بسم الله الرحمن الرحیم

برگی از درخت المپیاد ریاضی

آمادگی برای المپیاد ریاضی

مؤلفین

رسول محسنی‌منش

عیسی محمدی

انتشارات خوشخوان

درخت المپیاد درختی است که توسط
انتشارات خوشخوان کاشته شده و هریک
از کتاب های این پروژه برگی از آن است.
وظیفه ما نگهداری وآبیاری این درخت است.امیدواریم
باعنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده
وبه بار واقعی بنشیند .فراموش نکنید که بار ومیوه ی
این درخت شما
عزیزان می باشید .

التماس دعا

پروژه‌ی درخت المپیاد

- اعتقاد بر این است که شروع فعالیت‌های المپیاد به صورت حرفه‌ای، باید از ابتدای دوره‌ی دبیرستان شروع شود. اکثر المپیادهای علمی در زمستان سال سوم دبیرستان تعیین تکلیف می‌شوند. بنابراین از شروع دبیرستان تا اواسط سال سوم حدوداً ۸ ترم تحصیلی می‌شود (با احتساب فصل و ترم تابستان) که لازم است برنامه‌ریزی دقیقی برای این چند ترم انجام شود.
- انتشارات خوشخوان این برنامه‌ریزی را در قالب پروژه‌ی درخت المپیاد انجام داده است که هر شاخه از درخت، مبحثی از آن المپیاد و هر برگ از آن شاخه شماره‌ای از آن مبحث می‌باشد.

* به عنوان مثال اپتیک (۱) کتابی است که در یک ترم تحصیلی در یک کلاس ممتاز می‌توان برای داوطلبان المپیاد فیزیک تدریس کرد.

با عنایات حضرت حق و با کمک تنی چند از همکاران گرامی کتب مربوط به این درخت در هر رشته‌ای از المپیاد معرفی خواهد شد.

- منتظر پیشنهادات و نظرات شما سروران هستیم.

گروه المپیاد

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

مسابقه ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش هایی هستند که کم وبیش در سرتاسر دنیای پهناور به صورت داخلی وبین المللی برگزار می شود وسال بـه سال به تنوع، جذبه وعظمت آن ها افزوده می‌شود. یکی ازاین همایش های باشکوه که هرسال درچندین رشته درسطح دانش آموزان سنوات آخر دوره متوسطه برگزارمی‌شود المپیادهای علمی‌می باشد که قدیمی ترین آن المپیاد ریاضی بوده و ازسال ۱۹۵۹ آغاز و تا به حال ادامه داشته است.

در حال حاضر نتیجه ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص های قدرت علمی آن کشورمحسوب شده و نفرات ممتاز این المپیادها به راحتی جذب دانشگاه ها وآکادمی های ممتاز جهان شده وپس ازگذشت سنواتی چند به موفقیت های چشم‌گیری نایل می شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال های نه چندان دور از مدال آوران این المپیادها بوده اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین باردر سال ۱۳٦٦ در المپیاد ریاضی جهان که در کشورکوبا برگزار می شد شرکت کرده و باکسب یک مدال برنز به مقام ۲٦ جهان نائل آمدکه تعجب همگان را برانگیخت چراکه درآن سال ایران درگیرجنگ تحمیلی بوده و جهانیان به غیر از جنگ و درگیری چیزی از ایران سراغ نداشتند و درخشش دانش آموزان ایران در آن سال و سنوات بعد نگاه ها را به سمت ایران معطوف کرده وچشم خفته آن ها را تا حدود زیادی بیدار کرد. همانطورکه از رسانه های گروهی مطلع شده اید درتمام المپیادهای علمی تیم اعزامی کشورعزیزمان درسنوات گذشته جزء کشورهای برتر بوده وضمن کسب مدال های رنگارنگ رتبه های بسیار درخشانی ازجمله رتبه اول را حائز شده اند.

نحوه گزینش نفرات اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگرند به این صورت که درابتدا درمسابقه ای سراسری تحت عنوان مرحله اول که معمولاً به صورت پرسش های چندگزینه ای مطرح می شود حدوداً هزارنفر پذیرفته شده و در رقابتی معمولاً تشریحی که مرحله ی دوم نامیده می شود شرکت می کنند. دراین مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و دردوره ی تابستانی درباشگاه دانش پژوهان جوان که متولی برگزاری تمام المپیاد های علمی می باشد شرکت کرده و پس ازگذراندن این دوره مرحله ی سوم آزمون برگزار شده و عده ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عده ای مدال نقره و عده ای دیگر مدال برنز

کسب می‌کنند (در این مرحله معمولاً همه‌ی افراد شرکت کننده در دوره مدال کسب می‌کنند) دارندگان مدال طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضاء تیم اعزامی شناسایی می شوند. دارندگان مدال طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه ی تحصیل می دهند اما دارندگان مدال های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان در کنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه خود در رقابت می‌کنند با این تفاوت که این افراد سهمیه‌ی ویژه ای در پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش پژوهان جوان تشریح شده است.

متأسفانه در سال های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت های المپیاد جبهه می گیرند و ادعا می‌کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت در کنکور سراسری بوده و هرچه دانش آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند از کنکور فاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدال طلا (که بسیار محتمل است) آینده ی خود را تباه کرده است در حالی که با تحقیقی که در سال های گذشته انجام شده است فعالیت در زمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکور نیست بلکه مسیر فعالیت برای کسب رتبه مناسب در کنکور را بسیار هموارتر می سازد به عنوان مثال می توانید تمام مدال آوران نقره و برنز و یا حتی آن هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ولی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را در یک رشته شناسایی کرده و موفقیت های تحصیلی آن ها را در دانشگاه ها جویا شوید که نگارنده ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

به هرحال ادعا این است که فعالیت دانش آموز در یک رشته از رشته های المپیاد فواید بسیاری دارد که به تعدادی از آن ها به صورت گذرا اشاره می شود:

۱. همان طور که خداوند به بشرتن سالم داده و انتظار می رود با ورزش ها و نرمش های مناسب از این نعمت خدادادی محافظت شود به هر دانش آموزی نیز استعدادی داده است که باید شکوفا و بهره ور شود. اغلب باشگاه های کشور اعم از خصوصی و دولتی داوطلب زیادی در رشته های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت در یکی از رشته های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدن سازی و ... می باشند که وقتی از آن افراد راجع به اهدافشان از این فعالیت سؤال می شود سالم نگه داشتن بدن را عنوان داشته و انتخاب شدن در تیم ملی را در نهایت عنوان می‌کنند. چه بسا افرادی که در این رشته ها فعالیت می‌کنند و هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی‌کنند که وقتی از این افراد راجع به موفقیت هایشان سؤال می شود هرگز خود را ناموفق معرفی نمی کنند و همین‌که توانسته اند از بدن سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می‌دانند بنابرین فعالیت دریکی اززمینه های المپیاد چه در نهایت به کسب مدال منجر شود و یا نشود همین‌که استعداد خدادادی پرورش می یابد موفقیتی است بس بزرگ.

