

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## مسائل برگزیده پیشنهادی

برای المپیادهای جهانی ریاضی

۲۰۰۵-۲۰۰۹



مؤلف: میر صالح بهاورنیا



## پیشگفتار ناشر

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده‌ای را در بارور کردن و شکفتن استعدادهای دانش‌آموزان ایفا می‌کنند و باید به جرأت ادعا کرد که این مسابقه توانسته است اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقاط جهان را تا حد زیادی افزایش دهند.

کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند. لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی خلاً موجود مخصوصاً برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود. در همین راستا انتشارات خوشخوان با استعانت از حضرت حق تعالی و به کمک تنی چند از اساتید و دبیران ممتاز ایران و نیز فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف که اغلب آنان در زمانی نه چندان دور مدال‌آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده‌اند، کتاب‌هایی را تألیف و به دانش‌آموزان ارائه می‌نماید. امید است مورد پسند و استفاده دانش‌آموزان و دبیران این مرز و بوم قرار گیرند.

رسول حاجی‌زاده  
مدیر انتشارات خوشخوان

تقدیم به پدر و مادر عزیزیم

که همواره هدیون زحمات بی‌دریغ آن‌ها بوده و هستم و خواهم بود ...

## پیش‌گفتار مؤلف

المپیاد جهانی ریاضی (IMO) معتبرترین مسابقه‌ی ریاضی در سطح دانش‌آموزان دبیرستانی به شمار می‌رود.

این مسابقه فرصت مناسبی برای رقابت علمی دانش‌آموزان دبیرستانی سراسر جهان به عمل آورده و نقش بسزایی در ایجاد علاقه به ریاضیات در بین دانش‌آموزان دبیرستانی داشته است. همچنین یکی از کارکردهای مثبت این مسابقه شناسایی استعدادهای برتر ریاضیات می‌باشد. در ابتدا، IMO از آن‌چه که امروزه برگزار می‌شود، بسیار ساده‌تر بوده است. در سال ۱۹۵۹ اولین مسابقه‌ی IMO با شرکت هفت کشور بلغارستان، چکاسلواکی، جمهوری دموکراتیک آلمان، مجارستان، لهستان، رومانی و اتحاد جماهیر شوروی برگزار شد. از آن زمان این مسابقه هرساله برگزار می‌شود (البته به جز سال ۱۹۸۰). رفته رفته، کشورهای دیگر بلوک شرقی اروپا و کشورهایی از اروپای غربی و سپس کشورهای متعدد دیگری از سراسر جهان به این مسابقه پیوستند. به عنوان مثال سال ۲۰۰۹، ۱۰۴ کشور در این مسابقه شرکت کردند.

قالب مسابقه به سرعت ثابت و پایدار شد. هر کشور می‌تواند شش مسابقه دهنده به این مسابقه بفرستد که به صورت فردی مسابقه می‌دهند (بدون این‌که به همدیگر در حل مسائل کمک کنند). همچنین کشور شرکت کننده یک سرپرست تیم که در انتخاب مسأله‌ها شرکت می‌کند و به همین دلیل با بقیه‌ی افراد تیم تا پایان مسابقه تماسی ندارد، می‌فرستد. به همین خاطر سرپرست دومی برای مراقبت از مسابقه دهندگان فرستاده می‌شود.

مسابقه‌ی IMO دو روز طول می‌کشد. هر روز ۴/۵ ساعت به مسابقه دهندگان وقت داده می‌شود تا سه مسأله حل کنند که در مجموع ۶ مسأله به مسابقه دهندگان داده می‌شود. اولین مسأله در هر روز معمولاً آسان‌ترین مسأله و سومین مسأله سخت‌ترین مسأله می‌باشد.

البته استثنائات قابل توجهی هم اتفاق افتاده است. مثلاً سؤال پنجم المپیاد جهانی سال ۱۹۹۶ یکی از سخت‌ترین مسأله‌های المپیاد جهانی می‌باشد که تنها ۶ دانش‌آموز از بین صدها نفر به صورت کامل حل کرده بودند.

