

درخت ال‌مپیاد درختی است که توسط انتشارات خوشخوان‌کاشته شده و هریک از کتاب‌های این پروژه برگی از آن است. وظیفه مانگهداری و آیاری این درخت است. امیدواریم باعنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده و به بار واقعی بنشیند. فراموش نکنید که بار و میوه‌ی این درخت شما عزیزان می‌باشد.

التماس دعا



پروژه‌ی درخت المپیاد

اعتقاد بر این است که شروع فعالیت‌های المپیاد به صورت حرفه‌ای، باید از ابتدای دوره‌ی دیبرستان شروع شود. آکثر المپیادهای علمی در زمستان سال سوم دیبرستان تعیین تکلیف می‌شوند. بنابراین از شروع دیبرستان تا اواسط سال سوم حدوداً ۸ ترم تحصیلی می‌شود (با احتساب فصل و ترم تابستان) که لازم است برنامه‌ریزی دقیقی برای این چند ترم انجام شود.

انتشارات خوشخوان این برنامه‌ریزی را در قالب پروژه‌ی درخت المپیاد انجام داده است که هر شاخه از درخت، مبحثی از آن المپیاد و هر برگ از آن شاخه شماره‌ای از آن مبحث می‌باشد.

به عنوان مثال اپتیک (۱) کتابی است که در یک ترم تحصیلی در یک کلاس ممتاز می‌توان برای داوطلبان المپیاد فیزیک تدریس کرد.

با عنایات حضرت حق و با کمک تنی چند از همکاران گرامی کتب مربوط به این درخت در هر رشته‌ای از المپیاد معرفی خواهد شد.

گروه المپیاد

انتشارات خوشخوان

ییتگفتارناتر



مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش‌هایی هستند که کم و بیش در سرتاسر دنیا پهناور به صورت داخلی و بین‌المللی برگزار می‌شود و سال به سال به تنوع، جذبه و عظمت آن‌ها افزوده می‌شود. یکی ازین همایش‌های باشکوه که هرسال در چندین رشته در سطح دانش آموزان سنتوات آخر دوره متوسطه برگزار می‌شود المپیادهای علمی می‌باشد که قدیمی ترین آن المپیاد ریاضی بوده و از سال ۱۹۵۹ آغاز و تابه حاصل داشته است.

در حال حاضر نتیجه‌ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص‌های قدرت علمی آن کشور محسوب شده و نفرات ممتاز این المپیادها به راحتی جذب دانشگاه‌ها و آکادمی‌های ممتاز جهان شده و پس از گذشت سنتواتی چند به موفقیت‌های چشم‌گیری نایل می‌شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته‌های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال‌های نه چندان دور از مdal آوران این المپیادها بوده‌اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ در المپیاد ریاضی جهان که در کشور کویا برگزار می‌شد شرکت کرده و با کسب یک مدال برنز به مقام ۲۶ جهان نائل آمد که تعجب همگان را برانگیخت چرا که در آن سال ایران در گیرجنب تحمیلی بوده و جهانیان به غیر از جنگ و در گیری چیزی از ایران سراغ نداشتن و در خشش دانش آموزان ایران در آن سال و سنتوات بعد نگاه هارابه سمت ایران معطوف کرده و چشم خفته آن‌ها را تا حدود زیادی بیدار کرد. همانطور که از رسانه‌های گروهی مطلع شده اید در تمام المپیادهای علمی تیم اعزامی کشور عزیزمان در سنتوات گذشته جزء کشورهای برتر بوده و ضمن کسب مدال‌های رنگارنگ رتبه‌های بسیار در خشانی از جمله رتبه اول را حائز شده‌اند.

نحوه گزینش نفرات اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگرند به این صورت که در ابتدا در مسابقه‌ای سراسری تحت عنوان مرحله اول که معمولاً به صورت پرسش‌های چند‌گزینه‌ای مطرح می‌شود حدوداً هزار نفر پذیرفته شده و در رقباتی معمولاً تشریحی که مرحله‌ی دوم نامیده می‌شود شرکت می‌کنند. در این مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و در دوره‌ی تابستانی در باشگاه دانش پژوهان جوان که متوالی برگزاری تمام المپیادهای علمی می‌باشد شرکت کرده و پس از گذراندن این دوره مرحله‌ی سوم آزمون برگزار شده و عده‌ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عده‌ای مدال نقره و عده‌ای دیگر مدال برنز

کسب می کنند (در این مرحله معمولاً همه‌ی افراد شرکت کننده در دوره مدارک سب می کنند) دارندگان مدارک طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضاء، تیم اعزامی شناسایی می شوند. دارندگان مدارک طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه‌ی تحصیل می دهند اما دارندگان مدارک های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان در کنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه خود در قابت می کنند با این تفاوت که این افراد سهمیه‌ی ویژه‌ای در پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه‌ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش پژوهان جوان تشریح شده است.

متاسفانه در سال‌های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت‌های المپیاد جبهه می‌گیرند و ادعا می‌کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت در کنکور سراسری بوده و هرچه دانش آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند از کنکور فاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدارک طلا (که بسیار محتمل است) آینده‌ی خود را تباہ کرده است در حالی که با تحقیقی که در سال‌های گذشته انجام شده است فعالیت در زمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکور نیست بلکه مسیر فعالیت برای کسب رتبه مناسب در کنکور را بسیار هموارتر می سازد به عنوان مثال می توانید تمام مدارک آوران نقره و برنز ویا حتی آن‌هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ونی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را در یک رشته شناسایی کرده و موفقیت‌های تحصیلی آن‌ها در دانشگاه‌ها جویا شوید که نگارنده‌ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

به هر حال ادعا این است که فعالیت دانش آموز در یک رشته از رشته‌های المپیاد فواید بسیاری دارد که به تعدادی از آن‌ها به صورت گذر اشاره می‌شود:

۱. همان طور که خداوند به بشرطن سالم داده و انتظار می رود با ورزش‌ها و نرم‌شدهای مناسب از این نعمت خدادادی محافظت شود به هر داش آموزی نیز استعدادی داده است که باید شکوفا و بهره ور شود. اغلب باشگاه‌های کشور اعم از خصوصی و دولتی داوطلب زیادی در رشته‌های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت در یکی از رشته‌های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدنسازی و ... می باشند که وقتی از آن افراد راجع به اهدافشان از این فعالیت سوال می شود سالم نگه داشتن بدنه را عنوان داشته و انتخاب شدن در تیم ملی را در نهایت عنوان می کنند. چه بسا افرادی که در این رشته‌ها فعالیت می کنند و هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی‌کنند که وقتی از این افراد راجع به موقیت هایشان سؤال می‌شود هرگز خود را ناموفق معرفی نمی‌کنند و همین‌که توانسته اند از بدن سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می‌دانند بنابرین فعالیت دریکی از زمینه‌های المپیاد چه در نهایت به کسب مдал منجر شود و یا نشود همین‌که استعداد خدادادی پرورش می‌یابد موقیتی است بسیار بزرگ.