۲. کتب درسی به اذعان اکثر کارشناس ها و اساتید سال به سال ساده تر شده و برای عموم دانش آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ عنوان اغنا کننده نمی باشند لذا لازم است این سری ازدانش آموزان فعالیت ویژه ای را در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود داشته باشند تا احساس کنند این فعالیت ها برای آن ها اغنا کننده است.

۳. فعالیت های المپیادی که درنهایت به حل سؤالات پیچیده و عمیق در رشته ی مربوطه می شود باعث می شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش آمده درزندگی به دید یک مسأله ی المپیاد نگاه کرده و درحل آن نسبت به سایر رقبا موفق تر باشند. تحقیقات نشان می دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی ازشاخه های المپیاد را دنبال می کنند (نه به نیت کسب مدال بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق ترند.

٤. زیربنای اکثر دروس پیش دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می شود بنابرین افرادی که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می‌کنند در دوره پیش دانشگاهی با پایه ی بسیار قوی تری با دروس مواجه می شوند و نسبت به رقبای خود راحت تر ازعهده آن ها برمی آیند.

٥. با توجه به مصوبه های موجود، کسب مدال دریکی ازالمپیاد های علمی(حتی مدال برتر) باعث اعطای امتیازهای ویژه ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه های سراسری می شود که جزئیات آن درسایت های معتبرمخصوصاً سایت باشگاه دانش پژوهان جوان موجود است.

٦. همچنین با توجه به مصوبه های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به عضویت نهادهای مختلف ازجمله بنیاد ملی نخبگان درمی آیند که با رجوع به سایت های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق یافته به اعضاء را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مفتخراست از بدو تأسیس به فکرتدوین و تألیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال وبا بهره گیری ازاساتید مجربی که خود درسنواتی نه چندان دورمدال آوریکی ازالمپیادهای علمی بوده اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد ازکسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین وتألیف شود که درآن هرکتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت المپیاد نام گرفته است و هرکتاب ازاین پروژه که دراختیار دارید برگی از آن درخت خواهد بود.

بدیهی است انجام چنین پروژه ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می طلبد لذا لازم است ازتمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده اند، تشکر و قدردانی می نمایم و درنهایت نیز ازعوامل زحمت کش انتشارات اعم ازمشاورین، حروف چین ها، طراحان وکارمندان وکارگران عزیزکمال امتنان را دارم.

با تشکر
رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

پیشگفتار مؤلف

المپیاد ریاضی احتمالاً پر طرفدارترین المپیاد بین دانش‌آموزان خصوصاً دانش‌آموزان مدارس برتر است. ازاین‌رو همواره مدارس و دانش‌آموزان به دنبال منابع مفید برای موفقیت در این عرصه هستند.

اغلب کتبی که در این زمینه در کشور ما و کشورهای دیگر تالیف شده است، تلاش کرده‌اند تمام مباحث مورد نیاز را پوشش دهند و این مطلب باعث شده مخاطبانی که علی‌رغم علاقه و استعدادی که دارند به دلیل ضعف معلومات و یا نداشتن وقت کافی، از مطالعه‌ی این کتاب‌ها دلسرد شوند.

در این کتاب تمام مطالب مورد نیاز برای قبولی در مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی را با بیانی ساده و همراه با حل مسائل متنوع که حاصل چندین سال تدریس مولفان در مدارس برتر است، مطرح شده است و تمام تلاش‌مان این بوده که مطالب سخت و کم کاربرد را شناسایی کرده و از آن‌ها استفاده نکنیم.

تجربه نشان داده است که دانش‌آموزان با حل ۸ از ۲۵ سوال مرحله اول به را حتی قبول می‌شوند، این در حالی است که همواره تعدادی از سوال‌های مرحله‌ی اول بسیار سخت است و در مجموع آزمون را یک آزمون سخت جلوه می‌دهند ولی عموماً یافتن ۱۰ الی ۱۲ سوال ساده در این آزمون کار بسیار راحتی است و همان‌طور که بیان شد، ضامن قبول شدن دانش‌آموزان عزیز است.

در پایان از تمام کسانی که ما را در نوشتن این کتاب یاری کرده‌اند تشکر می‌کنیم. از جناب آقای مهندس رسول حاجی‌زاده که زمینه‌ی تالیف این کتاب را فراهم کرده‌اند و از دوستان عزیز آقایان علی جعفری، هادی ضمیر و خانم‌ها موژان اسکندری، نیکتا قراچورلو، درین روزبهانی، نرگس چگنی‌زاده و نیلوفر شاهباز و به‌خصوص خانم مریم هدیه‌لو که در ویرایش این اثر کمک زیادی کرده‌اند کمال تشکر و قدردانی را داریم.

در ضمن هر گونه پیشنهاد و انتقاد را عزیزان می‌توانند با ایمیل زیر با ما درمیان بگذارند تا در چاپ‌های بعدی مورد استفاده قرار گیرد.

Rasoulmohsenimanesh@yahoo.com

رسول محسنی‌منش

عیسی محمدی

تابستان ۱۳۹۳

فهرست مطالب

فصل ۱۳ نظریه‌ی اعداد و مفاهیم مقدماتی ۲۳۳

فصل ۱۴ اعداد اول و مرکب ۲٤٧

فصل ۱۵ همنهشتی ۲۶۱

فصل ۱۶ معادله در اعداد صحیح ۲۸۱

۱

جبر ـ اتحاد و تجزیه

۱-۱ اتحاد

اگر یک تساوی به ازای جمیع مقادیر متغیرهایش برقرار باشد، یک اتحاد نامیده می‌شود. به عنوان مثال تساوی‌های $a+b=b+a$ و $a+a^2=a(a+1)$ اتحاد هستند زیرا بدون توجه به مقادیر a و b همواره برقرار هستند. اما عبارتی مانند $3x+11=0$ یک اتحاد نیست زیرا فقط به ازای $x=-\frac{11}{3}$ معنادار است. در این قسمت با برخی اتحادهای جبری مهم آشنا می‌شویم.

اتحادهای مقدماتی

۱. مربع دوجمله‌ای:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

اتحاد فرعی: $(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$ یا $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

۲. مکعب دوجمله‌ای:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

اتحاد فرعی:

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

۳. مزدوج:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

با توجه به این اتحاد به $(a-b)$ مزدوج $(a+b)$ می‌گویند و بالعکس، به عنوان مثال $1+\sqrt{3}$ مزدوج $\sqrt{3}-1$ است.