هر مسأله ۷ امتیاز دارد. لذا بیشترین نمره ممکن ۴۲ امتیاز می‌باشد. به کمتر از  $\frac{1}{13}$  مسابقه دهندگان مدال طلا و به کمتر از  $\frac{1}{4}$  مسابقه دهندگان مدال طلا یا نقره و به کمتر از  $\frac{1}{3}$  مسابقه‌دهندگان مدال طلا یا نقره یا برنز تعلق می‌گیرد. به دانش‌آموزانی که به آن‌ها مدالی تعلق نگیرد به شرط آن‌که یک مسأله را به صورت کامل حل کرده باشند، دیپلم افتخار تعلق می‌گیرد.

انتخاب مسائل، گام‌های متعددی را در بر می‌گیرند. کشورهای شرکت کننده مسائل پیشنهادی خود را که فرض بر آن است که قبلاً در مسابقه‌ای مطرح نشده‌اند به مسئولان IMO می‌فرستند. کشور میزبان مسأله‌ای پیشنهاد نمی‌کند. از مسائل پیشنهادی دریافت شده (مسائل بلندلیست)، کمیته‌ی انتخاب مسأله، لیست کوتاه‌تری (مسائل کوتاه‌لیست) را انتخاب می‌کند که به هیأت داوران IMO که خود متشکل از سرپرست‌های تیم‌هاست، ارائه می‌شود. هیأت مذکور از میان مسائل کوتاه‌لیست، شش مسأله را برای IMO انتخاب می‌کند.

کتاب حاضر در بردارنده‌ی مسائل کوتاه‌لیست پیشنهادی برای المپیادهای جهانی ریاضی سال‌های ۲۰۰۵ تا ۲۰۰۹ و پاسخ آن‌ها می‌باشد.

در ادامه کتاب به این صورت مرتب شده است که بعد از ارائه‌ی تفکیکی مسائل کوتاه‌لیست پنج سال مذکور، پاسخ‌های دید باز به صورت تفکیکی در بخش دیگر کتاب آمده است.

مسائل کوتاه لیست هر سال به ترتیب شامل چهار موضوع جبر، ترکیبیات، هندسه و نظریه‌ی اعداد می‌باشد. بنابراین این مسأله‌ها اکثر موضوعات مختلف مطرح در مسابقات مختلف ریاضی را در بر می‌گیرند.

از آن جایی که مسائل این کتاب چکیده‌ای از مسائل پیشنهادی معتبرترین مسابقه‌ی بین‌المللی ریاضی می‌باشد، برای تمامی دانش‌آموزان که در سطوح مختلف خود را برای شرکت در المپیادهای ریاضی آماده می‌کنند، مثمر ثمر خواهد بود. البته مخاطب این کتاب تمامی کسانی هستند که از حل کردن مسائل دشوار ریاضی لذت می‌برند.

امیدواریم با ترجمه‌ی این کتاب خدمت ناچیزی به علاقه‌مندان ریاضی انجام داده باشیم. در پایان لازم می‌دانم از زحمات گران قدر جناب آقای رسول حاجی‌زاده، مدیر انتشارات خوشخوان که در تمامی مراحل تدوین این کتاب مرا یاری فرموده‌اند، نهایت امتنان را به عمل آورم. همچنین اسامی افرادی از کشور عزیزمان ایران که مسائل پیشنهادی‌شان در زمره‌ی مسائل کوتاه‌لیست سال‌های ۲۰۰۷ تا ۲۰۰۹ قرار گرفت به شرح زیر می‌باشد:

- آقای امید حاتمی (مسأله‌ی ۱۱ سال ۲۰۰۷)
- آقای داوود وکیلی (مسأله‌ی ۲۲ سال ۲۰۰۷)
- آقایان محسن جمالی و نیما احمدی پوراناری (مسأله‌ی ۲۸ سال ۲۰۰۷)
- آقای داوود وکیلی (مسأله‌ی ۱۷ سال ۲۰۰۸)
- آقای محسن جمالی (مسأله‌ی ۲۲ سال ۲۰۰۸)
- آقای مرتضی ثقفیان (مسأله‌ی ۲۳ سال ۲۰۰۸)
- آقای حسین کرکه‌آبادی (مسأله‌ی ۱۸ سال ۲۰۰۹)
- آقای میرصالح بهاورنیا (مسأله‌ی ۲۲ سال ۲۰۰۹)