۲. کتب درسی به اذعان اکثر کارشناس‌ها و اساتید سال به سال ساده‌تر شده و برای عموم داش آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ عنوان اغنا کننده نمی‌باشند لذا لازم است این سری از داش آموزان فعالیت ویژه‌ای را در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود داشته باشند تا احساس کنند این فعالیت‌ها برای آن‌ها اغنا کننده است.

۳. فعالیت‌های المپیادی که در نهایت به حل سؤالات پیچیده و عمیق در رشته‌ی مربوطه می‌شود باعث می‌شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش آمده در زندگی به دید یک مسئله‌ی المپیاد نگاه کرده و در حل آن نسبت به سایر رقبا موفق تر باشند. تحقیقات نشان می‌دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی از شاخه‌های المپیاد را دنبال می‌کنند (نه به نیت کسب مдал بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق‌ترند.

۴. زیرینای اکثر دروس پیش دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می‌شود بنابرین افرادی که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می‌کنند در دوره پیش دانشگاهی با پایه‌ی بسیار قوی تری با دروس مواجه می‌شوند و نسبت به رقبای خود راحت تر از عهده آن‌ها بر می‌آیند.

۵. با توجه به مصوبه‌های موجود، کسب مdal دریکی از المپیاد‌های علمی (حتی مdal برتر) باعث اعطای امتیازهای ویژه‌ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه‌های سراسری می‌شود که جزئیات آن در سایت‌های معتبر مخصوصاً سایت باشگاه دانش پژوهان جوان موجود است.

۶. همچنین با توجه به مصوبه‌های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به حضوریت نهادهای مختلف از جمله بنیاد ملی نخبگان در می‌آیند که با رجوع به سایت‌های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق یافته به اعضاء، را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مفتخر است از بدو تأسیس به فکر تدوین و تألیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال و با بهره‌گیری از استاید مجری که خود در سنواتی نه چندان دور مدار آوریکی از المپیادهای علمی بوده‌اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد از کسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین و تألیف شود که در آن هر کتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت امپیاد نام‌گرفته است و هر کتاب از این پروژه که در اختیار دارید برگی از آن درخت خواهد بود.

بدیلی است انجام چنین پروژه‌ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می‌طلبد تذا لازم است از تمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده‌اند، تشکر و قدردانی می‌نماییم و درنهایت نیز از عوامل زحمت‌کش انتشارات اعم از مشاورین، حروف چین‌ها، طراحان و کارمندان و کارگران عزیز کمال امتنان را دارم.



با تشکر

رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مولفین

مئّت خدای را عز و جل که طاعتشن موجب قربتست و به شکر اندرش مزید نعمت هر نفسی که فرو می‌رود ممّ حیاتست و چون بر می‌آید مفرّح ذات. پس در هر نفسی دو نعمت موجودست و بر هر نعمت شکری واجب

از دست و زبان که برازید

(گلستان سعدی)

بعد از چند سال تدریس المپیاد، به پیشنهاد چند تن از دوستان تصمیم به نوشتن کتابی در زمینه چندجمله‌ای‌ها گرفتیم. در این کتاب سعی شده است تا همه‌ی آن‌چه برای چندجمله‌ای‌ها در المپیاد ریاضی مورد نیاز است، پوشانده شود. مطالب این کتاب برای آمادگی در مبحث چندجمله‌ای‌ها برای المپیاد ریاضی تا مرحله‌ی دوم و کمی فراتر از آن کافی است.

آنچه در این کتاب می‌بینید:

در کتاب حاضر، ۵ مبحث در چندجمله‌ای‌ها بررسی شده است.

هر فصل دارای سه بخش کلی است که در بخش اول هر فصل به آموزش مبحث مربوطه پرداخته‌ایم و مثال‌های گنگون با آن را حل و بررسی کرده‌ایم. در بخش بعدی سعی شده است با حل مسئله‌هایی که در مسابقات مختلف مطرح شده‌اند، خواننده مهارت لازم برای حل مسائل را کسب کند. در پایان هر فصل نیز مسائل بیشتری برای تمرین و تسليط از کشورهای مختلف آورده شده است.

در فصل نخست کتاب، مطالبی در مورد آشنایی کلی با چندجمله‌ای‌ها و اعداد مختلط بیان شده است و با حل تمرین‌هایی از مباحث مختلف المپیاد سعی شده است تا کاربرد اعداد مختلط تا حد امکان آموزش داده شود.

فصل دوم به مبحث مهم ریشه‌ی یک عبارت جبری اختصاص دارد. در این فصل به قضایای مهمی از قبیل «قضیه‌ی اساسی جبر»، «قضیه‌ی ویت» و قضایایی در مورد مکان هندسی ریشه‌ها در صفحه‌ی اعداد مختلط پرداخته شده است.

در فصل سوم، قضیه‌ی مقدار میانی را مورد بررسی قرار داده‌ایم و به حل مسئله‌ی پرداخته‌ایم که نشان می‌دهد این قضیه در عین سادگی، قدرت زیادی در حل مسائل دارد.

فصل چهارم، بیشتر به ساختار چندجمله‌ای‌ها اختصاص دارد که اساسی‌ترین قسمت آن، قضیه‌ی جذاب «درون‌یابی لاگرانژ» است که رابطه‌ی بین مقادیر و ضرایب یک چندجمله‌ای را بیان می‌کند.

