر برگ از آن شاخه شماره‌ای از آن مبحث می‌باشد.

به عنوان مثال اپتیک (۱) کتابی است که در یک ترم تحصیلی در یک کلاس ممتاز می‌توان برای داوطلبان المپیاد فیزیک تدریس کرد.

با عنایات حضرت حق و با کمک تنی چند از همکاران گرامی کتب مربوط به این درخت در هر رشته‌ای از المپیاد معرفی خواهد شد.

منتظر پیشنهادات و نظرات شما سروران هستیم.

گروه المپیاد

انتشارات خوشخوان



مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش‌هایی هستند که کم‌وبیش در سرتاسر دنیای پهناور به صورت داخلی و بین‌المللی برگزار می‌شود و سال به سال به تنوع، جذبه و عظمت آن‌ها افزوده می‌شود. یکی از این همایش‌های باشکوه که هر سال در چندین رشته در سطح دانش‌آموزان سنوات آخر دوره متوسطه برگزار می‌شود المپیادهای علمی می‌باشد که قدیمی‌ترین آن المپیاد ریاضی بوده و از سال ۱۹۵۹ آغاز و تا به حال ادامه داشته است.

در حال حاضر نتیجه‌ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص‌های قدرت علمی آن کشور محسوب شده و نفرات ممتاز این المپیادها به راحتی جذب دانشگاه‌ها و آکادمی‌های ممتاز جهان شده و پس از گذشت سنواتی چند به موفقیت‌های چشم‌گیری نایل می‌شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته‌های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال‌های نه‌چندان دور از مدال‌آوران این المپیادها بوده‌اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ در المپیاد ریاضی جهان که در کشور کوبا برگزار می‌شد شرکت کرده و با کسب یک مدال برنز به مقام ۲۶ جهان نائل آمد که تعجب همگان را برانگیخت چرا که در آن سال ایران درگیر جنگ تحمیلی بوده و جهانیان به غیر از جنگ و درگیری چیزی از ایران سراغ نداشتند و درخشش دانش‌آموزان ایران در آن سال و سنوات بعد نگاه‌ها را به سمت ایران معطوف کرده و چشم‌خفته آن‌ها را تا حدود زیادی بیدار کرد. همانطور که از رسانه‌های گروهی مطلع شده‌اید در تمام المپیادهای علمی تیم اعزامی کشور عزیزمان در سنوات گذشته جزء کشورهای برتر بوده و ضمن کسب مدال‌های رنگارنگ رتبه‌های بسیار درخشانی از جمله رتبه اول را حائز شده‌اند.

نحوه‌گزینش نفرات اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگرند به این صورت که در ابتدا در مسابقه‌ای سراسری تحت عنوان مرحله اول که معمولاً به صورت پرسش‌های چندگزینه‌ای مطرح می‌شود حدوداً هزار نفر پذیرفته شده و در رقابتی معمولاً تشریحی که مرحله‌ی دوم نامیده می‌شود شرکت می‌کنند. در این مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و در دوره‌ی تابستانی در باشگاه دانش‌پژوهان جوان که متولیان برگزاری تمام المپیادهای علمی می‌باشد شرکت کرده و پس از گذراندن این دوره مرحله‌ی سوم آزمون برگزار شده و عده‌ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عده‌ای مدال نقره و عده‌ای دیگر مدال برنز

کسب می‌کنند (در این مرحله معمولاً هم‌ه‌ای افراد شرکت‌کننده در دوره مدال کسب می‌کنند) دارندگان مدال طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضای تیم اعزامی شناسایی می‌شوند. دارندگان مدال طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه‌ی تحصیل می‌دهند اما دارندگان مدال‌های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان در کنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه خود در رقابت می‌کنند با این تفاوت که این افراد سهمیه‌ی ویژه‌ای در پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه‌ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش‌پژوهان جوان تشریح شده است.

متأسفانه در سال‌های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت‌های المپیاد جبهه می‌گیرند و ادعا می‌کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت در کنکور سراسری بوده و هرچه دانش‌آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند از کنکور فاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدال طلا (که بسیار محتمل است) آینده‌ی خود را تیره کرده است در حالی که با تحقیقی که در سال‌های گذشته انجام شده است فعالیت در زمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکور نیست بلکه مسیر فعالیت برای کسب رتبه مناسب در کنکور را بسیار هموارتر می‌سازد به عنوان مثال می‌توانید تمام مدال‌آوران نقره و برنز و یا حتی آن‌هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ولی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را در یک رشته شناسایی کرده و موفقیت‌های تحصیلی آن‌ها را در دانشگاه‌ها جویا شوید که نگارنده‌ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

به هر حال ادعا این است که فعالیت دانش‌آموز در یک رشته از رشته‌های المپیاد فواید بسیاری دارد که به تعدادی از آن‌ها به صورت گذرا اشاره می‌شود:

۱. همان‌طور که خداوند به بشرتن سالم داده و انتظار می‌رود با ورزش‌ها و نرمش‌های مناسب از این نعمت خدادادی محافظت شود به هر دانش‌آموزی نیز استعدادی داده است که باید شکوفا و بهره‌ور شود. اغلب باشگاه‌های کشور اعم از خصوصی و دولتی داوطلب زیادی در رشته‌های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت در یکی از رشته‌های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدن‌سازی و... می‌باشند که وقتی از آن افراد راجع به اهدافشان از این فعالیت سؤال می‌شود سالم‌نگه داشتن بدن را عنوان داشته و انتخاب شدن در تیم ملی را در نهایت عنوان می‌کنند. چه بسا افرادی که در این رشته‌ها فعالیت می‌کنند و هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی‌کنند که وقتی از این افراد راجع به موفقیت‌هایشان سؤال می‌شود هرگز خود را ناموفق معرفی نمی‌کنند و همین‌که توانسته‌اند از بدن سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می‌دانند بنابراین فعالیت‌های از زمینه‌های المپیاد چه در نهایت به کسب مدال منجر شود و یا نشود همین‌که استعداد خدادادی پرورش می‌یابد موفقیتی است بس بزرگ.

۲. ❖ کتب درسی به اذعان اکثر کارشناس‌ها و اساتید سال به سال ساده‌تر شده و برای عموم دانش‌آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش‌آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ‌عنوان اغناکننده نمی‌باشند لذا لازم است این سری از دانش‌آموزان فعالیت ویژه‌ای را در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود داشته‌باشند تا احساس کنند این فعالیت‌ها برای آن‌ها اغناکننده است.

۳. ❖ فعالیت‌های المپیادی که در نهایت به حل سوالات پیچیده و عمیق در رشته‌ی مربوطه می‌شود باعث می‌شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش‌آمده در زندگی به دید یک مسأله‌ی المپیاد نگاه کرده و در حل آن نسبت به سایر رقبا موفق‌تر باشند. تحقیقات نشان می‌دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی از شاخه‌های المپیاد را دنبال می‌کنند (نه به نیت کسب مدال بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق‌ترند.

۴. ❖ زیربنای اکثر دروس پیش‌دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می‌شود بنابراین افرادی که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می‌کنند در دوره پیش‌دانشگاهی با پایه‌ی بسیار قوی‌تری با دروس مواجه می‌شوند و نسبت به رقبای خود راحت‌تر از عهده آن‌ها برمی‌آیند.