## فهرست مطالب

مسائل برگزیده پیشنهادی المپیادهای جهانی ریاضی سال ۲۰۰۵

سؤالات	۸
پاسخها	۱۱

مسائل برگزیده پیشنهادی المپیادهای جهانی ریاضی سال ۲۰۰۶

سؤالات	۲۶
پاسخها	۳۰

مسائل برگزیده پیشنهادی المپیادهای جهانی ریاضی سال ۲۰۰۷

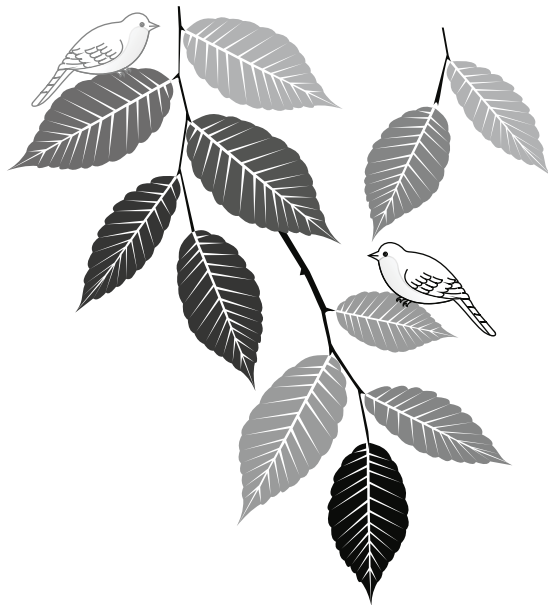
سؤالات	۴۴
پاسخها	۴۸

مسائل برگزیده پیشنهادی المپیادهای جهانی ریاضی سال ۲۰۰۸

سؤالات	۶۴
پاسخها	۶۸

مسائل برگزیده پیشنهادی المپیادهای جهانی ریاضی سال ۲۰۰۹

سؤالات	۸۴
پاسخها	۸۸



مسائل برگزیده پیشنهادی  
المپیادهای جهانی ریاضی  
سال ۲۰۰۵



## سؤالات

۱. تمام چندجمله‌ای‌های تکین  $p(x)$  با ضرایب صحیح از درجه‌ی ۲ را بیابید به طوری که چند جمله‌ای  $q(x)$  با ضرایب صحیح وجود داشته باشد به طوری که  $p(x)q(x)$  یک چند جمله‌ای با ضرایب تماماً  $\pm 1$  باشد.
۲. فرض کنید  $\mathbb{R}^+$  بیان‌گر مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت باشد. تمام توابع  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  را بیابید به طوری که
- $$f(x)f(y) = 2f(x+f(y))$$
- برای تمام اعداد حقیقی مثبت  $x, y$  برقرار باشد.
۳. چهار عدد حقیقی  $p, q, r, s$  و در شرایط
- $$p+q+r+s=9 \quad \text{و} \quad p^2+q^2+r^2+s^2=21$$
- صدق می‌کنند. ثابت کنید  $ab - cd \geq 2$  برای جایگشتی از  $(p, q, r, s)$  مانند  $(a, b, c, d)$  برقرار است.
۴. تمام توابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را بیابید که برای هر  $x, y$  حقیقی در معادله‌ی
- $$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1$$
- صدق می‌کنند.
۵. فرض کنید  $x, y, z$  اعداد حقیقی مثبت باشد به طوری که  $xyz \geq 1$  باشد. ثابت کنید.
- $$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$
۶. یک خانه تعداد زوجی لامپ بین اتاق‌های آن توزیع شده است به طوری که در هر اتاق حداقل سه لامپ وجود دارد. هر لامپ دقیقاً با یک لامپ دیگر تغییر وضعیت می‌دهد، نه لزوماً از همان اتاق. هر تغییر در وضعیت‌های دو لامپ، وضعیت دو لامپ را به صورت هم‌زمان تغییر می‌دهد. ثابت کنید به ازای هر حالت اولیه از لامپ‌ها دنباله‌ای از تغییرات در سوئیچ‌ها وجود دارد به طوری که در انتها هر اتاق شامل لامپ‌های روشن و خاموش باشد.
۷. فرض کنید  $k$  یک عدد صحیح مثبت ثابت باشد. یک شرکت رویه‌ی خاصی برای فروش کلاه‌های لبه-پهن دارد. هر مشتری می‌تواند دو مشتری را برای خرید کلاه لبه‌پهن بعد از این که خودش یکی خرید، تبلیغ کند؛ تبلیغ کسی که قبلاً تبلیغ شده، شمرده نمی‌شود. هر یک از این مشتری‌های تازه می‌توانند به دو مشتری دیگر تبلیغ کنند و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. اگر یکی از دو مشتری تبلیغ شده به وسیله‌ی یک نفر حداقل  $k$  نفر را به خرید کلاه‌پهن وا دارد. (مستقیماً و یا به صورت غیرمستقیم)، آن‌گاه آن نفر به صورت رایگان یک ویدئو برنده می‌شود. ثابت کنید اگر  $n$  نفر، کلاه لبه‌پهن خریده باشد، آن‌گاه حداکثر  $\frac{n}{k+2}$  از آن‌ها ویدئو گرفته‌اند.
۸. در یک صفحه‌ی مستطیلی  $m \times n$  از  $mn$  مربع واحد، مربع‌های مجاور، مربع‌هایی هستند که در یک ضلع مشترکند و یک مسیر دنباله‌ای از مربع‌هاست که هر دو مربع متوالی آن، مجاور باشند و هر مربع از صفحه می‌تواند سیاه یا سفید رنگ شود. فرض کنید  $N$  تعداد رنگ‌آمیزی‌هایی از صفحه را نشان دهد که حداقل یک مسیر سیاه از ضلع سمت چپ صفحه تا ضلع سمت راست آن وجود داشته باشد و فرض کنید  $M$  تعداد رنگ‌آمیزی‌هایی را نشان دهد که در آن حداقل دو مسیر سیاه غیرمتقاطع از ضلع سمت چپ صفحه تا ضلع سمت راست صفحه وجود داشته باشد. ثابت کنید  $N^2 \geq 2^{mn} M$ .