در ادامه به حل مسائل تکمیلی مرتبط با فصل‌های قبلی که در المپیادهای مختلف بیان شده‌اند پرداخته‌ایم تا خواننده تسليط بیشتری پیدا کند.

فصل انتهایی کتاب نیز به بررسی موضوع تحويل ناپذیری چندجمله‌ای‌ها اختصاص دارد که برای

مرحله دوم المپیاد ریاضی ایران ، چندان ضروری نیست اما مطالعه‌ی آن برای مراحل بعدی و همین‌طور اشراف بیشتر توصیه می‌شود.

کتاب با مسائل متفرقه از مسابقات منطقه‌ای و جهانی ریاضی به پایان می‌رسد.

توصیه‌ای که به دانش آموزان برای آموزش المپیاد داریم، این است که با صبر و حوصله در آموزش ریاضیات تلاش کنند. همین‌طور بهتر است که بر روی حل تمرین‌های المپیاد وقت گذاشته و ناامید نشوند.

خوش است زیر مغیلان به راه بادیه خفت، شب رحیل، ولی ترک جان بباید گفت (گلستان سعدی)

در انتها لازم می‌دانیم از دوستان و همکاران عزیzman، آقایان احسان توحیدی، حسین ذاکری‌نیا، مجید دینی‌پور، عرفان شریفی، حشمت قادرپناه و همین‌طور از آقای سعدی بابت اشعار زیبایشان که در نوشنی این اثر، ما را یاری کرده‌اند، تشکر کنیم. به طور خاص از دوست عزیzman، آقای حسام الدین رجب‌زاده که ویراستاری این اثر را تقبل کردند و نظرات سازنده‌ی خود را به ما گوشتند نمودند، همین‌طور از کارکنان محترم انتشارات خوشخوان، شخص آقای اکبری، مسئول پروژه برگ و آقای حاجی‌زاده رئیس انتشارات خوشخوان که با تلاش خود این کتاب را برای دانش آموزان آماده نمودند، قدردانی می‌نمایم.

در پایان از همه‌ی اساتید و دانش آموزان عزیزان خواهشمندیم هرگونه پیشنهاد، انتقاد و نظرات خود در مورد این کتاب را از طریق پست الکترونیکی amirhosseingorzi@gmail.com و sina.rezaie71@yahoo.com با ما در میان بگذارند.

و من الله توفيق

امیرحسین گرزلی

سینا رضائی زارعی

فهرست مطالب

۱	چند جمله‌ای‌ها (آشنایی)	فصل ۱	
۳۹	ریشه	فصل ۲	
۵۹	قضیه‌ی مقدار میانی	فصل ۳	
۷۷	درونیابی لاغرانژ	فصل ۴	
۹۳	تحویل ناپذیری	فصل ۵	
۱۰۷	پیوست‌ها	فصل ۶	
۱۱۳	تمرینات تکمیلی فصل ۱ تا ۴	فصل ۷	
۱۴۱	مسائل انتهایی	فصل ۸	

چندجمله‌ای‌ها (آشنایی)



یکی از مباحث مورد توجه و جذاب در المپیاد ریاضی که در سال‌های اخیر سهم به سزاگی از سوالات مراحل مختلف را به خود اختصاص داده است مبحث جبر است. غالباً در این درس ۳ مبحث مهم تدریس می‌شود که عبارتند از:

۱. چندجمله‌ای‌ها
۲. نابرابری‌ها
۳. معادلات تابعی

ما در این کتاب برآنیم تا به مبحث اول یعنی چندجمله‌ای‌ها بپردازیم و مباحث لازم و مفید برای آشنایی با چندجمله‌ای‌ها و توانایی حل مسئله به کمک آن‌ها را بیان کنیم.



آشنایی با چندجمله‌ای‌ها

۱-۱

منظور از یک چندجمله‌ای عبارتی جبری به شکل:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

می‌باید که در آن به اعداد a_n, a_0, a_1, \dots ضرایب این چندجمله‌ای می‌گوییم. هم‌چنین به بزرگ‌ترین توانی که ضریب متناظر آن غیرصفر باشد درجه این چندجمله‌ای گوییم و با \deg نمایش می‌دهیم. به ضریب متناظر با بزرگ‌ترین درجه «ضریب پیش رو» چندجمله‌ای گفته می‌شود. اگر چندجمله‌ای دارای ضریب پیش رو واحد باشد به آن چندجمله‌ای «تکین» می‌گوییم.

معمولًاً چندجمله‌ای‌ها را با حروف بزرگ لاتین به شکل زیر نمایش می‌دهند:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

هم‌چنین چندجمله‌ای‌ها را بسته به این که ضرایب شان عضو چه مجموعه‌ای باشد دسته‌بندی می‌کنند. بدین شکل که اگر K مجموعه‌ای دلخواه باشد منظور از $K[x]$ مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌ها با ضرایب عضو K می‌باشد و با این نمادگذاری منظور از $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$, \mathbb{R} و \mathbb{C} به ترتیب چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح، گویا، حقیقی و مختلط^۱ می‌باشد.

برای مثال اگر $1 - 3x^3 + x$ باشد می‌دانیم $P(x)$ با ضرایب صحیح و دارای ضریب پیش‌رو ۳ و درجه‌ی ۲ است. پس $\deg(P) = 2$ می‌باشد.

۲-۱ اعمال اصلی روی چندجمله‌ای‌ها

از ۴ عمل اصلی در حساب می‌توان سه عمل $+$, $-$ و \times را برای چندجمله‌ای‌ها تعریف کرد:

تعریف جمع و تفریق: اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ q(x) &= b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0. \end{aligned} \quad (n \geq k)$$

حاصل $p(x) \mp q(x)$ به صورت زیر است:

$$p(x) + q(x) = a_n x^n + \cdots + a_{k+1} x^{k+1} + (a_k + b_k) x^k + (a_{k-1} + b_{k-1}) x^{k-1} + \cdots + (a_0 + b_0)$$

در واقع در عمل جمع ضرایب متناظر توان‌های یکسان را با هم جمع می‌کنیم هم‌چنین:

$$p(x) - q(x) = a_n x^n + \cdots + a_{k+1} x^{k+1} + (a_k - b_k) x^k + \cdots + (a_0 - b_0)$$

تعریف ضرب: مشابه قبل برای تعریف ضرب دو چندجمله‌ای $p(x)$ و $q(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} p(x).q(x) &= (a_n x^n + \cdots + a_0)(b_k x^k + \cdots + b_0) \\ &= a_n b_k x^{n+k} + \cdots + (a_1 b_0 + b_1 a_0)x + a_0 b_0. \end{aligned}$$

در واقع ضریب x^i در حاصل ضرب $p(x).q(x)$ برابر است با:

$$b_0 a_i + b_1 a_{i-1} + \cdots + b_{i-1} a_1 + b_i a_0$$

^۱) در فصول بعد کتاب توضیحاتی در مورد این اعداد داده می‌شود.