۴. چاق و لاغر:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$a^{۳} - b^{۳} = (a-b)(a^{۲} + ab + b^{۲})$

۵. جمله مشترک: $(x+a)(x+b) = x^{۲} + (a+b)x + ab$

۶. مربع سه‌جمله‌ای: $(a+b+c)^{۲} = a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} + ۲(ab+bc+ca)$

تعمیم اتحادهای مقدماتی: اتحادهای فوق را می‌توان به حالت‌های کلی‌تری تعمیم داد که به ترتیب در زیر می‌آیند:

۱. بسط دوجمله‌ای نیوتن:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{۰}a^n + \binom{n}{۱}a^{n-۱}b^{۱} + \binom{n}{۲}a^{n-۲}b^{۲} + \cdots \\ &+ \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \cdots + \binom{n}{n}b^n\end{aligned}$$

در اتحاد فوق $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ است و نیز طبق قرارداد $۰! = ۱$ است.[۱]
به عنوان مثال برای $n = ۶$ داریم:

$$\begin{aligned}(a+b)^{۶} &= \binom{۶}{۰}a^{۶} + \binom{۶}{۱}a^{۵}b^{۱} + \binom{۶}{۲}a^{۴}b^{۲} + \binom{۶}{۳}a^{۳}b^{۳} \\ &+ \binom{۶}{۴}a^{۲}b^{۴} + \binom{۶}{۵}a^{۱}b^{۵} + \binom{۶}{۶}b^{۶} \\ &= a^{۶} + ۶a^{۵}b + ۱۵a^{۴}b^{۲} + ۲۰a^{۳}b^{۳} + ۱۵a^{۲}b^{۴} + ۶ab^{۵} + b^{۶}\end{aligned}$$

نکته ۱. دقت کنید که چون $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ در نتیجه ضریب جمله‌ی iام از اول با ضریب جمله‌ی iام از آخر با هم برابرند.

به عنوان مثال در بسط $(a+b)^{۶}$ ضریب جمله‌ی دوم و ششم برابر ۶ و ضریب جمله‌های سوم و پنجم برابر ۱۵ است.

۲. چاق و لاغر: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-۱} + a^{n-۲}b^{۱} + a^{n-۳}b^{۲} + \cdots + b^{n-۱})$

(n فرد است.) $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-۱} - a^{n-۲}b + a^{n-۳}b^{۲} + \cdots + b^{n-۱})$

به عنوان مثال اگر $b = ۱$ و $a = ۲$ باشد داریم:

$$\begin{aligned}&۲^n - ۱^n = (۲-۱)(۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} + \cdots + ۱) \\ &\rightarrow ۲^n - ۱ = ۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} + \cdots + ۱\end{aligned}$$

---

۱) نماد $\binom{n}{i}$ در جلسه‌ی اول بخش ترکیبیات به طور کامل مورد بحث قرار گرفته است.

۳. جمله مشترک:

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)=x^n+(a_1+a_2+\cdots+a_n)x^{n-1}$$
$$+(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)x^{n-2}+\cdots+a_1a_2\cdots a_n$$

معلوم است که در سمت راست اتحاد فوق ضریب جمله‌ی x^{n-i} برابر است با مجموع تمام حاصل‌ضرب‌های iتایی از جمله‌های غیرمشترک.

به عنوان مثال با فرض $n=3$ داریم:

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

۴. مربع nجمله‌ای:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\cdots+2a_{n-1}a_n$$

مثال ۱-۱ اگر $\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{3}$ و $x>0$ مطلوبست هر یک از مقادیر زیر:

(الف) $x+\frac{1}{x}$ (ب) $x^3+\frac{1}{x^3}$ (ج) $x^5+\frac{1}{x^5}$

حل:

$$\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{3}\rightarrow\frac{x^4+1}{x^2}=3\rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=3$$

(الف)

$$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2(x)(\frac{1}{x})\rightarrow(x+\frac{1}{x})^2=3+2=5$$

که با توجه به فرض $x>0$ می‌توان نتیجه گرفت که $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$.

(ب) با توجه به اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2-1+\frac{1}{x^2})=(\sqrt{5})(3-1)=2\sqrt{5}$$

(ج) روش اول:

$$(x+\frac{1}{x})^5=x^5+5x^4(\frac{1}{x})+10x^3(\frac{1}{x})^2+10x^2(\frac{1}{x})^3+5x(\frac{1}{x})^4+(\frac{1}{x})^5$$
$$=x^5+\frac{1}{x^5}+5(x^3+\frac{1}{x^3})+10(x+\frac{1}{x})$$
$$\rightarrow(\sqrt{5})^5=x^5+\frac{1}{x^5}+5(2\sqrt{5})+10\sqrt{5})$$
$$\rightarrow x^5+\frac{1}{x^5}=25\sqrt{5}-20\sqrt{5}=5\sqrt{5}$$

روش دوم:

$$(x^۳+\frac{۱}{x^۳})(x^۲+\frac{۱}{x^۲})=x^۵+x+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۵}$$
$$\rightarrow(۲\sqrt{۵})(۳)=x^۵+\frac{۱}{x^۵}+\sqrt{۵}$$
$$\rightarrow x^۵+\frac{۱}{x^۵}=۶\sqrt{۵}-\sqrt{۵}=۵\sqrt{۵}$$

مثال ۱-۲ باقی‌مانده‌ی تقسیم $۷+۵^{۲۲}$ بر ۸ برابر است با:

«المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷٤»

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

حل: عدد ۷ را به صورت $۸-۱$ می‌نویسیم و عددمان را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$۵^{۲۲}-۱+۸=(۵^۲)^{۱۱}-۱^{۱۱}+۸=(۲۵-۱)(\underbrace{۲۵^{۱۰}+۲۵^۹+\cdots+۱}_{q})+۸$$
$$=۲۴q+۸=۸(۳q+۱)$$

یعنی این عدد مضربی از ۸ است پس باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۸ برابر است با صفر.

نکته ۲. ۱. به ازای هر عدد طبیعی n، a^n-b^n بر $a-b$ بخش‌پذیر است.
۲. به ازای هر عدد فرد n، a^n+b^n بر $a+b$ بخش‌پذیر است.