۹. فرض کنید  $n \geq 3$  یک عدد صحیح مثبت داده شده باشد. می‌خواهیم هر ضلع و هر قطر از یک  $n$  ضلعی منتظم  $P_1, \dots, P_n$  را با عدد صحیح کم‌تر یا مساوی  $r$  برچسب‌گذاری کنیم به طوری که
- (i) هر عدد صحیح بین  $r, 1$  به عنوان برچسب به کار رود.
- (ii) در هر مثلث  $P_i P_j P_k$  دو تا از برچسب‌ها مساوی و بزرگ‌تر از سومی باشند این شرایط داده شده است:
- (a) بزرگ‌ترین عدد صحیح مثبت  $r$  را بیابید به طوری که این کار عملی باشد.
- (b) برای آن مقدار از  $r$ ، چند رنگ آمیزی خواسته شده وجود دارد؟
۱۰.  $n$  ماژیک وجود دارد، هر یک با یک طرف سفید و با طرف سیاه، که در یک سطر چیده شده‌اند به طوری که سمت سفید آن‌ها به سمت بالاست. در هر گام، اگر ممکن باشد، ماژیکی با سمت بالای سفید را انتخاب می‌کنیم (ولی نه از ماژیک‌های انتهایی)، آن را حذف می‌کنیم و نزدیک‌ترین ماژیک به آن از سمت چپ و از سمت راست را وارونه می‌کنیم. ثابت کنید یک نفر می‌تواند به حالتی با ۲ ماژیک برسد اگر و تنها اگر  $n-1$  مضربی از ۳ نباشد.
۱۱. در یک مسابقه ریاضی ۶ مسأله به مسابقه‌دهندگان داده شد. هر جفت از مسأله‌ها به وسیله‌ی بیش از  $\frac{2}{5}$  مسابقه‌دهندگان حل شد. هیچ کس ۶ مسأله را حل نکرد. نشان دهید حداقل ۲ مسابقه-دهنده وجود داشت که دقیقاً ۵ مسأله حل کرده بودند.
۱۲. فرض کنید  $n \geq 1$  یک عدد صحیح داده شده باشد، و فرض کنید  $a_1, \dots, a_n$  دنباله‌ای از اعداد صحیح باشد به طوری که  $n$  مجموع  $a_1 + \dots + a_n$  را عاد می‌کند. نشان دهید جایگشت‌های  $\tau, \sigma$  از  $1, 2, \dots, n$  وجود دارد. به طوری که برای تمام  $i = 1, 2, \dots, n$ ،  $\sigma(i) + \tau(i) \equiv a_i \pmod{n}$  برقرار باشد.
۱۳. فرض کنید  $M$  یک  $n$  ضلعی محدب باشد،  $n-3 \geq 4$  قطر سبز و  $n-3$  قطر دیگر قرمز رنگ-آمیزی می‌شوند، به طوری که هیچ دو قطر هم‌رنگ همدیگر را در داخل  $M$  قطع نمی‌کند. ماکسیمم تعداد نقاط برخورد قطرهای سبز و قرمز را در داخل  $M$  بیابید.
۱۴. در مثلث  $ABC$  که در شرط  $AB + BC = 3AC$  صدق می‌کند  $I$  مرکز دایره‌ی محاطی داخلی است و دایره‌ی محاطی داخلی  $AB$  و  $BC$  را بر ترتیب در  $D$  و  $E$  قطع می‌کند. فرض کنید  $L, K$  نقاط قرینه‌ی  $D$  و  $E$  نسبت به  $I$  باشد. ثابت کنید  $ACKL$  محاطی است.
۱۵. ۶ نقطه روی اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  انتخاب می‌شوند:  $A_1, A_2$  روی  $BC$ ؛  $B_1, B_2$  روی  $CA$ ؛  $C_1, C_2$  روی  $AB$ . این‌ها رئوس شش ضلعی محدب  $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$  است که هر شش ضلع آن با هم برابرند. ثابت کنید خطوط  $B_1 C_2, A_1 B_2$  و  $C_1 A_2$  هم‌رسند.
۱۶. فرض کنید  $ABCD$  یک متوازی‌الاضلاع باشد. خط متغیر  $l$  گذرا از نقطه‌ی  $A$  پرتوهای  $DC, BC$  را به ترتیب در نقاط  $Y, X$  قطع می‌کند. فرض کنید  $L, K$  مراکز دایره‌ی محاطی مثلث‌های  $ADY, ABX$  باشند که به ترتیب بر اضلاع  $DY, BX$  مماسند. ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی  $KCL$  به انتخاب  $l$  بستگی ندارد.
۱۷. فرض کنید  $ABCD$  یک چهارضلعی محدب داده شده باشد که اضلاع  $AD, BC$  آن برابر و غیرموازی‌اند. فرض کنید  $F, E$  به ترتیب نقاطی از اضلاع  $AD, BC$  باشند به طوری که  $BE = DF$  باشد. خطوط  $BD, AC$  در  $P$  و خطوط  $EF, BD$  در  $Q$  و خطوط  $AC, EF$  در  $R$  متقاطع‌اند. تمام مثلث‌های  $PQR$  را به ازای تغییر نقاط  $F, E$  در نظر بگیرید. نشان دهید دایره‌ی محیطی این مثلث‌ها نقطه‌ی مشترکی به جز  $P$  دارند.