توجه کنید اگر j از درجه‌ی p یا q بزرگ‌تر بود، a_j یا b_j را برابر صفر می‌گیریم.

● به راحتی به دست می‌آید که برای هر دو چندجمله‌ای $(x)p(x)$ و $q(x)$ داریم:

$$\deg(p(x) \pm q(x)) \leq \max\{\deg(p(x)), \deg(q(x))\}$$

$$\deg(p(x).q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$$

مثال ۱-۱ فرض کنید 1 $p(x) = x + 3$ و $q(x) = 3x^2 - x + 1$ حاصل $p(x).q(x) =$ $p(x) - q(x)$ را به دست آورید.

حل: داریم:

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (3x^2 - x + 1) - (x + 3) \\ &= 3x^2 - x + 1 - x - 3 = 3x^2 - 2x - 2 \\ p(x).q(x) &= (3x^2 - x + 1)(x + 3) = 3 - 2x + 8x^2 + 3x^3 \end{aligned}$$

چهارمین عمل اصلی یعنی \div همواره روی چندجمله‌ای‌ها قابل بیان نیست و تنها در برخی موارد می‌توان دو چندجمله‌ای را بر هم تقسیم کرد که در فصل بعدی بیان خواهیم کرد.

ریشه

یکی از مهم‌ترین موضوعات در بررسی چندجمله‌ای‌ها، ریشه‌ها هستند.

تعریف

اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه باشد، آنگاه عدد a را ریشه‌ی چندجمله‌ای $(x)p(x)$ گوییم هرگاه $P(a) = 0$ برقرار باشد.

در تعریف بالا منظور از $p(a)$ یعنی مقدار عبارت $x = a$ به ازای $p(x)$

مثال ۲-۱ اگر 1 $p(x) = x - 1$ در این صورت 1 ریشه $p(x)$ است. چراکه 0 $p(1) = 1 - 1 = 0$ است.

به عنوان مثالی دیگر اگر 2 $p(x) = x^2 - x - 2$ آنگاه 0 پس 2 ریشه‌ی $p(x)$ خواهد بود.

در بررسی چندجمله‌ای‌ها ممکن است با این سؤال مواجه شویم:

«آیا هر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی حتماً دارای ریشه‌ای در اعداد حقیقی است؟»

اگر اندکی روی این سؤال فکر کنیم در می‌باییم که جواب آن خیر است چرا که کافی است چندجمله‌ای $x^2 + 1 = p(x)$ را در نظر بگیرید. برای هر عدد حقیقی x داریم $x^2 > 0$ و این یعنی $p(x) = x^2 + 1$ اعداد حقیقی ریشه ندارد.

آن‌چه که دانشمندان ریاضی پس از مواجهه با این سؤال انجام دادند ساختن اعدادی جدید از روی اعداد حقیقی بود که به کمک این اعداد که آن‌ها را **اعداد مختلط** نامیدند توانستند ثابت کنند که: هر چندجمله‌ای $p(x)$ با ضرایب مختلط و از درجه‌ی بزرگ‌تر از 1 دارای حداقل یک ریشه‌ی مختلط است.

حال به معرفی اعداد مختلط می‌پردازیم.

۳-۱ اعداد مختلط

همان‌طور که گفتیم یکی از دلایل به وجود آمدن اعداد مختلط معادله $x^2 + 1 = 0$ بود که برای آن ریشه‌ای در اعداد حقیقی نداشتیم. در حقیقت به کمک ریشه‌ای فرضی برای این معادله ما اعداد مختلط را تعریف می‌کنیم:

- i را عددی فرضی در نظر بگیرید به طوری که $-1 = i^2$. به وضوح $\mathbb{R} \neq \{i\}$ خواهد بود.

تعریف

منظور از مجموعه‌ی اعداد مختلط که آن را به اختصار با \mathbb{C} نمایش می‌دهیم، مجموعه‌ی زیر است:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

تعریف

برای یک عدد مختلط $z = a + bi$ به اعداد a و b به ترتیب **قسمت حقیقی** و **قسمت موهومی** z می‌گوییم و با $(z)^1$ و $\text{Re}(z)$ نمایش می‌دهیم، دقت کنید قسمت حقیقی و موهومی یک عدد مختلط، حقیقی هستند.

1) Real

2) Imaginary

دو عدد مختلط z_1 و z_2 را یکسان (مساوی) گوییم اگر و تنها اگر

$$\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2), \quad \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$$

نکته ۱. طبق تعریف اگر a عددی حقیقی باشد می‌توان نوشت $i = a + 0^\circ \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ که در نتیجه هر عدد حقیقی خود عددی مختلط است و در نتیجه

عمل اصلی

تعریف

اگر $z' = a' + b'i$ و $z = a + bi$ اعدادی مختلط باشند:

۱. حاصل $z + z'$ برابر $(a + a') + (b + b')i$ است.

۲. حاصل $z - z'$ برابر $(a - a') + (b - b')i$ است.

۳. حاصل $z \times z'$ برابر است با:

$$z \cdot z' = (a + bi) \times (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

۴. حاصل $\frac{z}{z'}$ برابر است با:

(الف) ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که $b' \neq 0^\circ$ در این صورت $z' \in \mathbb{R}$ است

پس تعریف کنید:

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + bi}{a' + b'i} = \left(\frac{a}{a'} \right) + \left(\frac{b}{b'} \right)i$$

(ب) در غیر این صورت اگر $b' = 0^\circ$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{z}{z'} &= \frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{(aa' + bb') + (a'b - ab')i}{a'^2 + b'^2} \\ &= \left(\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} \right) + \left(\frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2} \right) i \end{aligned}$$

مثال ۳-۱ فرض کنید $z_1 = 1 + 2i$ و $z_2 = 3 + i$ را محاسبه کنید.