مثال ۱-۳ فرض کنید $(۲+\sqrt{۳})^n=۵۰۴۲+b\sqrt{۳}$ که در آن n طبیعی و b صحیح است. b چند است؟

«المپیاد مقدماتی ریاضی ـ ۸٤»

الف) ۱۳۸۴ ب) ۳۵۴۳ ج) ۷۸۰ د) ۵۸۲۲ ه) ۲۹۱۱

حل: به جز $\sqrt{۳}$ باقی اعداد مسئله صحیح هستند. در بین اتحادها، اتحاد مزدوج بهترین اتحاد برای گویا کردن عبارات رادیکالی است، برای استفاده از اتحاد مزدوج باید مزدوج عدد $(۲+\sqrt{۳})^n$ که $(۲-\sqrt{۳})^n$

است را نیز داشته باشیم و چون حاصل آن‌ها را نیز باید بدانیم از بسط دوجمله‌ای نیوتن استفاده می‌کنیم:

$$(۲+\sqrt{۳})^n = ۲^n + \binom{n}{۱}۲^{n-۱}(\sqrt{۳})^۱ + \binom{n}{۲}۲^{n-۲}(\sqrt{۳})^۲ + \cdots + (\sqrt{۳})^n$$
$$(۲-\sqrt{۳})^n = ۲^n - \binom{n}{۱}۲^{n-۱}(\sqrt{۳})^۱ + \binom{n}{۲}۲^{n-۲}(\sqrt{۳})^۲ - \cdots + (-۱)^n(\sqrt{۳})^n$$

با یک نگاه عمیق در دو بسط بالا متوجه می‌شویم که اگر $(۲+\sqrt{۳})^n = ۵۰۴۲ + b\sqrt{۳}$ باشد آن‌گاه $(۲-\sqrt{۳})^n = ۵۰۴۲ - b\sqrt{۳}$ خواهد بود، که با ضرب طرفین این تساوی‌ها داریم:

$$(۲+\sqrt{۳})^n(۲-\sqrt{۳})^n = (۵۰۴۲ + b\sqrt{۳})(۵۰۴۲ - b\sqrt{۳})$$
$$\rightarrow (۴-۳)^n = (۵۰۴۲^۲ - ۳b^۲) \rightarrow ۳b^۲ = ۵۰۴۲^۲ - ۱$$
$$\rightarrow b^۲ = \frac{(۵۰۴۲-۱)(۵۰۴۲+۱)}{۳}$$
$$\rightarrow b^۲ = ۷۱^۲ \times ۴۱^۲ \rightarrow b = ۷۱ \times ۴۱ = ۲۹۱۱$$

نکته ۳. با توجه به مسئله‌ی حل شده به طورکلی می‌توان گفت که اگر $a, b \in Q$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم:

$$(a+\sqrt{b})^n = X + Y\sqrt{b} \;\; , \;\; (a-\sqrt{b})^n = X - Y\sqrt{b} \qquad (X, Y \in Q)$$

که از مقایسه‌ی دو رابطه‌ی بالا می‌توان نتیجه گرفت که حاصل عبارت $(a+\sqrt{b})^n + (a-\sqrt{b})^n$ همواره عددی گویاست.

مثال ۱-۴ مجموع ضرایب جملات حاصل از بسط‌های زیر را بیابید.

(الف) $(x+y)^۵$ **(ب)** $(x-۳y+۳z)^{۱۷}$

حل:

(الف) $(x+y)^۵ + x^۵ + ۵x^۴y + ۱۰x^۳y^۲ + ۱۰x^۲y^۳ + ۵xy^۴ + y^۵$

مجموع ضرایب جملات عبارت فوق برابر است با: $۱+۵+۱۰+۱۰+۵+۱ = ۳۲$

همان طورکه مشاهده می‌شود می‌توانستیم از ابتدا با جایگذاری $x = y = ۱$ در عبارت $(x+y)^۵$ به عدد $(۱+۱)^۵ = ۳۲$ برسیم (چرا؟)

(ب) با جای‌گذاری $x = y = z = ۱$ داریم:

$$\text{مجموع ضرایب} = (۱ - ۳ + ۳)^{۱۷} = ۱^{۱۷} = ۱$$

مثال ۱-۵ بزرگ‌ترین ضریب در بسط $(۱ + x)^{۱۰۰}$ چند رقم دارد؟

«المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۶»

الف) کم‌تر از ۱۵ ب) بین ۱۵ تا ۲۵ ج) بین ۲۵ تا ۳۵ د) بین ۳۵ تا ۴۵ هـ) بیش‌تر از ۴۵

حل: با جای‌گذاری $x = ۱$ معلوم می‌شود که مجموع ضرایب بسط $(۱ + x)^{۱۰۰}$ برابر است با $۲^{۱۰۰}$. از طرفی با استفاده از بسط دوجمله‌ای نیوتن داریم:

$$(۱ + x)^{۱۰۰} = ۱ + \binom{۱۰۰}{۱}x + \binom{۱۰۰}{۲}x^{۲} + \cdots + \binom{۱۰۰}{۱۰۰}x^{۱۰۰}$$

به وضوح مشخص است که بسط فوق ۱۰۱ جمله دارد. پس تعداد ضرایب بسط ما ۱۰۱ و مجموع آن‌ها برابر $۲^{۱۰۰}$ است در نتیجه میانگین ضرایب به راحتی به‌دست می‌آید:

$$\text{میانگین ضرایب} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} = \frac{۲^{۱۰۰}}{۱۰۱}$$

مطمئناً بزرگ‌ترین ضریب از میانگین ضرایب بزرگ‌تر است (چرا؟) و از مجموع ضرایب کوچک‌تر می‌باشد. پس:

$$\frac{۲^{۱۰۰}}{۱۰۱} < \text{بزرگ‌ترین ضریب} < ۲^{۱۰۰}$$

همچنین می‌دانیم که عدد $۲^{۱۰}$ یعنی ۱۰۲۴ بسیار نزدیک به عدد $۱۰^{۳}$ یعنی ۱۰۰۰ می‌باشد، بنابراین عدد $\frac{۲^{۱۰۰}}{۱۰۱}$ تقریباً با عدد $\frac{۱۰^{۳۰}}{۱۰۰}$ یعنی $۱۰^{۲۸}$ برابر است که عددی ۲۹ رقمی است. در نتیجه بزرگ‌ترین ضریب بیش از ۲۸ رقم و کم‌تر از ۳۲ رقم خواهد داشت.

دو اتحاد مهم دیگر:

۱. لاگرانژ:

$$(a^{۲} + b^{۲})(x^{۲} + y^{۲}) = (ax + by)^{۲} + (ay - bx)^{۲}$$

به عنوان مثال:

$$۶۲۶ \times ۳۷ = (۶۲۵ + ۱)(۳۶ + ۱) = (۲۵^{۲} + ۱^{۲}) = ۱۵۱^{۲} + ۱۹^{۲}$$

۲. اویلر: $a^۳+b^۳+c^۳=(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ca)+۳abc$

با توجه به تساوی بالا

$$a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ca=\frac{۱}{۲}[(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲]$$

می‌توان اتحاد اویلر را به صورت مقابل بازنویسی کرد:

$$a^۳+b^۳+c^۳=\frac{(a+b+c)}{۲}[(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲]+۳abc$$

نتایج مهم اتحاد اویلر:

(۱) اگر $a+b+c=۰$ آن‌گاه $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$.