۱۸. فرض کنید  $ABC$  یک مثلث حاده‌الزاویه با شرط  $AB \neq AC$  باشد، فرض کنید  $H$  مرکز ارتفاعی آن و  $M$  نقطه‌ی وسط  $BC$  باشد. نقاط  $D$  روی  $AB$  و  $E$  روی  $AC$  چنان‌اند که  $AE = AD$  و  $E, H, D$  هم‌خط‌اند. ثابت کنید  $HM$  بر وتر مشترک دوایر محیطی مثلث‌های  $ABC$  و  $ADE$  عمود است.
۱۹. میانه‌ی  $AM$  از مثلث  $ABC$  دایره‌ی محاطی داخلی‌اش (w) را در  $L, K$  قطع می‌کند. خطوط  $L, K$  را به موازات  $w, BC$  را دوباره در  $Y, X$  قطع می‌کنند. خطوط  $AX, AY$  و  $BC$  را در  $Q, P$  قطع می‌کنند. ثابت کنید  $BP = CQ$ .
۲۰. در مثلث حاده‌الزاویه‌ی  $ABC$ ، فرض کنید  $R, Q, P, F, E, D$  به ترتیب یای عمودهای مرسوم از  $C, B, A, C, B, A$  بر  $BC, CA, AB, BC, CA, AB$  باشند. ثابت کنید  $P(ABC)P(PQR) \geq P(DEF)^2$  است. بیان گر محیط مثلث  $T$  است.
۲۱. دنباله‌ی  $a_1, a_2, \dots$  به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- تمام اعداد صحیح مثبت را تعیین کنید به طوری که نسبت به هر جمله‌ی این دنباله اول باشند.
۲۲. فرض کنید  $a_1, a_2, \dots$  دنباله‌ای از اعداد صحیح با نامتناهی جمله‌ی صحیح مثبت و نامتناهی جمله‌ی صحیح منفی باشد و برای هر عدد صحیح مثبت  $n$  فرض کنید  $a_1, a_2, \dots, a_n$  در تقسیم بر  $n$ ، باقی‌مانده‌ی متفاوت برجای گذارند، ثابت کنید هر عدد صحیح دقیقاً یک بار در دنباله ظاهر می‌شود.
۲۳. فرض کنید  $a, b, c, d, e, f$  و اعداد صحیح مثبت باشند. فرض کنید مجموع  $S = a + b + c + d + e + f$  هر دوی  $abc + def$  و  $ab + bc + ca - de - ef - fd$  را عاد کند. ثابت کنید  $S$  مرکب است.
۲۴. تمام اعداد صحیح  $n > 1$  را بیابید که عدد صحیح یکتای  $a$  با شرط  $0 < a \leq n!$  موجود باشد به طوری که  $a^n + 1$  مضربی از  $n!$  باشد.
۲۵. تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح مثبت  $n$  را با  $d(n)$  مشخص می‌کنیم. یک عدد صحیح  $n$ ، بیش مضرب نامیده می‌شود اگر برای تمام اعداد صحیح مثبت  $m < n$ ،  $d(n) > d(m)$  باشد. دو عدد بیش مضرب صحیح  $n, m$  با شرط  $m < n$  متوالی نامیده می‌شوند اگر هیچ عدد بیش مضرب صحیح  $s$  ای وجود نداشته باشد که  $m < s < n$  باشد.
- (a) نشان دهید متناهی جفت  $(a, b)$  از اعداد بیش مضرب صحیح متوالی وجود دارد که  $a | b$ .
- (b) نشان دهید برای هر عدد اول  $p$  بی‌شمار عدد صحیح مثبت بیش مضرب  $r$  وجود دارد به طوری که  $pr$  خودش بیش مضرب باشد.
۲۶. فرض کنید  $a, b$  اعداد صحیح مثبتی هستند به طوری که  $a^n + n$  به ازای هر عدد صحیح مثبت  $n$  را عاد می‌کند. نشان دهید  $a = b$ .
۲۷. فرض کنید  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  باشد که  $a_0, \dots, a_n$  صحیح‌اند و  $n \geq 2, a_n > 0$  است. ثابت کنید عدد صحیح مثبت  $m$  وجود دارد به طوری که  $P(m!)$  عدد مرکب است.