حل: داریم:

$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (3 + i) = -2 + i$$

همچنین داریم:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{3 + i} = \frac{(1 + 2i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{5 + 5i}{10} = \left(\frac{5}{10} \right) + \left(\frac{5}{10} \right)i$$

بنابراین تا به حال توانسته‌ایم 4 عمل اصلی را روی اعداد مختلط تعریف کنیم با کمی توجه می‌توان دید که این 4 عمل روی اعداد حقیقی مشابه قبل عمل کرده و حاصل یکسانی دارند.

تعریف

اگر $z = a + bi$ عددی مختلط باشد (a و b اعدادی حقیقی هستند). آنگاه به عدد مختلط $a - bi$ «مزدوج» عدد z گوییم و آن را با \bar{z} نمایش می‌دهیم.

تعریف

اگر z عددی مختلط باشد ($z = a + bi$) در این صورت به عدد $\sqrt{a^2 + b^2}$ «نرم عدد z گوییم و با نماد $|z|$ نمایش می‌دهیم.

نکته 2 . می‌توان به راحتی اثبات کرد که برای هر عدد مختلط z داریم:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

اثبات:

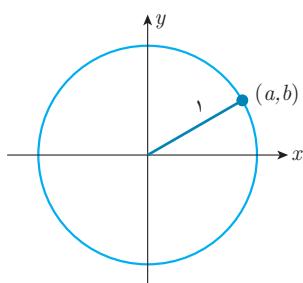
$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi)(a - bi) = a^2 - (-b^2) + (-ab + ab)i \\ &= (a^2 + b^2) = |z|^2 \end{aligned}$$

همه‌ی اعداد مختلطی را بیابید که نرم آن‌ها برابر 1 باشد.

مثال ۱-۴

حل: عدد مورد نظر را z بنامید. پس $1 = |z|$ اگر $z = a + bi$ در این صورت:

$$a^2 + b^2 = |z|^2 = 1$$



می‌دانیم اگر a را روی محور طول‌ها در صفحه‌ی مختصات و b را روی محور عرض‌ها نمایش دهیم معادله‌ی بالا شکل یک دایره به شعاع یک و به مرکز مبدأ مختصات خواهد بود:

$$|z| = |\bar{z}|$$

برای هر عدد مختلط z نشان دهید:

مثال ۵-۱

حل: بر عهده‌ی خواننده

حاصل عبارت $A = i^{10} + i^{99} - i^7 + i + 1$ را بیابید.

مثال ۶-۱

حل: به راحتی می‌توان به دست آورد $i^3 = -i$, $i^2 = -1$. پس داریم:

$$i^{10} = i, \quad i^{99} = -i, \quad i^7 = -i$$

پس به دست می‌آید:

$$A = i + (-i) - (-i) + i + 1 = 2i + 1$$

فرض کنید معادله‌ی $x^2 + 2x + 5 = 0$ جواب‌هایی به شکل $z = a + bi$ دارد.

مثال ۷-۱

آنها را بیابید.

حل: اگر z جواب معادله‌ی مذکور باشد داریم:

$$z^2 + 2z + 5 = 0 \Rightarrow (a^2 - b^2) + 2abi + 2(a + bi) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2 + 2a + 5) + (2ab + 2b)i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2ab + 2b = 0 \\ a^2 - b^2 + 2a + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b(a + 1) = 0 & (1) \\ b^2 = a^2 + 2a + 5 & (2) \end{cases}$$

معادله‌ی (۱) دو حالت دارد اگر $b = 0$ آنگاه $a^2 + 2a + 5 = 0$ می‌شود اما معادله در اعداد

حقیقی جواب ندارد چراکه:

$$a^2 + 2a + 5 = (a + 2)^2 + 1 > 0$$

حالت دیگر $a + 1 = 0$ یا $a = -1$ که از آن به دست می‌آید $b^2 = 4$ پس $b = \pm 2$ بنابراین ریشه‌ها عبارتند از $-1 + 2i$ و $-1 - 2i$.

معادله‌ی $x^2 + (2+i)x + 3 + 2i = 0$ دو جواب به شکل $a + bi$ دارد. آنها

مثال ۸-۱

را بیابید.

حل: به عهده‌ی خواننده.

قضیه

اگر A و B اعداد مختلط دلخواهی باشند، روابط زیر برقرار است:

$$\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B} . \quad ۱$$

$$\overline{(A-B)} = \overline{A} - \overline{B} . \quad ۲$$

$$\overline{(AB)} = \overline{A} \cdot \overline{B} . \quad ۳$$

۴. اگر $B \neq ۰$ باشد:

$$\left(\frac{\overline{A}}{\overline{B}}\right) = \frac{\overline{A}}{\overline{\overline{B}}}$$

$$|AB| = |A| \cdot |B| . \quad ۵$$

۶. اگر $B \neq ۰$ باشد،

$$\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}$$

اثبات: اثبات این قضیه با محاسبه‌ی عبارات طرفین ساده بوده و بر عهده‌ی خواننده گذاشته می‌شود.

نکته ۳. عدد مختلط z عددی حقیقی است اگر و تنها اگر $\overline{z} = z$.

اثبات: اگر $\overline{z} = a - bi$ باشد داریم $\overline{z} = a + bi$ حال:

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow -b = b \Leftrightarrow b = ۰ \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

مثال ۹-۱ خواص زیر را برای نرم اعداد مختلط ثابت کنید:

$$-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z| . \quad ۱$$

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| . \quad ۲$$

۳. برای هر عدد مختلط دلخواه $۰ \leq |z| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $۰ \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$ اگر و تنها اگر $۰ \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$

۴. برای هر عدد مختلط z , $|z| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

۵. برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 : $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

حل: به عنوان تمرین بر عهده‌ی خواننده گذاشته می‌شود.