(۲) اگر $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$ آن‌گاه یا $a+b+c=۰$ و یا $a=b=c$.

مثال ۱-۶ اگر $x=b+c-۲a$، $y=c+a-۲b$ و $z=a+b-۲c$ باشند، آن‌گاه حاصل $\frac{x^۳+y^۳+z^۳}{xyz}$ را بیابید.

حل: با اندکی دقت معلوم می‌شود که $x+y+z=۰$، پس با توجه به نتیجه‌ی ۱ اتحاد اویلر داریم:

$$x^۳+y^۳+z^۳=۳xyz\rightarrow\frac{x^۳+y^۳+z^۳}{xyz}=۳$$

مثال ۱-۷ هرگاه بدانیم متغیرهای x و y در برابری $x+۲y=۵$ صدق می‌کنند. آن‌گاه کم‌ترین مقدار $x^۲+y^۲$ را بیابید.

حل: با جاگذاری $a=۱$ و $b=۲$ در اتحاد لاگرانژ خواهیم داشت:

$$(۱^۲+۲^۲)=(x+۲y)^۲+(y-۲x)^۲$$

$$\rightarrow ۵(x^۲+y^۲)=۵^۲+(y-۲x)^۲$$

$$\rightarrow x^۲+y^۲=\frac{۱}{۵}[۵^۲+(y-۲x)^۲]$$

عبارت $x^۲+y^۲$ زمانی به کم‌ترین مقدار خود می‌رسد که $(y-۲x)^۲$ کم‌ترین مقدار را بپذیرد و چون $(y-۲x)^۲$ یک عبارت نامنفی است کم‌ترین مقدارش برابر صفر است که در این حالت مقدار $x^۲+y^۲$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته و برابر با ۵ خواهد بود.

مثال ۱-۸ با استفاده از اتحادها ثابت کنید:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

حل: با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای تساوی $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ به‌دست می‌آید. تساوی فوق به ازای جمیع مقادیر x برقرار است پس با جاگذاری $x = 1$، $x = 2$، ...، $x = n$ خواهیم داشت:

$$x = 1 : 2^3 - 1^3 = 3(1)^2 + 3(1) + 1$$
$$x = 2 : 3^3 - 2^3 = 3(2)^2 + 3(2) + 1$$
$$x = 3 : 4^3 - 3^3 = 3(3)^2 + 3(3) + 1$$
$$\vdots$$
$$x = n : (n+1)^3 - n^3 = 3(n)^2 + 3(n) + 1$$

طرفین تساوی‌های فوق را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \cdots + (n+1)^3 - n^3 \\
&= 3(\underbrace{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}_{S}) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n \\
&\rightarrow (n+1)^3 - 1^3 = 3S + 3(\frac{n(n+1)}{2}) + n \\
&\rightarrow n(n^2 + 3n + 3) - \frac{(3n(n+1)}{2} - n = 3S \\
&\rightarrow S = \frac{n}{6}[2n^2 + 6n + 6 - 3(n+1) - 2] \\
&= \frac{n}{6}[2n^2 + 3n + 1] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

نکته ٤. به ازای هر عدد n طبیعی داریم:

$$1)\ 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$2)\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$3)\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

۲-۱ تجزیه

تبدیل یک عبارت جبری به صورت ضرب دو یا چند عبارت جبری را تجزیه‌ی آن عبارت جبری می‌نامند. مثلاً $۲x^{۲} + ۳x + ۱$ می‌توان به صورت $(۲x + ۱)(x + ۱)$ تجزیه کرد زیرا از ضرب $(x + ۱)$ در $(۲x + ۱)$ عبارت $۲x^{۲} + ۳x + ۱$ به وجود می‌آید.

روش‌های تجزیه

۱. استفاده از اتحادها: در اغلب اتحادهایی که در قسمت قبل آوردیم، یک طرف تساوی به صورت حاصل‌ضرب چند عبارت جبری است. به طور مثال تجزیه‌ی عبارت $a^{۲} + ۴b^{۲} - ۴ab$ با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای به صورت $(a - ۲b)^{۲}$ است.

مثال ۱-۹ عبارت $x^{۳} + y^{۳} - ۳xy + ۱$ را تجزیه کنید.

حل: می‌دانیم که در اتحاد اویلر تساوی زیر برقرار است.

$$a^{۳} + b^{۳} + c^{۳} - ۳abc = (a + b + c)(a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} - ab - bc - ca)$$

حال با فرض $a = x$، $b = y$ و $c = ۱$ داریم:

$$x^{۳} + y^{۳} + ۱^{۳} - ۳(x)(y)(۱) = (x + y + ۱)(x^{۲} + y^{۲} + ۱ - x - y - xy)$$

۲. فاکتورگیری: در این روش از عوامل مشترک عبارات جبری در صورت مفید بودن فاکتور می‌گیریم به عنوان مثال تجزیه‌ی عبارت $۱۵x^{۲}y^{۴} + ۲۰x^{۳}y^{۳} + ۱۵x^{۴}y^{۲}$ با فاکتورگرفتن از عبارت $۵x^{۲}y^{۲}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$۱۵x^{۴}y^{۲} + ۲۰x^{۳}y^{۳} + ۱۵x^{۲}y^{۴} = ۵x^{۲}y^{۲}(۳x^{۲} + ۴xy + ۳y^{۲})$$

۳. دسته‌بندی: هر وقت شکل ظاهری یک عبارت جبری نشان دهنده‌ی اتحادی نباشد، با دسته‌بندی جمله‌ها و استفاده از روابط میان بعضی از آن‌ها، عبارت را برای استفاده از یک اتحاد و یا تولید یک عامل مشترک آماده می‌کنیم. به عنوان مثال برای تجزیه‌ی $xy + x + y + ۱$ به صورت زیر ابتدا با دسته‌بندی متغیرها، کل عبارت را آماده‌ی فاکتورگیری می‌کنیم:

$$xy + x + y + ۱ = x(y + ۱) + (y + ۱) = (y + ۱)(x + ۱)$$

مثال ۱-۱۰ عبارت $x^{۳} + x^{۲} - y^{۳} - y^{۲}$ را تجزیه کنید.