## پاسخ‌ها

۱. به وضوح،  $p(x)$  باید به صورت  $p(x) = x^2 \pm ax \pm 1$  باشد که  $a$  عددی صحیح است. برای  $a = \pm 1$  و  $a = 0$ ، چند جمله‌ای  $p$  ویژگی خواسته شده را دارد: کافی است به ترتیب  $q = x + 1$  و  $q = x - 1$  بگیریم.

حال فرض کنید  $|a| \geq 2$  باشد. پس  $p(x)$  دو ریشه‌ی حقیقی دارد که با  $x_1, x_2$  نشان می‌دهیم که همچنین ریشه‌های  $p(x)q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  هستند، بنابراین

$$1 = \left| \frac{a_{n-1}}{x_1} + \dots + \frac{a_0}{x_1^n} \right| \leq \frac{1}{|x_1|} + \dots + \frac{1}{|x_1|^n} < \frac{1}{|x_1| - 1}$$

که ایجاب می‌کند  $|x_1|, |x_2| < 2$  باشد. این بلافاصله حالت  $|a| \geq 3$  را حذف می‌کند و نیز چند جمله‌ای‌های  $p(x) = x^2 \pm 2x - 1$  را دو چند جمله‌ای باقی‌مانده‌ی  $x^2 \pm 2x + 1$  شرط را به ازای  $q(x) = x \mp 1$  ارضا می‌کنند.