۵. ❖ با توجه به مصوبه‌های موجود، کسب مدال در یکی از المپیاد‌های علمی (حتی مدال برتر) باعث اعطای امتیازهای ویژه‌ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه‌های سراسری می‌شود که جزئیات آن در سایت‌های معتبر مخصوصاً سایت باشگاه دانش‌پژوهان جوان موجود است.

۶. ❖ همچنین با توجه به مصوبه‌های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به عضویت نهادهای مختلف از جمله بنیاد ملی نخبگان درمی‌آیند که با رجوع به سایت‌های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق‌یافته به اعضا، را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مفتخر است از بدو تأسیس به فکر تدوین و تألیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال و با بهره‌گیری از اساتید مجربی که خود در سنواتی نه چندان دور مدال آوری یکی از المپیادهای علمی بوده‌اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد از کسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین و تألیف شود که در آن هر کتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت المپیاد نام گرفته است و هر کتاب از این پروژه که در اختیار دارید برگی از آن درخت خواهد بود.

بدیهی است انجام چنین پروژه‌ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می‌طلبد لذا لازم است از تمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده‌اند، تشکر و قدردانی می‌نمایم و در نهایت نیز از عوامل زحمت‌کش انتشارات اعم از مشاورین، حروف چین‌ها، طراحان و کارمندان و کارگران عزیز کمال امتنان را دارم.



با تشکر

رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلف



ریاضیات علمی جذاب و گسترده می‌باشد و شاخه‌های فراوانی دارد. یکی از زیباترین و مهم‌ترین شاخه‌های ریاضیات، ترکیبیات می‌باشد و آنالیز ترکیبی یکی از مباحث ترکیبیات است. در واقع آنالیز ترکیبی علم شمارش است و در آن به بررسی روش‌ها و ایده‌های حل مسائل شمارشی پرداخته می‌شود.

هدف از تدوین این کتاب، ارائه‌ی مجموعه‌ای آموزش‌محور جهت آشنایی با تعاریف، اصول، قضایا و از همه مهم‌تر ایده‌های حل مسائل آنالیز ترکیبی می‌باشد. بنابراین از ارائه‌ی آموزش‌های طولانی و پاسخ‌های مفصل برای مسائل اجتناب گردیده است و سعی شده تا دانش‌پژوهان از طریق حل مسائل، ایده‌ها و روش‌ها را فرا بگیرند. بر این اساس هر یک از فصل‌های این کتاب در ۶ بخش تدوین گردیده است:

● **آموزش:** این بخش به صورت مختصر و اجمالی ارائه گردیده است و تنها به بیان تعاریف، اصول و قضایا اکتفا شده است.

● **مثال‌ها:** در این بخش چند مثال ساده برای درک بهتر مطالب ارائه شده است.

● **مسائل تشریحی:** آموزش اصلی نکات، ایده‌ها و روش‌های حل مسائل در این بخش انجام می‌شود. در واقع تنها با حل این مسائل است که دانش‌پژوهان می‌توانند با سوالات و روش‌های حل آنها آشنا می‌شوند. ترتیب چینش این سوالات نیز بر پایه‌ی ایده‌ی حل آنها و نیز میزان دشواری آنهاست. بنابراین واضح است که سوالاتی که در پایان می‌آیند، دشوارتر باشند.

● **مسائل تستی:** در این بخش، کلیه‌ی مسائل مرتبط که در آزمون‌های مرحله‌ی اول المپیادهای ریاضی و کامپیوتر تا سال ۱۳۹۱ مطرح شده‌اند، جمع‌آوری و ارائه شده‌اند. دقت کنید که بعضی از این مسائل گزینه ندارند و به صورت پاسخ کوتاه و یا بلی - خیر می‌باشند.

● **پاسخ مسائل تشریحی:** در این بخش از ارائه‌ی پاسخ‌های تشریحی و کامل اجتناب شده است و تنها پاسخ نهایی سوالات ارائه شده است تا دانش‌پژوهان سعی کنند خود پاسخ‌های مسائل را به دست آورند و تنها برای بررسی درستی پاسخ خود به این بخش مراجعه کنند. دقت کنید که برای برخی از مسائل که جواب عددی ندارند و نیاز به اثبات دارند، پاسخی ارائه نشده است.

● **پاسخ مسائل تستی:** جهت آماده‌سازی دانش‌پژوهان برای شرکت در المپیادهای ریاضی و کامپیوتر و آشنایی با نحوه‌ی حل مسائل، پاسخ این سوالات به صورت تشریحی گردیده است.

در فصل دوم این کتاب، تنها به معرفی چند نمایه ریاضی پرداخته شده است، لذا شامل مثال و مسائل تستی نیست. در فصل سوم نیز مسائل تستی ارائه نشده است و تست‌های مرتبط با آن در فصل چهارم ارائه شده‌اند. هم‌چنین در فصل‌های سیزدهم و چهاردهم این کتاب تنها به بیان برخی تعاریف و نیز جمع‌بندی مباحث ارائه شده در کتاب پرداخته شده است و بنابراین شامل مثال و مسائل تستی و تشریحی نمی‌باشد.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم از زحمات خانم‌ها درنا کربلایی و فاطمه فرجی و آقای آرش کریمی که مسئولیت ویراستاری و نمونه‌خوانی این اثر را به عهده داشتند، سپاسگزاری نمایم. هم‌چنین از مدیریت محترم انتشارات خوشخوان آقای رسول حاجی‌زاده که زحمات فراوانی در جهت آماده‌سازی و چاپ این اثر کشیده‌اند کمال تشکر را دارم.

عباس ثروتی
تابستان ۹۲

فهرست مطالب



اصول شمارش ۱



فصل ۱



۴	مثال‌ها	۱-۱
۵	مسائل تشریحی	۲-۱
۱۶	مسائل تستی	۳-۱
۳۹	پاسخ مسائل تشریحی	۴-۱
۴۵	پاسخ مسائل تستی	۵-۱

معرفی چند نماد ۷۵



فصل ۲



۷۹	مسائل تشریحی	۱-۲
۸۰	پاسخ مسائل تشریحی	۲-۲

جایگشت‌های خطی ۸۱



فصل ۳



۸۳	مثال‌ها	۱-۳
۸۴	مسائل تشریحی	۲-۳
۸۶	پاسخ مسائل تشریحی	۳-۳

تبدیل ۸۷



فصل ۴



۸۹	مثال‌ها	۱-۴
۹۰	مسائل تشریحی	۲-۴
۹۳	مسائل تستی	۳-۴
۹۹	پاسخ مسائل تشریحی	۴-۴

۱۰۱ پاسخ مسائل تستی ۵-۴

۱۰۹ جایگشت های دوری

فصل ۵ 

۱۱۱ مثال ها ۱-۵
۱۱۲ مسائل تشریحی ۲-۵
۱۱۴ مسائل تستی ۳-۵
۱۱۶ پاسخ مسائل تشریحی ۴-۵
۱۱۷ پاسخ مسائل تستی ۵-۵

۱۱۹ جایگشت های با تکرار

فصل ۶ 

۱۲۱ مثال ها ۱-۶
۱۲۲ مسائل تشریحی ۲-۶
۱۲۴ مسائل تستی ۳-۶
۱۲۶ پاسخ مسائل تشریحی ۴-۶
۱۲۷ پاسخ مسائل تستی ۵-۶