حل: $x^۳$ و $-y^۳$ را با هم و $x^۲$ و $-y^۲$ را نیز با هم دسته‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^۳ + x^۲ - y^۳ - y^۲ &= (x^۳ - y^۳) + (x^۲ - y^۲) \\ &= (x-y)(x^۲ + xy + y^۲) + (x-y)(x+y) \\ &= (x+y)(x^۲ + xy + y^۲ + x + y) \end{aligned}$$

۴. شکستن: در دسته‌بندی جمله گاهی مجبوریم بعضی از جمله‌ها را به جزء‌های دیگری تفکیک کنیم تا بتوانیم آن‌ها را دسته‌بندی کنیم.

مثال ۱-۱۱ عبارت $x^۳ - ۲x + ۱$ را تجزیه کنید.

حل: با شکستن عدد ۱ به صورت ۱ − ۲ داریم:

$$\begin{aligned} x^۳ - ۲x + ۱ &= x^۳ - ۲x + ۲ - ۱ = (x^۳ - ۱) + (۲ - ۲x) \\ &= (x-۱)(x^۲ + x + ۱) - ۲(x-۱) = (x-۱)(x^۲ + x + ۱ - ۲) \\ &= (x-۱)(x^۲ + x - ۱) \end{aligned}$$

۵. افزودن و کاستن: گاهی در تجزیه مجبور می‌شویم یک یا چند جمله را به عبارت اضافه و کم کنیم تا تجزیه راحت‌تر شود. این راه از مهم‌ترین راه‌های تجزیه است.

مثال ۱-۱۲ عبارت $x^۴ + ۴$ را تجزیه کنید.

حل: با افزودن و کاستن جمله‌ی $۴x^۲$ به عبارت داریم:

$$\begin{aligned} x^۴ + ۴ &= x^۴ + ۴ + ۴x^۲ - ۴x^۲ = (x^۴ + ۴x^۲ + ۴) - ۴x^۲ \\ &= (x^۲ + ۲)^۲ - (۲x)^۲ = (x^۲ + ۲ - ۲x)(x^۲ + ۲ + ۲x) \end{aligned}$$

مثال ۱-۱۳ عبارت $a^۲b + a^۲c + b^۲a + b^۲c + c^۲a + c^۲b + ۲abc$ را تجزیه کنید.

حل: $۲abc$ را به صورت $abc + abc$ می‌نویسیم و به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &(a^۲b + b^۲a) + (b^۲c + abc) + (c^۲a + c^۲b) + (a^۲c + abc) \\ &= ab(a+b) + bc(a+b) + c^۲(a+b) + ac(a+b) \end{aligned}$$

$$= (a+b)(ab+bc+c^{۲}+ac) = (a+b)[b(a+c)+c(a+c)]$$
$$= (a+b)(b+c)(c+a)$$

مثال ۱-۱۴ اعداد a، b و c باید چه رابطه‌ای داشته باشند تا عبارت $ax^{۲}+bx+c$ تجزیه‌پذیر شود؟

حل:

$$ax^{۲}+bx+c = a(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a\left(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}-\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}-\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}+\frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left[(x+\frac{b}{۲a})^{۲}-(\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}})\right]$$
$$= a\left[(x+\frac{b}{۲a})-\frac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}\right]\left[(x+\frac{b}{۲a})+\frac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}\right]$$

همان‌طورکه معلوم است شرط تجزیه‌پذیری، منفی نشدن عبارت $b^{۲}-۴ac$ است یعنی باید $b^{۲}\geq ۴ac$ باشد.

نکته ۵. سه‌جمله‌ای درجه دوم $(ax^{۲}+bx+c)$ با شرط $b^{۲}\geq ۴a$ قابل تجزیه شدن است و راه کلی تجزیه‌ی این عبارت فاکتورگیری از a و افزودن و کاستن $\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}$ است. به این روش در اصطلاح «مربع کامل‌سازی» می‌گویند.

مثال ۱-۱۵ عبارت $x^{۱۰}+x^{۵}+۱$ را تجزیه کنید.

حل:

$$x^{۱۰}+x^{۵}+۱ = x^{۱۰}+x^{۹}-x^{۹}+x^{۸}-x^{۸}+x^{۷}-x^{۷}+x^{۶}-x^{۶}$$
$$+x^{۵}-x^{۵}+x^{۴}-x^{۴}+x^{۳}-x^{۳}+x^{۲}-x^{۲}+x-x+۱ =$$
$$= (x^{۱۰}+x^{۹}+x^{۸})-(x^{۹}+x^{۸}+x^{۷})+(x^{۷}+x^{۶}+x^{۵})-(x^{۶}+x^{۵}+x^{۴})$$
$$+(x^{۵}+x^{۴}+x^{۳})-(x^{۳}+x^{۲}+x)+(x^{۲}+x+۱)$$
$$= x^{۸}(x^{۲}+x+۱)-x^{۷}(x^{۲}+x+۱)+x^{۵}(x^{۲}+x+۱)-x^{۴}(x^{۲}+x+۱)$$
$$-x^{۴}(x^{۲}+x+۱)+x^{۳}(x^{۲}+x+۱)-x(x^{۲}+x+۱)+(x^{۲}+x+۱)$$
$$= (x^{۲}+x+۱)(x^{۸}-x^{۷}+x^{۵}-x^{۴}+x^{۳}-x+۱)$$

۶. ریشه‌یابی: اگر یک عبارت جبری به ازای $x = a$ برابر با صفر باشد می‌توان نتیجه گرفت که عبارت جبری فوق‌الذکر بر عبارت $x - a$ بخش‌پذیر است،[۱] یعنی $x - a$ یکی از عوامل است که در تجزیه‌ی این عبارت جبری به وجود می‌آید.

مثال ۱-۱۶ عبارت $x^۳ + ۳x^۲ - ۴$ را تجزیه کنید.

حل: با کمی دقت حاصل عبارت فوق به ازای $x = ۱$، صفر می‌شود، پس عبارت فوق بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است. از تقسیم $x^۳ + ۳x^۲ - ۴$ بر $x - ۱$ خارج‌قسمت $(x^۲ + ۴x + ۴)$ که همان $(x + ۲)^۲$ می‌باشد، به‌دست خواهد آمد. پس:

$$x^۳ + ۳x^۲ - ۴ = (x - ۱)(x + ۲)^۲$$

این جلسه را با حل دو سؤال از المپیادها به پایان می‌رسانیم.

مثال ۱-۱۷ x و y دو عدد صحیح متوالی هستند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد عبارت $x^۲ + y^۲ + (xy)^۲$ درست است؟

«المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷۷»

الف) مجموعه رقم‌های یکان آن‌ها شامل مجموعه $\{۰, ۱, ۳, ۵, ۶, ۹\}$ است.

ب) همواره مربع کامل است.

ج) به ازای مقادیری از x و y، عددی اول است.

د) همواره عددی مرکب است.