در مجموع، چند جمله‌ای‌های  $p(x)$  با شرایط خواسته شده عبارتند از  $x^2 \pm 1, x^2 \pm x \pm 1$  و  $x^2 \pm 2x + 1$ .

۲.  $y > 0$  داده شده است، تابع  $\varphi(x) = x + yf(x)$  و  $x > 0$  را در نظر بگیرید. این تابع یک به یک است:

در حقیقت اگر  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$  باشد آن گاه  $f(x_1)f(y) = f(x_2)f(y)$  باشد. بنابراین،  $f(x_1) = f(x_2)$  و  $x_1 = x_2$  است. حال اگر  $x_1 < x_2$  باشد،  $f(x_1) < f(x_2)$  و  $f(x_1) < f(x_2)$  است.

$$\text{باشد، برای } y = \frac{x_1 - x_2}{f(x_2) - f(x_1)} > 0 \text{ داریم:}$$

$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ ، که ناممکن است؛ بنابراین  $f$  غیرنزولی است. معادله‌ی تابعی اکنون نتیجه می‌دهد  $f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)) \geq 2f(x)$  و نتیجتاً  $f(y) \geq 2$  برای  $y > 0$  برقرار است. به همان خاطر  $f(x + yf(x)) = f(xy) = f(y + xf(y)) \geq f(2x)$

برای  $y > 0$  به دلخواه کوچک برقرار است، که ایجاب می‌کند  $f$  روی بازه‌ی  $(x, 2x]$  برای هر  $x > 0$  ثابت باشد. اما آن موقع  $f$  باید روی اجتماع تمام بازه‌های  $(x, 2x]$  بر روی تمام  $x$ ‌های مثبت ثابت باشد، یعنی روی تمام  $\mathbb{R}^+$ . حال معادله‌ی تابعی به ما می‌دهد برای تمام  $x$  ها  $f(x) = 2$ ، که به وضوح یک جواب است.

۳. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض کنید  $p \geq q \geq r \geq s$  باشد. داریم:

$$(pq + rs) + (pr + qs) + (ps + qr) = \frac{(p+q+r+s)^2 - p^2 - q^2 - r^2 - s^2}{2} = 3^0$$

دیدن این که  $pq + rs \geq pr + qs \geq ps + qr$  برقرار است و نتیجه می‌دهد  $pq + rs \geq 1^0$  امری آسان به شمار می‌رود. حال با قرار دادن  $p + q = x$  به دست می‌آوریم.

$$(x - 4)(x - 5) \geq 0 \text{ که معادل } x^2 + (9 - x)^2 = (p + q)^2 + (r + s)^2 = 21 + 2(pq + rs) \geq 41 \text{ است. چون } x = p + q \geq r + s \text{ است.}$$

بنابراین  $21 + 2(pq - rs) \leq 21 + 2(pq + rs) = 41$  و  $25 \leq p^2 + q^2 + 2pq = 21 - (r^2 + s^2) + 2pq \leq 21 + 2(pq - rs)$  که مطابق چیزی است که خواسته شده.

توجه: چهارتایی مرتب  $(p, q, r, s) = (3, 2, 2, 2)$  نشان می‌دهد تخمین ۲، بهترین است.

۴. با جای گذاری  $y = 0$  نتیجه می شود  $(f(0)+1)(f(x)-1) = 0$  و چون  $f(x) = 1$  برای تمام  $x$  ها، ناممکن است، به دست می آوریم  $f(0) = -1$ . حال قرار دادن  $x = 1$  و  $y = -1$  نتیجه می دهد  $f(1) = 1$  است و یا  $f(-1) = 0$  است. در حالت اول جای گذاری  $x = 1$  در معادله ی تابعی نتیجه می دهد  $f(y+1) = 2y+1$  (یعنی  $f(x) = 2x-1$ ) که یک جواب است. حال فرض کنید  $f(1) = a \neq 1$  باشد و  $f(-1) = 0$  باشد. با جای گذاری  $(x, y) = (z, 1)$  و  $(x, y) = (-z, -1)$  در معادله ی تابعی نتیجه می شود.