مثال ۱۰-۱

برای دو عدد مختلط z_1 و z_2 نشان دهید:

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

حل: داریم:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1 \overline{z_2} - \overline{z_1} z_2 \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \end{aligned}$$

مثال ۱۱-۱

ثابت کنید اگر $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ و $|z_1| = |z_2| = 1$ و $z_1 z_2 \neq -1$ آنگاه

$$A = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \text{ می‌دانیم}$$

$$z_1 \overline{z}_1 = 1 \Rightarrow \overline{z}_1 = \frac{1}{z_1}$$

$$\overline{z}_2 = \frac{1}{z_2}$$

و به طریق مشابه:
داریم:

$$\overline{A} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{1 + z_1 z_2} = \frac{\overline{z}_1 + \overline{z}_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = A$$

پس $A \in \mathbb{R}$ است.

مثال ۱۲-۱

فرض کنید z_1, z_2, \dots, z_n اعدادی مختلط باشند و

$$|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$$

ثابت کنید عدد زیر عددی حقیقی است:

$$\frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \cdots (z_n + z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n}$$

حل: به راحتی برای اثبات این‌که عبارت داده شده عددی حقیقی است کافی است اثبات کنیم با مزدوجش برابر است، اما داریم:

$$\left(\frac{(z_1 + z_2) \cdots (z_n + z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n} \right) = \left(\frac{(\overline{z_1} + \overline{z_2})(\overline{z_2} + \overline{z_3}) \cdots (\overline{z_n} + \overline{z_1})}{\overline{z_1} \overline{z_2} \cdots \overline{z_n}} \right)$$

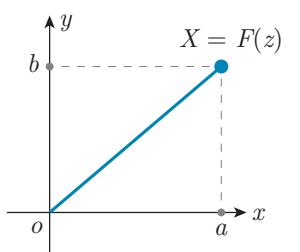
اما از آنجایی که برای $|z_i| = 1$ داریم $1 \leq i \leq n$ پس:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : z_i \overline{z_i} = |z_i|^2 = 1 \Rightarrow \overline{z_i} = \frac{1}{z_i}$$

با جاگذاری $\overline{z_i}$ ‌ها در روابط وکمی ساده‌سازی می‌توان ثابت کرد که عبارت داده شده با مزدوجش برابر بوده و در نتیجه عددی حقیقی است.

۴-۱ نمایش قطبی اعداد مختلط

اگر \mathbb{C} مجموعه‌ی اعداد مختلط باشد تناظری یک‌به‌یک و پوشاندن نقاط صفحه و \mathbb{C} وجود دارد که بدین شکل است.



$$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(a + bi) = (a, b)$$

خواننده به سادگی می‌تواند بررسی کند که تابع فوق تابعی یک‌به‌یک و پوشاست.

$$z = a + bi$$

در شکل بالا توجه کنید که $OX^2 = a^2 + b^2$ بنا براین داریم که:

$$OX^2 = |z|^2$$

و هم‌چنین $a = OX \cdot \cos \theta$ و $b = OX \cdot \sin \theta$ که θ زاویه‌ی بین نیم خط مثبت محور x ‌ها و OX می‌باشد.

با توجه به این مطالب می‌توان نوشت:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

که θ زاویه‌ای یکتا در بازه‌ی $[0^\circ, 2\pi]$ است.

نمایش قطبی

اگر z عددی مختلط باشد نمایشی به صورت

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

وجود دارد که به این نمایش، نمایش قطبی عدد مختلط z می‌گوییم.

توجه: با نرم‌گیری از طرفین معادله می‌توان به راحتی چک کرد که $|z| = r$.

تعريف

اگر $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ نمایش قطبی عدد z باشد. به اعداد r و θ به ترتیب **نرم** و

آرگومان z گوییم و با $|z|$ و $\arg(z)$ نمایش می‌دهیم.

یکی از ویژگی‌های جالب توجه این نمایش را در قضیه‌ی زیر خواهیم دید:

قضیه

اگر A و B اعدادی مختلط باشند داریم:

$$|AB| = |A| |B|$$

$$\arg(AB) = \arg(A) + \arg(B)$$

اثبات: قسمت اول در قضیه‌ای پیش از این اثبات گردید.

حال برای اثبات قسمت دوم قضیه داریم:

$$A = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$B = r'(\cos \gamma + i \sin \gamma)$$

$$\Rightarrow AB = (rr')[(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \gamma + i \sin \gamma)]$$

$$= rr'([\cos \theta \cos \gamma - \sin \theta \sin \gamma]) + i[\cos \theta \sin \gamma + \sin \theta \cos \gamma]$$

$$= rr'(\cos(\theta + \gamma) + i \sin(\theta + \gamma))$$

نکته ۴. توجه کنید که اگر در محاسبات بالا به عددی بزرگ‌تر از 2π برای آرگومان رسیدیم، می‌توان

هر مضرب صحیح دلخواهی از 2π را آن کم کرد، تا حاصل در بازه‌ی $(-\pi, \pi]$ قرار گیرد. در واقع آرگومان θ و $\theta + 2k\pi$ یکسان است.

نکته ۵. توجه کنید که به نحو کاملاً مشابه می‌توان اثبات کرد که اگر A و B اعدادی مختلط باشند و $B \neq 0$ آنگاه:

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \frac{|A|}{|B|}$$

$$\arg\left(\frac{A}{B}\right) = \arg(A) - \arg(B)$$

با توجه به قضیه‌ی قبل، بدینهی است اگر z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) اعداد مختلط با اندازه‌ی r_i و آرگومان θ_i باشند و $z_1 z_2 \cdots z_n = z$ خواهیم داشت:

$$|z| = r_1 r_2 \cdots r_n$$

$$\arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \cdots + \arg(z_n)$$

(قانون دموآور) اگر $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ باشد و $n \in \mathbb{Z}$ خواهیم داشت:

$$z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

این شیوه از نمایش اعداد کاربردهای بسیار زیادی در مسائل گوناگون دارد به عنوان یک نمونه می‌توان به مثال زیر توجه کرد.

مثال ۱۳-۱ حاصل عبارت $(1+i)^{1392}$ را محاسبه کنید.