۱۳۱ ترکیب

فصل ۷ 

۱۳۳ مثال ها ۱-۷
۱۳۴ مسائل تشریحی ۲-۷
۱۴۳ مسائل تستی ۳-۷
۱۵۴ پاسخ مسائل تشریحی ۴-۷
۱۵۹ پاسخ مسائل تستی ۵-۷

۱۷۷ مسئله ی مسیر

فصل ۸ 

۱۷۹ مثال ها ۱-۸

۱۸۰	مسائل تشریحی	۲-۸
۱۸۲	مسائل تستی	۳-۸
۱۹۲	پاسخ مسائل تشریحی	۴-۸
۱۹۳	پاسخ مسائل تستی	۵-۸

تعداد جواب‌های معادله‌ی خطی با

فصل ۹

ضرایب واحد ۲۰۵

۲۰۸	مثال‌ها	۱-۹
۲۰۹	مسائل تشریحی	۲-۹
۲۱۱	مسائل تستی	۳-۹
۲۱۳	پاسخ مسائل تشریحی	۴-۹
۲۱۵	پاسخ مسائل تستی	۵-۹

بسط دوجمله‌ای ۲۲۱

فصل ۱۰

۲۲۳	مثال‌ها	۱-۱۰
۲۲۴	مسائل تشریحی	۲-۱۰
۲۲۶	مسائل تستی	۳-۱۰
۲۲۷	پاسخ مسائل تشریحی	۴-۱۰
۲۲۹	پاسخ مسائل تستی	۵-۱۰

اصل شمول و عدم شمول ۲۳۱

فصل ۱۱

۲۳۴	مثال‌ها	۱-۱۱
۲۳۵	مسائل تشریحی	۲-۱۱
۲۴۰	مسائل تستی	۳-۱۱
۲۴۲	پاسخ مسائل تشریحی	۴-۱۱

۲۴۵	پاسخ مسائل تستی	۵-۱۱
۲۴۷ روابط بازگشتی	 فصل ۱۲ 	
۲۴۸	مثال‌ها	۱-۱۲
۲۴۹	مسائل تشریحی	۲-۱۲
۲۵۲	مسائل تستی	۳-۱۲
۲۵۷	پاسخ مسائل تشریحی	۴-۱۲
۲۵۹	پاسخ مسائل تستی	۵-۱۲
۲۶۷ افرارز مجموعه‌ها و اعداد	 فصل ۱۳ 	
۲۷۱ مسائل توزیع	 فصل ۱۴ 	



اصول شمارش

آنالیز ترکیبی علم شمارش است. در واقع هدف این شاخه از ریاضی شمارش تعداد راه‌های انجام یک کار است. برای این کار یک روش این است که تمام راه‌های ممکن برای انجام کار را لیست کرده و تعداد آن‌ها را بشمریم. به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم تعداد راه‌های انتخاب دو عدد متمایز یک رقمی فرد را بیابیم. یک روش برای حل این مسئله لیست کردن تمام انتخاب‌های ممکن است:

$$\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{1, 9\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}, \{5, 7\}, \{5, 9\}, \{7, 9\}$$

می‌بینید که این کار به 10 روش قابل انجام است. اما به نظر شما آیا این روش برای حل مسئله روش مناسبی است؟ اگر به جای دو عدد یک رقمی فرد خواسته‌ی مسئله یافتن تعداد روش‌های انتخاب دو عدد پنج رقمی بود، آیا باز هم به راحتی می‌توانستیم تمام حالات را لیست کنیم؟ (جالب است بدانید که برای این کار $10^{1247750}$ روش وجود دارد!) حتی اگر به اندازه‌ی کافی هم وقت داشته باشیم، ممکن است هنگام شمارش تعداد حالات لیست شده دچار اشتباه شویم و پاسخ نادرستی به دست آوریم. واضح است که این روش، روش مناسبی برای حل مسائل شمارش نیست. بنابراین هدف ما شمارش تعداد راه‌های انجام یک کار بدون نیاز به لیست کردن تمام حالت‌هاست.

مانند هر علم و مهارت دیگری، شمارش نیز دارای اصول اولیه‌ای است که پایه و اساس حل مسائل آن است که به آن‌ها «اصول شمارش» می‌گویند. قبل از بیان این اصول لازم است که در ابتدا یک اصل ابتدایی و بدیهی را بیان کنیم:

تعداد راه‌های انتخاب یک شیء از میان n شیء متمایز برابر است با n .

به عنوان مثال برای انتخاب یک نماینده برای یک کلاس ۲۴ نفره، ۲۴ روش مختلف وجود دارد. به متمایز بودن اشیاء دقت کنید. زیرا انتخاب یک شیء از میان چند شیء یکسان تنها به یک صورت ممکن است.

اکنون آماده‌ایم تا به بیان اولین اصل شمارش بپردازیم. این کار را با یک مثال شروع می‌کنیم. فرض کنید برای شام به یک رستوران می‌روید. در منوی این رستوران ۴ غذای خورشتی و ۳ غذای کبابی موجود است. به چند روش می‌توانید غذای خود را انتخاب کنید؟ واضح است که پاسخ برابر $3 + 4 = 7$ می‌باشد. شما به ۴ روش می‌توانید غذای خورشتی انتخاب کنید و به ۳ روش غذای کبابی. چون این دو کار مستقل از یکدیگر هستند و فقط یکی از آن‌ها را باید انجام دهید، بنابراین تعداد حالت‌های انجام این دو کار را با هم جمع می‌کنیم. این اصل را «اصل جمع» می‌نامیم. یعنی اگر دو کار مختلف داشته باشیم و بخواهیم یکی از آن‌ها را انجام دهیم، تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با مجموع تعداد روش‌های انجام هر کدام از کارها.

این اصل فقط محدود به دو کار نیست. به عنوان مثال اگر در رستوران علاوه بر غذاهای گفته شده، دو نوع پیتزا هم وجود داشته باشد، پاسخ برابر $9 = 2 + 4 + 3$ خواهد بود.

اصل جمع

n کار متمایز داریم. کار اول به a_1 روش، کار دوم به a_2 روش، ... و کار n ام به a_n روش قابل انجام است. در این صورت تعداد راه‌های انجام یکی از این کارها برابر است با:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

نکته ۱. از اصل جمع تنها زمانی استفاده می‌کنیم که بخواهیم فقط یکی از چند کار مستقل موجود را انجام دهیم. به عبارت دیگر از کلمه‌ی «یا» بین انجام کارها استفاده کرده باشیم.

اکنون می‌خواهیم مثال دیگری را مطرح کنیم. فرض کنید دوباره برای صرف شام به یک رستوران رفته‌اید و می‌خواهید علاوه بر غذای اصلی، دسر هم سفارش دهید. در منوی رستوران ۴ نوع غذای اصلی و ۳ نوع دسر وجود دارد. به چند طریق می‌توانید غذای اصلی و دسر خود را سفارش دهید؟ در این مثال شما دو کار را هم‌زمان انجام می‌دهید: انتخاب غذای اصلی و انتخاب دسر. این بار پاسخ برابر $12 = 3 \times 4$ می‌باشد. در واقع چون هر دو کار باید با هم انجام شوند، تعداد حالت‌های انجام آن‌ها را در هم ضرب کردیم. این همان چیزی است که آن را «اصل ضرب» می‌نامیم. به بیان دیگر تعداد روش‌های انجام هم‌زمان دو کار مستقل برابر حاصل‌ضرب تعداد روش‌های انجام هر کدام از آن‌هاست. همانند اصل



جمع، اصل ضرب نیز محدود به دو کار نیست و برای هر تعداد کار مستقل قابل بیان است. برای مثال اگر در منوی رستوران ۲ نوع پیش غذا، ۴ نوع غذای اصلی و ۳ نوع دسر وجود داشته باشد و شما تصمیم داشته باشید هر سه را سفارش دهید، پاسخ برابر $2 \times 4 \times 3 = 24$ خواهد بود.