ه) هیچ‌کدام

حل: چون x و y متوالی‌اند می‌توان $y = x + ۱$ فرض کرد، پس:

$$\begin{aligned} x^۲ + y^۲ + (xy)^۲ &= x^۲ + (x + ۱)^۲ + [x(x + ۱)]^۲ \\ &= ۲x^۲ + ۲x + ۱ + [x(x + ۱)]^۲ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲x^۲ + ۲x + ۱ &+ [x(x + ۱)]^۲ \\ &= ۱ + ۲x(x + ۱) + [x(x + ۱)]^۲ = [۱ + x(x + ۱)]^۲ \end{aligned}$$

یعنی عدد حاصل همواره مربع کامل است.

۱) این قضیه به صورت مفصل‌تری در جلسه‌ی سوم مورد بحث قرار گرفته است.

مثال ۱-۱۸ x، y و z سه عدد صحیح دلخواه و دوبه‌دو متمایز از یکدیگر هستند. ثابت کنید: $(x-y)^{۵}+(y-z)^{۵}+(z-x)^{۵}$ بر $۵(x-y)(z-x)(y-z)$ بخش‌پذیر است.

«المپیاد ریاضی شوروی ـ ۱۹۶۲»

حل: اگر $x-y=a$ و $y-z=b$ فرض کنیم، آن‌گاه $z-x=-(a+b)$ خواهد بود. حالا بر اساس تغییر متغیرهای‌مان عبارات را تغییر می‌دهیم:

$$(x-y)^{۵}+(y-z)^{۵}+(z-x)^{۵}=a^{۵}+b^{۵}-(a+b)^{۵}$$

از طرفی با استفاده از اتحادها داریم:

$$a^{۵}+b^{۵}=(a+b)[a^{۴}-a^{۳}b+a^{۲}b^{۲}-ab^{۳}+b^{۴}]$$
$$(a+b)^{۵}=(a+b)(a+b)^{۴}=(a+b)[a^{۴}+۴a^{۳}b+۶a^{۲}b^{۲}+۴ab^{۳}+b^{۴}]$$

با کم کردن طرفین این تساوی‌ها داریم:

$$\begin{aligned}a^{۵}+b^{۵}-(a+b)^{۵}&=(a+b)[-۵a^{۳}b-۵a^{۲}b^{۲}-۴ab^{۳}]\\&=-۵ab(a+b)(a^{۲}+ab+b^{۲})\end{aligned}$$

پس $a^{۵}+b^{۵}-(a+b)^{۵}$ مضرب صحیحی از $-۵ab(a+b)$ است یعنی $(x-y)^{۵}+(y-z)^{۵}+(z-x)^{۵}$ بر $۵(x-y)(z-x)(y-z)$ بخش‌پذیر است.

۱-۳ مسائل

۱. حاصل عبارات زیر را با استفاده از اتحادها بیابید.

(الف) $(۲ + x + x^۲)(۲ - x + x^۲)$

(ب) $۳(۳x + ۲)(x - \frac{۲}{۳})(۸۱x^۴ + ۳۶x^۲ + ۱۶)$

(ج) $(۱ + ۲x)^۵$

(د) $(x + y)(x - ۲y)(x^۲ + xy + ۲y^۲)$

(ه) $(x + ۲)(x^۲ - ۲x + ۴)(x^۳ - ۸)$

(و) $(۳x^۲ - ۳)^۲(x^۴ + x^۲ + ۱)^۲(x^۶ + ۱)^۲$

۲. درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

(الف) $(a + b + c)^۳ = a^۳ + b^۳ + c^۳ + ۳(a + b)(b + c)(c + a)$

(ب) $(a + b + c)^۳ = (a + b - c)^۳ + (a - b + c)^۳ + (-a + b + c)^۳ + ۲۴abc$

(ج) $(a + b + c)^۳ = a^۳ + b^۳ + c^۳ + ۳(a + b + c)(ab + bc + ca) + ۳abc$

(د) $(x-a)^۲(b-c)+(x-b)^۲(c-a)+(x-c)^۲(a-b)+(a-b)(b-c)(c-a) = ۰$

۳. عبارات زیر را تجزیه کنید.

(الف) $(b - c)^۳ + (c - a)^۳ + (a - b)^۳$

(ب) $x^۴ + ۷x^۲ + ۶$

(ج) $x^۳ + x^۲ + x + ۱$

(د) $x^۵ + x + ۱$

(ه) $x^۴ + x^۳ + ۲x^۲ + x + ۱$

(و) $x^۷ + x^۲ + ۱$

(ز) $x^۸ - x + ۱$

(ح) $a^۴ + b^۴ + c^۴ - ۲b^۲c^۲ - ۲c^۲a^۲ - ۲a^۲b^۲$

(ط) $(x + ۱)(x + ۲)(x + ۳)(x + ۲۴) - ۲۴$

(ی) $x^۴ + x^۲ + \sqrt{۲}x + ۲$

(ک) $(a + b + c)(ab + ac + bc) - abc$

(ل) $۴x^۲ + ۲y^۲ + ۶xy + ۲x + ۳y - ۲$

۴. ده ورزشکار در مسابقه‌ی تنیس روی میز، مسابقه می‌دهند. هر دوی آن‌ها، درست یک بار با هم بازی می‌کنند. اولی در $x_۱$ بازی پیروز شد و در $y_۱$ بازی باخت، دومی $x_۲$ بازی را برد و $y_۲$ بازی را شکست خورد و غیره. ثابت کنید: $x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_{۱۰}^۲ = y_۱^۲ + y_۲^۲ + \cdots + y_{۱۰}^۲$.

«المپیاد ریاضی شوروی در سال ۱۹۸۷»

۵. فرض کنید a عددی گنگ باشد. کدام‌یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

«**المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۸**»

الف) دست کم یکی از a^3 و $a^4 - 1$ گنگ است.

ب) دست کم یکی از $a^3 - 1$ و a^6 گنگ است.

ج) دست کم یکی از a^2، a^3 و a^5 گویا است.

د) a^2 و $a^3 - 1$ گنگ هستند.

هـ) حداکثر یکی از $a^3 + 1$ و a^4 گنگ است.

۶. اگر $r^2 - r - 10 = 0$، آن‌گاه در مورد $(r+1)(r+2)(r-4)$ کدام‌یک از جملات زیر درست است؟

«**المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷۴**»

الف) عددی صحیح است. ب) مثبت و گنگ است. ج) منفی و گنگ است.

د) گویا اما غیرصحیح است. هـ) غیرحقیقی است.