حل: می‌توان نوشت:

$$1+i = |1+i| \left(\cos \arg(1+i) + i \sin \arg(1+i) \right)$$

$$|1+i| = \sqrt{2} \quad \text{اما داریم:}$$

$$\text{همچنین با محاسبه‌ی آسان می‌توان ثابت کرد } \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \text{ پس:}$$

$$(1+i) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow (1+i)^{1392} = (\sqrt{2})^{1392} \left(\cos(1392 \times \frac{\pi}{4}) + i \sin(1392 \times \frac{\pi}{4}) \right)$$

$$= 2^{696} \left(\cos(348\pi) + i \sin(348\pi) \right) = 2^{696}$$

۱۳

چندجمله‌ای‌ها (آشنایی)

مثال ۱۴-۱

برای هر عدد حقیقی θ , ثابت کنید:

$$\sin(\delta\theta) = 16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta$$

حل: طبق روابط بیان شده داریم:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{\delta} = \cos \delta \theta + i \sin \delta \theta$$

اما از طرفی دیگر داریم:

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{\delta} &= \cos^{\delta} \theta + \binom{\delta}{1} \cos^{\delta-1} \theta (i \sin \theta) \\ &+ \binom{\delta}{2} \cos^{\delta-2} \theta (i \sin \theta)^2 + \binom{\delta}{3} \cos^{\delta-3} \theta (i \sin \theta)^3 \\ &+ \binom{\delta}{4} \cos \theta (i \sin \theta)^4 + (i \sin \theta)^{\delta} \end{aligned}$$

حال با ساده کردن دو طرف و مقایسه‌ی قسمت‌های حقیقی و موهومی طرفین داریم:

$$\operatorname{Im}(\cos \theta + i \sin \theta)^{\delta} = 16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta$$

$$\operatorname{Im}(\cos \theta + i \sin \theta)^{\delta} = \sin \delta \theta$$

و بهوضوح حکم مورد نظر مسئله نتیجه می‌گردد.

مثال ۱۵-۱

بسط $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ را حساب کنید.حل: در قانون دموآور قرار دهید $3 = 1 \cdot r$. به سادگی به دست می‌آید:

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \times \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

همان طور که گفته شد تناظری بین نقاط صفحه و اعداد مختلط وجود دارد. یکی از ویژگی‌های بردارهای صفحه این است که برای هر دو بردار A و B داریم:

$$|A + B| \leq |A| + |B|$$

و به طور ناخودآگاه با توجه به تناظر بین بردارها و اعداد مختلط به نظر می‌رسد که چنین نابرابری برای اعداد مختلط هم برقرار است که در قضیه‌ی زیر این موضوع را به زبان اعداد مختلط بیان کرده‌ایم.

قفیه	(نابرابری مثلث)
اگر A و B دو عدد مختلط دلخواه باشند آنگاه:	
$ A + B \geq A + B $	و تنها زمانی حالت تساوی برقرار است که برای مقداری حقیقی مثبت مثل k داشته باشیم $A = k \cdot B$

اثبات: فرض کنید y و t اعدادی حقیقی هستند، حال داریم:

$$A + B = (x + z) + i(y + t)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |A + B| &= \sqrt{(x + z)^2 + (y + t)^2} \\ |A| + |B| &= \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + t^2} \end{aligned}$$

حال پس کافی است نشان دهیم:

$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R} : \sqrt{(x + z)^2 + (y + t)^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + t^2}$$

و این هم با به توان ۲ رساندن دو طرف معادل است با:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x + z)^2 + (y + t)^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)} \geq xz + yt \end{aligned}$$

و این هم نتیجه‌ی نابرابری کوشی است چراکه:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) &\geq (\sqrt{x^2 z^2} + \sqrt{y^2 t^2})^2 = (xz + yt)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)} &\geq |xz + yt| \geq xz + yt \end{aligned}$$

توجه کنید که تساوی نابرابری کوشی هم زمانی است که برای مقداری حقیقی مثل $k \geq 0$ داشته باشیم:

$$\left. \begin{array}{l} x = kz \\ y = kt \end{array} \right\} \Rightarrow A = kB$$

و این کل قضیه را نتیجه خواهد داد.

توجه: می‌توان نابرابری مثلث را به تعداد بیشتری متغیر هم بدین شکل تعمیم داد:

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C} : |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

و حالت تساوی هم تنها زمانی رخ می‌دهد که:

$$\forall i, j \exists k \in \mathbb{R}^+ : a_i = ka_j$$

برای هر ۳ عدد حقیقی دلخواه x, y و z ثابت کنید:

$$|x| + |y| + |z| \leq |x + y - z| + |x + z - y| + |y + z - x|$$

اثبات: طبق نابرابری مثلث داریم:

$$|x + y - z| + |x + z - y| \geq 2|x|$$

$$|x + y - z| + |y + z - x| \geq 2|y|$$

$$|y + z - x| + |x + z - y| \geq 2|z|$$

با جمع این ۳ رابطه حکم نتیجه می‌گردد.

ثابت کنید اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $2x^n + x + 1 = 0$ باشد آنگاه $|\alpha| \geq 1$.

مثال ۱۷-۱

اثبات: داریم:

$$\alpha^n + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^n + \alpha = -1$$

$$\xrightarrow{\text{نرم‌گیری از طرفین}} |\alpha^n + \alpha| = |-1| = 1$$

اما طبق نابرابری مثلث:

$$|\alpha^n + \alpha| \leq |\alpha|^n + |\alpha| \Rightarrow |\alpha|^n + |\alpha| \geq 1$$

اما اگر $|\alpha| < 1$ باشد:

$$\left. \begin{array}{l} |\alpha|^n < 1 \\ |\alpha| < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow |\alpha|^n + |\alpha| < 2$$

تناقض حاصله نشان می‌دهد $|\alpha| \geq 1$.

در ادامه‌ی درس به یکی از نمایش‌های جالب‌تر اعداد مختلط اشاره می‌کنیم. تا به حال به دو ویژگی در مورد ضرب اعداد مختلط دست یافته‌ایم و یکی از آن‌ها عبارت است از رابطه‌ی $\arg(AB) = \arg(A) + \arg(B)$ اما با کمی تأمل در این رابطه در می‌باییم که توابع آشنا‌یی هم به جز \arg داریم که این خاصیت را دارند. یکی از مشهورترین این توابع، تابع $f(x) = A^x$ است چرا که:

$$A^x A^y = A^{x+y}$$

بنابراین شاید این ایده به ذهن برسد که شاید اعداد مختلط هم نمایشی به شکل توابع نمایی داشته باشند در واقع این ایده صحیح بوده و در زیر به آن می‌پردازیم:^۱
از ریاضیات مدرن سه رابطه‌ی بسیار جالب می‌دانیم و آن‌ها عبارتند از روابط زیر که برای هر $x \in \mathbb{R}$ برقرارند:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \sin(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

اگر فرض را بر این بگیریم که قواعد به توان رساندن در اعداد مختلط هم صحیح باشد داریم:

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R} : e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} \dots \right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

و همین ایده منجر به یک شیوه‌ی دیگر نمایش اعداد مختلط می‌شود که به نمایش نمایی اعداد مختلط معروف است.