اصل ضرب

n کار متمایز داریم. کار اول به a_1 روش، کار دوم به a_2 روش، ... و کار n ام به a_n روش قابل انجام است. در این صورت تعداد راه‌های انجام همه‌ی این کارها با هم برابر است با:

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$$

نکته ۲. از اصل ضرب تنها زمانی استفاده می‌کنیم که بخواهیم همه‌ی کارهای موجود را هم‌زمان انجام دهیم. به عبارت دیگر از کلمه‌ی «و» بین انجام کارها استفاده کرده باشیم.

اکنون به این مثال توجه کنید. فرض کنید به همان رستوران رفته‌اید و در منوی غذاها ۸ نوع غذا وجود دارد. اما سه تا از آن‌ها پیتزا هستند و شما علاقه‌ای به پیتزا ندارید. در این صورت به چند طریق می‌توانید غذای خود را سفارش دهید؟ بدیهی است که پاسخ برابر $8 - 3 = 5$ می‌باشد. در این مثال شما حالات نامساعد را از کل حالات کم می‌کنید. این کار همان چیزی است که آن را «اصل متمم» یا «اصل تفریق» می‌نامیم.

اصل متمم (اصل تفریق)

تعداد روش‌های مطلوب انجام یک کار برابر است با تعداد کل روش‌های موجود منهای تعداد روش‌های نامطلوب.

همان‌طور که دیدید اصول شمارش بسیار ساده و بدیهی می‌باشند. اما کاربردهای فراوانی در حل مسائل دارند و مسائل بسیار دشواری نیز وجود دارند که تنها با استفاده از همین اصول قابل حل می‌باشند.

مثال‌ها

۱-۱

مثال ۱-۱ به چند طریق می‌توان چهار توپ در رنگ‌های مختلف را بین سه نفر توزیع کنیم؟
 پاسخ: هر کدام از توپ‌ها را به سه روش می‌توان به یکی از افراد داد. بنابراین طبق اصل ضرب پاسخ برابر است با $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

مثال ۲-۱ در مثال قبل در چند حالت همه‌ی توپ‌ها به یک نفر نمی‌رسد؟

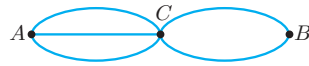
پاسخ: در یک حالت هر چهار توپ به نفر اول می‌رسند، در یک حالت همه به نفر دوم و در یک حالت همه به نفر سوم می‌رسند. بنابراین سه حالت نامطلوب داریم. در نتیجه طبق اصل متمم پاسخ برابر است با $81 - 3 = 78$.

مثال ۳-۱ فرض کنید چهار توپ مختلف و ۵ کتاب مختلف داریم و می‌خواهیم یا کتاب‌ها را بین سه نفر تقسیم کنیم و یا توپ‌ها را. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد؟
 پاسخ: توزیع توپ‌ها به $3^4 = 81$ روش ممکن است و توزیع کتاب‌ها به $3^5 = 243$ روش. بنابراین طبق اصل جمع پاسخ برابر است با $81 + 243 = 324$.

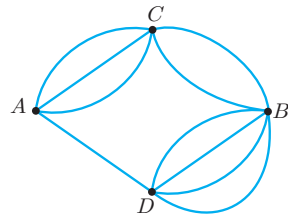


- ۱ آقای حاجی‌زاده سه پسر و دو دختر دارد. در شهر آن‌ها سه مدرسه‌ی پسرانه و چهار مدرسه‌ی دخترانه وجود دارد. او به چند طریق می‌تواند:
 (الف) یکی از فرزندان خود را به مدرسه بفرستد؟
 (ب) همه‌ی فرزندان خود را به مدرسه بفرستد؟
 (ج) یکی از پسران و یکی از دختران خود را به مدرسه بفرستد؟
 (د) همه‌ی پسران یا همه‌ی دختران خود را به مدرسه بفرستد؟
 (ه) همه‌ی فرزندان خود را به مدارس مختلف بفرستد؟
 (و) همه‌ی پسران یا همه‌ی دختران خود را به مدارس مختلف بفرستد؟
 (ز) یکی از پسران و همه‌ی دختران خود را به مدرسه بفرستد؟
 (ح) یکی از دختران و همه‌ی پسران خود را به مدارس مختلف بفرستد؟
 در یک سیرک ۲ بیر، ۵ پلنگ و ۳ مربی وجود دارد.
- ۲ (الف) به چند طریق می‌توان یک بیر، یک پلنگ و یک مربی را به صحنه فرستاد؟
 (ب) به چند طریق می‌توان یک حیوان با یک مربی به صحنه فرستاد؟
- ۳ ۶ نفر ایرانی، ۵ نفر آلمانی و ۹ نفر ایتالیایی داریم. به چند طریق می‌توان:
 (الف) سه نفر از کشورهای مختلف از میان آن‌ها انتخاب کرد؟
 (ب) دو نفر از کشورهای مختلف از میان آن‌ها انتخاب کرد؟
- ۴ به چند طریق می‌توان از میان ۷ زوج (زن و شوهر) یک مرد و یک زن انتخاب کرد به طوری که:
 (الف) همسر یکدیگر باشند؟
 (ب) همسر یکدیگر نباشند؟
- ۵ در یک بوتیک پیراهن‌هایی در سه رنگ، چهار اندازه و شش مدل وجود دارد. حداکثر چند نوع پیراهن در این بوتیک وجود دارد؟
- ۶ یک اتوبوس در ایستگاه مبدأ ۲۰ مسافر سوار کرده است و در ادامه ۵ ایستگاه وجود دارد. مسافران به چند طریق می‌توانند در ایستگاه‌ها پیاده شوند؟
- ۷ آزمون المپیاد ریاضی شامل ۳۰ سؤال پنج‌گزینه‌ای می‌باشد. یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد به طوری که:
 (الف) به همه‌ی سؤالات پاسخ دهد؟
 (ب) پاسخ به همه‌ی سؤالات لازم نباشد؟

۸ در هر یک از اشکال زیر به چند طریق می‌توان با حرکت از روی خطوط و بدون عبور از نقطه‌ی تکراری، از A به B رفت؟

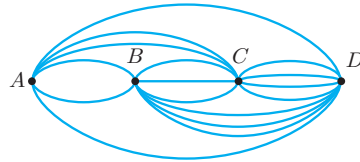


(الف)



(ب)

۹ در شکل زیر به چند طریق می‌توان بدون عبور از نقطه‌ی تکراری از A به D رسید به طوری که:



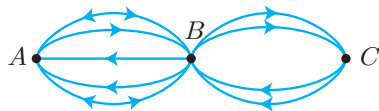
(الف) رو به جلو حرکت کنیم؟

(ب) شرط دیگری نداشته باشیم؟

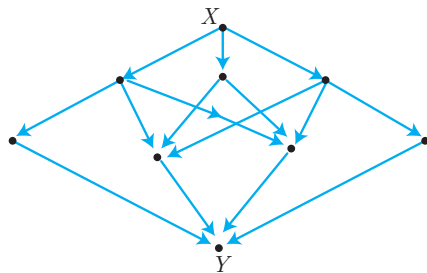
۱۰ (الف) در شکل زیر به چند طریق می‌توان از A به C رفت؟

(ب) به چند طریق می‌توان از A به C رفت و دوباره به A برگشت؟

(ج) به چند طریق می‌توان بدون عبور از مسیر تکراری از A به C رفته و به A برگشت؟

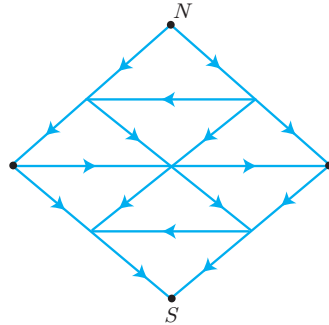


۱۱ در شکل زیر به چند طریق می‌توان از X به Y رسید؟

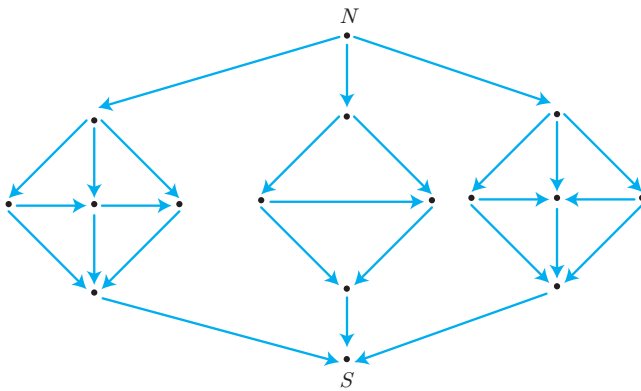




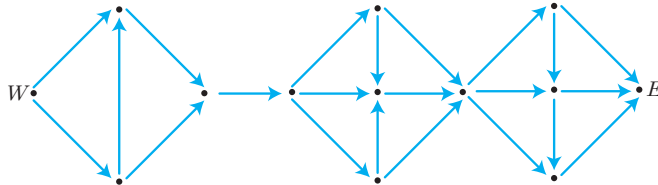
۱۲ در هر یک از نمودارهای زیر چند روش برای رسیدن از N به S وجود دارد؟
(الف)



(ب)



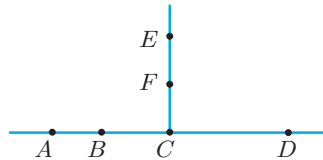
۱۳ در شکل زیر به چند طریق می‌توان از نقطه‌ی W به نقطه‌ی E رفت؟



۱۴ در شکل زیر $ABCD$ و EFC بر هم عمودند.

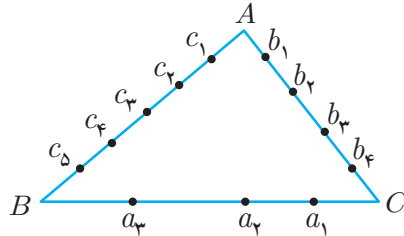
(الف) تعداد مثلث‌های قائم‌الزاویه XCY را بیابید که X و Y از بین نقاط A, B, D, E, F انتخاب شوند.

(ب) تعداد مثلث‌هایی را بیابید که رئوس آن‌ها عضو نقاط A, B, C, D, E, F باشند.



شکل زیر دوازده نقطه را روی اضلاع مثلث ABC نشان می‌دهد:

- (الف) چند پاره‌خط داریم که دو سرش عضو نقاط روی دو ضلع مختلف باشند؟
 (ب) چند مثلث داریم که رئوس‌شان عضو نقاط روی سه ضلع مختلف باشند؟



حاصل هر یک از عبارتهای زیر چند جمله‌ی متمایز خواهد داشت؟

- (الف) $(a + b)(c + d + e)$
 (ب) $(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2 + c_3)$
 (ج) $(a + b)(a + b + c + d + e)$
 (د) $(a + b + c)^2$

به چند طریق می‌توان در یک صفحه‌ی شطرنجی 8×8 :

- (الف) یک مهره‌ی رخ قرار دارد؟
 (ب) دو مهره‌ی رخ متمایز قرار دارد؟
 (ج) دو مهره‌ی رخ یکسان قرار داد؟
 (د) دو مهره‌ی رخ متمایز قرار دارد که در یک سطر یا ستون نباشند؟
 (ه) دو مهره‌ی رخ یکسان قرار دارد که در یک سطر یا ستون نباشند؟

یک ساختمان ۸ طبقه و چهار رنگ مختلف داریم. به چند طریق می‌توان هر یک از طبقات این ساختمان را با این ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که:

- (الف) هیچ شرطی نداشته باشیم.
 (ب) هیچ دو طبقه‌ی مجاور هم‌رنگ نباشند.

(الف) با حرکت دادن ۵ پرچم رنگی در بالای یک دکل علامت‌هایی داده می‌شود. اگر ذخیره‌ای نامحدود از پرچم‌هایی از ۷ رنگ مختلف وجود داشته باشد، چند علامت مختلف می‌توان ساخت؟

(ب) پاسخ قسمت قبل چه خواهد بود اگر در علامت‌هایی که داده می‌شود، پرچم‌های مجاور از یک رنگ نباشند؟



(ج) پاسخ چه خواهد بود اگر در علامت‌هایی که داده می‌شود، هر پنج پرچم رنگ‌های مختلف داشته باشند؟

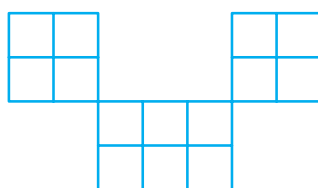
یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم.

(الف) چند حالت مختلف ممکن است پدید آید؟

(ب) در چند حالت اعداد رو شده متمایزند؟

(ج) در چند حالت مجموع اعداد رو شده زوج است؟

به چند طریق می‌توان شکل زیر را با مستطیل‌هایی به شکل  و  پر کرد؟



(الف) در صفحه‌ی شطرنجی 8×8 چند مربع 3×3 وجود دارد؟

(ب) در صفحه‌ی شطرنجی 8×8 چند مربع وجود دارد؟

به چند طریق 10 نفر با شماره‌های 1 تا 10 می‌توانند وارد 10 اتاق با شماره‌های 1 تا 10 شوند به طوری که هیچ فردی در اتاق هم‌شماره با خود نرود؟ (لازم نیست در هر اتاق فقط یک نفر وارد شود.)