۷. فرض کنید اعداد حقیقی a، b و c در روابط زیر صدق کنند:

$$2a + b + c = 0 \quad , \quad ab + ac + bc = 0$$

در این صورت کسر $\dfrac{a^2+1}{b^2+c^2+1}$ چند مقدار مختلف را می‌تواند بپذیرد؟

«**المپیاد مقدماتی ریاضی ـ ۱۳۸۱**»

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) بی‌نهایت

۸. فرض کنید مجموعه‌ی A به شکل زیر تعریف شده باشد:

$$A = \{a^2 + b^2 | a, b \in N \cup \{0\}\}$$

در این صورت:

«**المپیاد مقدماتی ریاضی ـ ۱۳۸۱**»

الف) برای هر دو دد x و y در A داریم: $x + y \in A$

ب) برای هر دو عدد y و x در A داریم: $|x - y| \in A$

ج) برای هر دو عدد x و y در A داریم: $xy \in A$

د) اگر $x^2 \in A$ آن‌گاه $|x| \in A$

هـ) هیچ کدام از موارد بالا صحیح نیست.

۹. سه رقم سمت راست 21^{64} کدام است؟

«**المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۷**»

الف) ۶۸۱ ب) ۸۸۱ ج) ۴۸۱ د) ۲۲۱ هـ) ۳۸۱

۱۰. حاصل عبارت $\sqrt{(۴۵ - ۴\sqrt{۴۱})^۳} - \sqrt{(۴۵ + ۴\sqrt{۴۱})^۳}$ کدام است؟

«المپیاد مقدماتی ریاضی ـ ۱۳۸۳»

الف) ۵۰۸ ب) ۵۰۴ ج) $۴\sqrt{۴۱}$ د) $۱۰۶\sqrt{۴۱}$ هـ) $۹۰\frac{۳}{۴}$

۱۱. پس از بسط دادن $(۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots + ۹x^۸ + ۱۰x^۹)^۲$، چند تا از ضرایب فرد است؟

«المپیاد ریاضی در ایران ـ ۸۳»

الف) ۱ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ هـ) ۱۰

۱۲. اگر

$$S = \frac{(۲^۳ - ۱)(۳^۳ - ۱)(۴^۳ - ۱)\cdots(۱۰۰^۳ - ۱)}{(۲^۳ + ۱)(۳^۳ + ۱)(۴^۳ + ۱)\cdots(۱۰۰^۳ + ۱)}$$

کدام‌یک از مقادیر زیر به S نزدیک‌تر است؟

«المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷۵»

الف) ۰٫۶ ب) ۰٫۶۷ ج) ۰٫۶۶۷ د) ۰٫۶۶۶۷ هـ) ۰٫۶۶۶۶۷

(راهنمایی: $n^۲ - n + ۱ = (n-۱)^۲ + (n-۱) + ۱$)

۱۳. ۱۹۶۳ رقم بعد از ممیز را در بیان دهدهی عدد زیر پیدا کنید:

$$A = (\sqrt{۲۶} + ۵)^{۱۹۶۳}$$

«المپیاد ریاضی لنینگراد ۱۹۶۳»

۱-٤ حل مسائل

.۳
الف. از اتحاد اویلر استفاده می‌کنیم.
د. جملات $(x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2)$ را اضافه می‌کنیم.
و. جملات $(x^6 - x^6 + x^5 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3)$ را اضافه می‌کنیم.
ز. جملات $(x^7 - x^7 + x^6 - x^6 + x^5 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2)$ را اضافه می‌کنیم.
ح. $2b^2c^2$ را اضافه و کم می‌کنیم $\Leftarrow$ $(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2$
ی. $2x^2$ و ۱ را اضافه و کم می‌کنیم، حاصل تجزیه: $(x^2 + \sqrt{2} + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$
ک. با ضرب عبارت‌ها به چندجمله‌ای: $2abc + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + bc^2 + b^2c$
می‌رسیم که با نوشتن $2abc = abc + abc$ می‌توان تجزیه نمود.

.٤ مجموع بردها با مجموع باخت‌ها برابر است $x_1 + \cdots + x_{10} = y_1 + \cdots + y_{10}$
در نهایت از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

.۵ حداقل یکی از a^3 و a^4 گنگ هستند زیرا اگر هر دوگویا باشد $a = \dfrac{a^4}{a^3}$ هم باید گویا باشد که خلاف فرض است بنابراین حداقل یکی از a^3 و $a^4 - 1$ گنگ است.

.۶

$$(r+1)(r-4) = r^2 - 3r - 4 = 6 - 2r$$

$$\Rightarrow -2(r-3)(r+2) = -2(r^2 - r - 6) = -8 \quad \text{عددی صحیح است}$$

.۷

$$\begin{array}{l} 2a = -(b+c) \\ a(b+c) = -(bc) \end{array} \Rightarrow b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \frac{a^2+1}{b^2+c^2+1} = a^2 + 1$$

یک مقدار می‌گیرد.

.۸ با توجه به اتحاد لاگرانژ $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz + yt)^2 + (xt - yz)^2$
گزینه‌ی (ج) درست است.

.۹ با استفاده از بسط دوجمله‌ای نیوتن $(20 + 1)^{64}$ سه رقم آخر را به‌دست می‌آوریم که برابر ۶۸۱ است.

.۱۰ اگر دو عدد طبیعی A و B چنان باشند که $A^2 - B$ مربع کامل باشند و $C = \sqrt{A^2 + B}$:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} = \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

که در این سؤال $A = ۴۵$، $B = ۶۵۶$ و $C = ۳۷$.

۱۱. پس از بسط فقط ضرایب جملاتی که از درجه‌ی ۰، ۴، ۸، ۱۲ و ۱۶ می‌باشند فرد می‌شود.

۱۲. با توجه به $n^۲ + n + ۱ = (n + ۱^۲) - (n + ۱) + ۱$ می‌توان S را به صورت زیر ساده کرد:

$$\begin{aligned} S &= \frac{(۲-۱)(۳-۱)\cdots(۱۰۰-۱)(۱۰۰^۲+۱۰۰+۱)}{(۲+۱)(۳+۱)\cdots(۱۰۰+۱)(۲^۲-۲+۱)} \\ &= \frac{۲(۱۰۰^۲+۱۰۰+۱)}{۳\times ۱۰۰\times ۱۰۱}) \sim ۰/۶۶۶۷ \end{aligned}$$

۱۳. می‌دانیم که $(۵+\sqrt{۲۶})^{۱۹۶۳} + (۵+\sqrt{۲۶})^{۱۹۶۳}$ عددی صحیح است، از طرفی

$$-۰/۱ < ۵ - \sqrt{۲۶} < ۰ \rightarrow -۱۰^{-۱۹۶۳} < (۵-\sqrt{۲۶})^{۱۹۶۳} < ۰$$

پس تمام ۱۹۶۳ رقم بعد از ممیز صفر می‌باشند.