^۱) نتایج این قسمت را بدون اثبات می‌توانید بپذیرید.

هر عدد مختلط مثل z را می‌توان به صورت $re^{i\theta}$ نمایش داد که در آن θ برابر $\arg(z)$ بوده و r هم $|z|$ می‌باشد.

با این شیوه از نمادگذاری می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} &= (rr')e^{i(\theta+\theta')} \\ \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} &= \left(\frac{r}{r'}\right)e^{i(\theta-\theta')} \end{aligned}$$

و به همین شکل می‌توان روابط دیگری هم با استفاده از این شیوه نمایش استخراج کرد به عنوان یک مثال به دانش‌آموزان توصیه می‌گردد که قضایای مربوط به نمایش هندسی را سعی کنند با این شیوه نمایش اثبات کنند.

در ادامه برآینم تا به کمک مطالب گفته شده در این فصل به حل گونه‌ی خاصی از معادلات چندجمله‌ای که در ادامه‌ی درس نقش مهمی ایفا می‌کنند بپردازم:
در واقع این معادلات همان معادلات $x^n = 1$ می‌باشند در ادامه اثبات خواهیم کرد که هر چندین معادله‌ای دقیقاً در اعداد مختلط دارای n جواب متمایز است که نام خاصی را به این جواب‌ها اختصاص می‌دهیم.

تعريف

عدد مختلط w را «ریشه‌ی n ام واحد» گوییم هرگاه $w^n = 1$ برقرار باشد.

قضیه

تعداد ریشه‌های n ام واحد دقیقاً n تاست و عبارتند از:

$$e^{i\theta} ; \theta = \frac{2k\pi}{n} ; k = 1, 2, \dots, n$$

اثبات: فرض کنید w ریشه‌ی n ام واحد باشد:

$$w^n = 1 \Rightarrow |w|^n = 1 \Rightarrow |w| = 1$$

پس می‌توان نوشت:

$$w = e^{i\theta} \Rightarrow w^n = e^{in\theta} = 1$$

اما می‌توان بررسی کرد که $e^{i\theta}$ برابر ۱ است اگر و تنها اگر رابطه $2k\pi = \theta$ برای مقداری صحیح مثل k برقرار باشد. پس:

$$n\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n}$$

اما مقدارهایی از θ که به اندازه‌ی مضربی از 2π با یکدیگر اختلاف دارند یکسان هستند. بنابراین مقدارهای θ متناظر با $k = 1, 2, \dots, n$ می‌باشد زیرا بقیه‌ی مقادیر برای k با یکی از این n مقدار برابر می‌باشند. بنابراین حکم اثبات می‌گردد. دقت کنید در حالت $n = k$ ، $k = n$ و $\theta = 2k$ و $w = 1$.

تعریف

عدد مختلط w را ریشه‌ی اولیه‌ی n ام واحد گوییم هرگاه $1 = w^n$ باشد و برای هر عدد طبیعی $i < n$ داشته باشیم $w^i \neq 1$

قضیه

تعداد ریشه‌های n ام اولیه واحد دقیقاً (n) تاست و عبارتند از:

$$e^{\frac{i2k\pi}{n}} ; \quad k \in \{1, 2, \dots, n\} : (k, n) = 1$$

اثبات: اثبات این قضیه‌ی ساده بوده و بر عهده‌ی دانشآموزان گذاشته می‌شود.

حال به عنوان مثال می‌خواهیم تمام ریشه‌های معادله‌ی $1 = z^3$ را بیابیم. فرض کنید

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

بنابر قضايا و مباحث گفته شده، داریم:

$$\begin{aligned} 1 = z^3 &= r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \Rightarrow r = 1, \cos 3\theta = 1, \sin 3\theta = 0 \\ \Rightarrow 3\theta &= 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

دقت کنید به ازای 2 ، 1 ، 0 و -1 ، -2 ، -3 داریم: $\theta_1 = 0^\circ$ و $\theta_2 = 60^\circ$ و $\theta_3 = 120^\circ$ و برای k های دیگر، مقادیر θ تنها در مضارب 2π فرق دارند و در حقیقت جواب جدیدی به ما نمی‌دهند. اعداد متناظر با z_1 و z_2 را با $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ در صفحه‌ی مختصات نشان داده‌ایم.

به راحتی می‌توانید بررسی کنید نقاط z_1 و z_2 ، مثبت متساوی‌الاضلاعی تشکیل می‌دهند که در دایره‌ی واحد محاط است.

حالا کاملاً مشابه جواب‌های معادله‌ی $z^n = 1$ را بررسی می‌کنیم. اگر $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ باشد

بنابر قضیه‌ی دموآور خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 1 &= z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \Rightarrow r = 1, n\theta = 2k\pi \\ \Rightarrow r &= 1, \theta = \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

مجدداً به سادگی نتیجه می‌شود تنها به ازای $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ ، جواب‌های متمایز محاسبه می‌شوند و بقیه جواب تنها در مضربی از 2π با یکی از ریشه‌های معرفی شده به ازای $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ تفاوت دارند. حال متناظر با $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ و z_i را معرفی می‌کنیم:

$$k = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{n} \Rightarrow z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1$$

⋮

$$k = n-1 \Rightarrow \theta_{n-1} = \frac{(n-1)\pi}{n} \Rightarrow z_{n-1} = \cos \theta_{n-1} + i \sin \theta_{n-1}$$

مجدداً می‌توان چک کرد اعداد مختلط z_0, z_1, \dots, z_{n-1} رؤس یک n -ضلعی منتظم محاط در دایره واحد تشکیل می‌دهند.