(الف) چند کلمه‌ی پنج حرفی با حروف الفبای انگلیسی می‌توان ساخت؟

(ب) در چند کلمه حرف تکراری نداریم؟

(الف) چند کلمه‌ی چهار حرفی با حروف a, b, c, d, e, f می‌توان ساخت؟

(ب) در چند کلمه حروف مجاور متمایزند؟

(ج) در چند کلمه تمام حروف متمایزند؟

(الف) به چند طریق می‌توان یک کلمه‌ی هشت حرفی با حروف p, q, r, s ساخت به طوری که

دو حرف p و q و دو حرف r و s در هیچ جای کلمه کنار هم نباشند؟

(ب) در چند تا از کلمات بخش «الف» هیچ دو حرف مجاوری یکسان نیستند؟

(الف) در چند کلمه‌ی 6 حرفی با حروف انگلیسی حرف اول و آخر صدادارند؟

(ب) در چند تا از این کلمات فقط حرف اول و آخر صدادارند؟

- ۲۸** الف) با حروف a, b, c, d, e و چند کلمه می‌توان نوشت که حداقل سه و حداکثر پنج حرف داشته باشد؟
 ب) چند تا از آن‌ها حرف تکراری ندارند؟
- ۲۹** الف) چند عدد سه رقمی داریم؟
 ب) چند تا از آن‌ها زوج هستند؟
 ج) چند تا از آن‌ها فرد هستند؟
 د) چند تا از آن‌ها مضرب ۵ هستند؟
 ه) چند تا از آن‌ها مضرب ۳ هستند؟
 و) چند تا از آن‌ها رقم تکراری ندارند؟
- ۳۰** چند عدد چهاررقمی وجود دارد به طوری که:
 الف) برای آن هیچ شرطی نداشته باشیم.
 ب) از رقم‌های مختلف تشکیل شده باشد.
 ج) زوج باشد.
 د) مجموع دو رقم اول و آخر آن 10° و مجموع دو رقم دیگر آن نیز برابر 10° باشد.
- ۳۱** عدد طبیعی b را که از وارون کردن ارقام عدد طبیعی a به دست می‌آید، مقلوب a می‌نامیم (مثلاً مقلوب 3820 عدد 2083 است). چند عدد از اعداد بین 1 تا 99999 وجود دارند که مقلوب‌شان با خودشان برابر است؟
- ۳۲** الف) با ارقام $1, 2, 3, 4, 5$ چند عدد سه‌رقمی بدون رقم تکراری می‌توان ساخت؟
 ب) با ارقام $0, 1, 2, 3, 4$ چند عدد سه‌رقمی بدون رقم تکراری می‌توان ساخت؟
- ۳۳** الف) با ارقام $0, 1, 2, 3, 4, 5$ چند عدد شش‌رقمی مضرب 5 بین 200000 و 400000 با ارقام غیرتکراری می‌توان ساخت؟
 ب) با ارقام $0, 1, 2, 3, 4, 5$ چند عدد شش‌رقمی مضرب 5 با ارقام غیر تکراری می‌توان ساخت؟
- ۳۴** با ارقام $5, 6, 7, 8, 0$ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت به طوری که:
 الف) هیچ محدودیتی نداشته باشیم.
 ب) اعداد با ارقام متمایز داشته باشیم.
 ج) اعداد زوج با ارقام متمایز داشته باشیم.
 د) اعداد مضرب 9 با ارقام متمایز داشته باشیم.

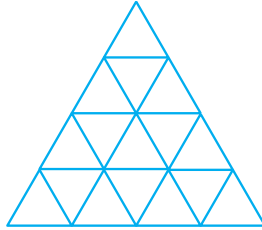


- ۳۵ چند عدد ۷ رقمی با ارقام متمایز وجود دارد به طوری که:
(الف) هیچ شرط دیگری برای آن نداشته باشیم.
(ب) فرد باشد.
(ج) زوج باشد.
- ۳۶ در چند عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز رقم یکان فرد و دهگان بزرگتر از ۴ است؟
- ۳۷ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز مضرب ۵ هستند؟
- ۳۸ در چند عدد ۷ رقمی، ۵ رقم متوالی برابر ۳ وجود دارد؟
- ۳۹ تعداد اعداد سه رقمی بزرگتر از 640 با ارقام متمایز چند تا است؟
- ۴۰ تعداد اعداد چهاررقمی کوچکتر از 6429 با ارقام متمایز چند تا است؟
- ۴۱ با ارقام ۳، ۶ و ۹ چند عدد سه رقمی می توان ساخت که هر یک از آن ها رقم تکراری داشته باشند؟
- ۴۲ چند عدد فرد بین 3000 تا 8000 شامل رقم تکراری نیستند؟
- ۴۳ در چند عدد ۵ رقمی حداقل یکی از سه رقم ۱، ۲ و ۳ وجود دارد؟
- ۴۴ در چند عدد چهار رقمی حداقل یک رقم فرد وجود دارد؟
- ۴۵ در چند عدد ۷ رقمی، رقم تکراری وجود دارد؟
- ۴۶ در چند کلمه ی ۶ حرفی با حروف انگلیسی، حداقل یکی از دو حرف آخر کلمه صدادار است؟
- ۴۷ چند عدد چهاررقمی مربع کامل نیستند؟
- ۴۸ در چند عدد ۶ رقمی، کوچکترین رقم برابر ۳ است؟
- ۴۹ تعداد رشته های دودویی به طول ۷ که شامل 10101 باشند، چند تا است؟
- ۵۰ اعداد ۱ تا 1000 را روی کاغذ نوشته ایم. رقم ۳ چند بار نوشته شده است؟
- ۵۱ کلمه های کلمات ۴ حرفی که با حروف a, b, c, d, e می توان ساخت را روی کاغذ نوشته ایم.
(الف) حرف a چند بار نوشته شده است؟
(ب) چند کلمه شامل حرف a هستند؟
- ۵۲ چند عدد چهاررقمی داریم که رقم هزارگان از ارقام دیگر کوچکتر نباشد؟
- ۵۳ عدد $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_k^{a_k}$ داده شده است که در آن p_1, p_2, \dots, p_k عوامل اول عدد n هستند. این عدد چند مقسوم علیه طبیعی دارد؟
- ۵۴ (الف) عدد 450 چند مقسوم علیه طبیعی دارد؟
(ب) چند تا از آن ها مضرب ۵ هستند؟

- ۵۵ چند مقسوم علیه از عدد $5^7 \times 3^{10} \times 2^{13}$ بر 3^{10} بخش پذیر نیستند؟
- ۵۶ کوچک ترین عدد طبیعی که ۳۹ مقسوم علیه مثبت دارد، چند است؟
- ۵۷ اعداد 3^{10} و 2^{15} چند مقسوم علیه مشترک مثبت دارند؟
- ۵۸ نشان دهید تعداد مقسوم علیه های طبیعی عدد $\underbrace{11100011}_{\text{رقم ۹۶}}$ زوج است.
- ۵۹ تمام اعداد سه رقمی که رقم صفر ندارند را با هم جمع می کنیم. مجموع چقدر است؟
- ۶۰ مجموع تمام اعداد ۴ رقمی بدون رقم تکراری را بیابید.
- ۶۱ فرض کنید $A = \{1, 2, \dots, 30\}$.
- (الف) مجموعه ای A چند زیرمجموعه دارد؟
- (ب) در چند زیرمجموعه از A ، عدد 2^0 بزرگ ترین عضو است؟
- (ج) در چند زیرمجموعه از A ، عدد ۸ کوچک ترین عضو است؟
- (د) در چند زیرمجموعه از A ، عدد 2^0 بزرگ ترین عضو و عدد ۸ کوچک ترین عضو است؟
- (ه) در چند زیرمجموعه از A ، عدد ۸ وجود دارد ولی عدد 2^0 وجود ندارد؟
- ۶۲ مجموعه ای $X = \{1, 2, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید. به چند طریق می توان دو زیرمجموعه ای A و B از X انتخاب کرد به طوری که:
- (الف) هیچ شرطی نداشته باشیم. $A \cup B = X$ (د)
- (ب) $A \subset B$ $A \cap B = \phi$ (ه)
- (ج) $A \neq B, A \subset B$ $|A \cap B| = 1$ (و)
- ۶۳ به چند طریق می توان سه زیرمجموعه ای A, B و C از مجموعه ای $X = \{1, 2, \dots, n\}$ انتخاب کرد به طوری که:
- (الف) $A \subset B \subset C$ $A \cup B \cup C = X$ (ز)
- (ب) $A \subset (B \cap C)$ $A \cap B \cap C = \phi$ (ح)
- (ج) $A \subset (B \cup C)$ $A \cap B = A \cap C = \phi$ (ط)
- (د) $A \cap C = \phi, A \subset B$ $C = \phi, A \cup B = X, A \cap B = \phi$ (ی)
- (ه) $(A \cup B) \subset C$ $A \cup C = X, A \cap B = \phi$ (ک)
- (و) $(A \cap B) \subset C$ $(A - B) \cap C = \phi$ (ل)

- ۶۴ تعداد دنباله‌هایی مانند (A_1, A_2, \dots, A_k) از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $X = \{1, 2, \dots, n\}$ را بیابید به طوری که $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = X$.
- ۶۵ مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ای از $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ می‌باشد به طوری که مجموع هیچ دو عضو متمایزی از A برابر 15 نمی‌باشد. به چند طریق می‌توان مجموعه‌ی A را ساخت؟
- ۶۶ در زبانی تنها دو حرف وجود دارد. هیچ واژه‌ای از این زبان در آغاز واژه‌ی دیگری قرار نگرفته است. این زبان شامل 3 واژه‌ی چهار حرفی، 10 واژه‌ی پنج حرفی و 30 واژه‌ی شش حرفی می‌باشد. حداکثر چند واژه‌ی هفت حرفی در این زبان داریم؟
- ۶۷ (الف) به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول 4×4 را با اعداد صفر و یک پرکرد به طوری که مجموع اعداد هر سطر و هر ستون زوج باشد؟
 (ب) به چند طریق می‌توان اعداد صفر و یک را در خانه‌های یک جدول 10×15 قرار داد به طوری که مجموع هر 4 عدد متوالی در یک سطر یا یک ستون عددی زوج باشد؟
 (ج) به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول 10×15 را با اعداد 1 تا 6 پرکرد به طوری که مجموع هر 4 عدد متوالی در یک سطر زوج و مجموع هر 3 عدد متوالی در یک ستون بر 3 بخش‌پذیر باشد؟
- ۶۸ به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول $m \times n$ را با اعداد $+1$ و -1 پرکرد به طوری که حاصل ضرب اعداد هر سطر -1 و حاصل ضرب اعداد هر ستون نیز -1 باشد؟
- ۶۹ هر عدد گویا را می‌توان به صورت یک کسر که صورت و مخرج آن نسبت به هم اولند، نمایش داد. چند عدد گویا بین صفر و یک وجود دارد که حاصل ضرب صورت و مخرج نمایش کسری آن‌ها برابر $20!$ شود؟
- ۷۰ به چند طریق می‌توان 8 خانه از یک جدول 8×8 را سیاه کرد به طوری که هیچ دو خانه‌ی سیاهی در یک سطر یا ستون نباشند و در ضمن هیچ یک از چهار خانه‌ی واقع در گوشه‌های جدول سیاه نباشند؟
- ۷۱ در چند عدد چهاررقمی مجموع دو رقم سمت چپ با مجموع دو رقم سمت راست عدد برابر است؟
- ۷۲ به چند طریق می‌توان مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 1361\}$ را به سه زیرمجموعه‌ی ناتهی افزایش داد به طوری که در هیچ یک دو عدد متوالی وجود نداشته باشد؟
- ۷۳ به چند طریق می‌توان تعدادی از خانه‌های یک جدول 8×8 را سیاه کرد به طوری که برای هر خانه‌ی سیاه تمام خانه‌های هم‌سطر یا تمام خانه‌های هم‌ستون آن نیز سیاه باشند؟

۷۴ به چند طریق می‌توان در ۱۶ مثلث شکل زیر اعداد 0 یا 1 را نوشت به طوری که مجموع اعداد موجود در مثلث‌های مجاور هر مثلث، زوج باشد؟ (دو مثلث مجاورند اگر در یک ضلع مشترک باشند).



۷۵ روی عرض رودخانه‌ای 20 سنگ قرار دارد. یک خرگوش در یک طرف رودخانه قرار دارد و می‌خواهد با استفاده از پرش‌های خود روی سنگ‌ها خود را به طرف دیگر رودخانه برساند. این خرگوش در هر پرش می‌تواند به اندازه‌ی هر چند تا سنگ که بخواهد به جلو جهش کند. خرگوش به چند طریق می‌تواند به طرف دیگر رودخانه برسد؟

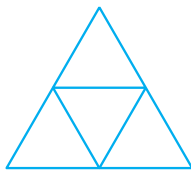
۷۶ به چند روش می‌توان در هر یک از خانه‌های یک جدول 10×10 یکی از دو عدد 1 و 2 را نوشت به طوری که مجموع عددهای نوشته شده در هر مربع 2×2 از جدول عددی زوج باشد؟

۷۷ مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 21, 22, 23\}$ چند زیرمجموعه دارد که هیچ یک از آن‌ها شامل سه عدد متوالی نیستند؟

۷۸ به چند طریق می‌توان اعداد 1 تا 8 را در یک ردیف نوشت به طوری که هیچ عددی از اعداد سمت چپ و سمت راستش بزرگ‌تر نباشد؟

۷۹ تعداد رشته‌های به طول 8 از x و y که فاقد رشته‌ی $xyxy$ باشند چقدر است؟

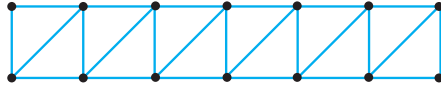
۸۰ به چند طریق می‌توان اضلاع شکل زیر را با سه رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که هر سه ضلع هیچ مثلثی هم‌رنگ نباشند؟



۸۱ به چند طریق می‌توان 7 خانه از یک جدول 8×2 را سیاه کرد به طوری که هیچ دو خانه‌ی علامت‌داری ضلع مشترک نداشته باشند؟

۸۲ (الف) به چند طریق می‌توان رأس‌های شکل زیر را با استفاده از چهار رنگ داده شده، رنگ آمیزی کرد به طوری که هر دو رأس که با یک پاره‌خط به هم وصل شده‌اند غیرهم‌رنگ باشند؟

(ب) در چند حالت از هر چهار رنگ استفاده شده است؟



۸۳ می‌خواهیم اعداد مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 20\}$ را با قرمز، آبی و سبز رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که هیچ دو عدد x و y که $x - y$ فرد است هم‌رنگ نباشند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۸۴ به چند طریق می‌توان پاره‌خط‌های به طول واحد یک جدول $m \times n$ را با سه رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که در هر مربع واحد، دو رنگ و هر کدام روی دو ضلع ظاهر شده باشند؟

۸۵ به چند طریق می‌توان رئوس یک جدول $n \times n$ را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ‌آمیزی کرد به طوری که در هر مربع واحد دقیقاً دو رأس قرمز و دو رأس آبی داشته باشیم؟

۸۶ به چند طریق می‌توان رئوس یک جدول $n \times n$ را با چهار رنگ مختلف رنگ‌آمیزی کرد به طوری که در هر مربع واحد از هر رنگ دقیقاً یک رأس داشته باشیم؟

۸۷ یک رنگ‌آمیزی از خانه‌های یک جدول با دو رنگ سیاه و سفید را پراکنده می‌گوییم اگر هیچ دو خانه‌ی سیاهی ضلع مشترک نداشته باشند. ثابت کنید تعداد رنگ‌آمیزی‌های پراکنده‌ی یک جدول 10×10 از 10^{15} بیشتر و از 10^{25} کم‌تر است.

۸۸ یک $A_1 A_2 \dots A_n$ ضلعی محدب است. به چند طریق می‌توان سطح این چندضلعی را توسط $n - 3$ قطر که هیچ دو تا بی‌همدیگر را قطع نمی‌کنند به $n - 2$ مثلث افزایش کرد که هر مثلث حداقل در یک ضلع با n ضلعی مشترک باشد؟

۸۹ به چند طریق می‌توان یک مربع $n \times n$ را با کاشی‌هایی به شکل زیر و دوران‌های آن پوشاند به طوری که هر دو ضلع مجاور ناهم‌رنگ باشند؟



۹۰ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع n به n^2 مثلث واحد افزایش شده است. $f(n)$ تعداد مسیرهایی از مثلث واحد در بالاترین سطر به مثلث میانی در پایین‌ترین سطر است به طوری که مثلث‌های متوالی روی مسیر در یک ضلع مشترک باشند و هیچ قسمتی از مسیر به سمت بالا نباشد و در ضمن هیچ مثلثی دو بار طی نشود. $f(n)$ را بیابید.

۹۱ فرض کنید $n = 2^{31} \times 3^{19}$. چه تعداد از مقسوم‌علیه مثبت n^2 از n کوچک‌ترند اما مقسوم‌علیه n نیستند؟

۱. چه تعداد از پاره‌خط‌های بین نقاط زیر، محور x ها را قطع می‌کنند؟

$$(-15, 6), (7, 8), (12, -7), (5, -5), (3, 2), (-1, -3),$$

$$(-9, 1), (5, 15), (19, -11), (4, 9)$$

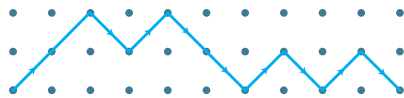
«المپیاد ریاضی - ۸۵»

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۱۶ د) ۲۱ ه) ۲۴

۲. شکل زیر یک جدول ۱۱×۳ با ۳۳ نقطه است. می‌خواهیم با استفاده از حرکت‌های مورب (مانند

شکل زیر) از نقطه‌ی گوشه‌ی سمت چپ و پایین به نقطه‌ی گوشه‌ی سمت راست و پایین برویم. توجه کنید که با هر حرکت مورب فقط می‌توان به سمت راست شکل رفت. این کار به چند طریق ممکن

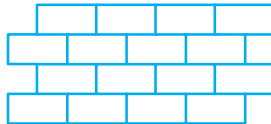
است؟



«المپیاد کامپیوتر - ۷۸»

الف) $۲^۴ \times ۳^۲$ ب) $۳ \times \binom{۱۰}{۵}$ ج) ۲۵ د) $\binom{۱۰}{۵}$ ه) ۲۴

۳. به چند طریق می‌توان آجرهای شکل زیر را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو آجر مجاور هم‌رنگ نباشند؟



«المپیاد کامپیوتر - ۸۳»

الف) $۳^۴$ ب) ۳×۲^{۱۵} ج) ۳ د) $۳^۴ \times ۲^{۱۲}$ ه) ۶

۴. تعداد رشته‌های به طول ۱۰ متشکل از A, T, C, G را بیابید که در آن‌ها A و T مجاور هم نباشند و C و G نیز مجاور هم نباشند و نیز هیچ دو حرف مجاور یکسان نباشند.

«المپیاد کامپیوتر - ۷۸»

الف) ۲۰۴۸ ب) $۴^۹$ ج) $۴^{۱۰} - ۴ \times ۱۰ \times ۲^۸$ د) ۱۰×۲^۴ ه) $۴^۶$

۵. مجموعه‌ی $\{۶, ۷, ۱۲, ۱۳, ۲۱, ۲۵, ۳۰, ۳۱\}$ چند زیرمجموعه دارد که حاصل جمع اعداد آن زوج است؟
 («المپیاد کامپیوتر - ۸۷»)

- الف) ۱۶ (ب) ۳۲ (ج) ۶۴ (د) ۹۶ (ه) ۱۲۸

۶. چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که هیچ دو رقم متوالی آن یکی نباشد؟
 («المپیاد ریاضی - ۸۵»)

- الف) ۶۴۸ (ب) ۷۲۰ (ج) ۷۲۹ (د) ۸۱۰ (ه) ۹۰۰

۷. چند عدد ۱۳ رقمی از ارقام $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ وجود دارد که مجموع هر سه رقم متوالی در آن زوج باشند؟
 («المپیاد کامپیوتر - ۸۳»)

- الف) ۲۱۳ (ب) ۲۱۵ (ج) ۲۱۱ (د) ۳×۲^{۱۱} (ه) ۴×۳^{۱۱}

۸. به چند طریق می‌توان اعداد ۰ و ۱ را در خانه‌های یک جدول ۱۵×۱۰ قرار داد به طوری که مجموع هر ۴ عدد متوالی در یک سطر یا یک ستون عددی زوج باشد؟
 («المپیاد کامپیوتر - ۷۸»)

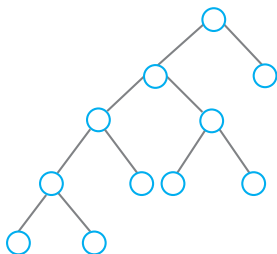
- الف) صفر (ب) ۵۱۲ (ج) $۲^{۱۶}$ (د) $\binom{۱۰}{۴} \binom{۱۵}{۴}$ (ه) $\frac{۲^{۱۵}}{\binom{۱۵}{۴} \binom{۱۰}{۴}}$

۹. یک جدول ۱۰×۱۲ داریم. مختصات خانه‌ی بالا سمت چپ $(۰, ۰)$ ، و مختصات خانه‌ی پایین سمت راست $(۹, ۱۱)$ است. چند زیرجدول (زیرمستطیل از خانه‌ها)، شامل خانه‌ی $(۷, ۵)$ است؟ (بدیهی است که خانه‌ی $(۷, ۵)$ به تنهایی و کل جدول، هر کدام یک زیرجدول محسوب می‌شوند).
 («المپیاد کامپیوتر - ۸۶»)

- الف) ۷۳۵ (ب) ۱۱۲۰ (ج) ۱۰۰۸ (د) ۱۲۶۰ (ه) ۱۲۰۰

۱۰. در شکل زیر، می‌خواهیم دایره‌ها را با ۳ رنگ آبی، قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که رنگ هر دایره و دو دایره‌ی زیر آن، که به آن متصل‌اند (اگر وجود داشته باشد)، با هم برابر باشد و یا رنگ هر سه آن‌ها متفاوت باشد. به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد؟

(«المپیاد کامپیوتر - ۸۶»)



- الف) ۲۴۳ (ب) ۷۲۸ (ج) ۷۲۹ (د) ۱۴۵۸ (ه) ۲۰۴۸