$$f(z+1) = (1-a)f(z) + 2z + 1$$

$$f(-z-1) = f(z) + 2z + 1 \quad (*)$$

آن نتیجه می دهد کسه  $f(z+1) = (1-a)f(-z-1) + af(2z+1)$  باشد. یعنی  $f(x) = (1-a)f(-x) + a(2x-1)$  است. به صورت مشابه  $f(-x) = (1-a)f(x) + a(-2x-1)$  است، که به همراه معادله ی قبلی نتیجه می دهد.

$$(a^2 - 2a)f(x) = -2a^2x - (a^2 - 2a)$$

$$f(x) = \frac{-2ax}{a-2} - 1 \quad \text{برای } a \in \{0, 2\} \text{ به دست می آوریم}$$

این تابع شرایط خواسته شده را تنها  $a = -2$  ارضا می کند که جواب  $f(x) = -x - 1$  را نتیجه می دهد. در حالت باقی مانده که  $a = 0$  است داریم  $f(x) = f(-x)$ . با قرار دادن  $y = -z$  و  $y = z$  در معادله ی تابعی و کاستن، نتیجه می شود  $f(2z) = 4z^2 - 1$ ، بنابراین  $f(x) = x^2 - 1$  که در معادله صدق می کند.

$$\text{بنابراین جوابها عبارتند از } f(x) = 2x - 1, f(x) = -x - 1, \text{ و } f(x) = x^2 - 1.$$

۵. نامساوی خواسته شده معادل:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leq 3 \quad (*)$$

است. طبق نامساوی کوشی داریم

$$(x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) \geq (x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}} + y^2 + z^2)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

و به همان خاطر

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} \leq \frac{yz + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

برای دو عبارت دیگر در (\*) دو نامساوی مشابه دیگر به دست می آوریم. با جمع زدن این سه نامساوی به دست آمده، داریم:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leq 2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$$

که به همراه نامساوی مشهور  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$  به ما نتیجه ی خواسته شده را می دهد.

۶. یک اتاق اقتصادی نامیده می‌شود اگر بعضی از لامپ‌های آن روشن و بعضی از لامپ‌های آن خاموش باشد. دو لامپ که وضعیت‌شان تعویض می‌شود دوقلو نامیده می‌شوند. دوقلوی لامپ  $l$  با  $\bar{l}$  مشخص می‌کنیم.

فرض کنید به حالتی رسیده‌ایم که کم‌ترین تعداد اتاق‌های غیراقتصادی را دارد، و این عدد مطلقاً مثبت است.

اجازه دهید اتاقی غیراقتصادی به نام  $R_0$  انتخاب کنیم و لامپ  $l_0$  در آن باشد. فرض کنید لامپ  $\bar{l}_0$  در اتاق  $R_1$  باشد. با تغییر وضعیت  $l_0, R_0$  را اقتصادی می‌کنیم؛ چون تعداد اتاق‌های غیراقتصادی نمی‌تواند کاهش بیابد، این تغییر باید اتاق  $R_1$  را غیراقتصادی کند. حال لامپ  $l_1$  را در  $R_1$  انتخاب می‌کنیم که دوقلوی آن  $\bar{l}_1$  در اتاق  $R_2$  قرار دارد. تغییر وضعیت  $l_1, R_1$  را اقتصادی می‌کند، بنابراین باید  $R_2$  را غیراقتصادی کند با ادامه‌ی این روند دنباله‌ی  $l_0, l_1, \dots$  از لامپ‌ها را به دست می‌آوریم که  $l_i$  در اتاق  $R_i$  قرار دارد و  $l_{i+1} \neq \bar{l}_i$  برای تمام  $i$ ها در اتاق  $R_{i+1}$  قرار دارد. لامپ‌های  $l_0, l_1, \dots$  به این ترتیب تغییر وضعیت داده می‌شوند. این دنباله دارای این خاصیت است که تغییر وضعیت  $l_i, \bar{l}_i$ ، اتاق  $R_i$  را اقتصادی و اتاق  $R_{i+1}$  را غیراقتصادی می‌کند.

فرض کنید  $R_m = R_k$  با شرط  $m > k$  اولین تکرار در دنباله‌ی  $(R_i)$  باشد. فرض کنید تغییر وضعیت لامپ‌ها را در  $I_{m-1}$  قطع کنیم، اتاق  $R_k$  قبل از تغییر وضعیت  $l_k, R_k$  غیراقتصادی بود. بنابراین لامپ‌های  $l_k, \bar{l}_{m-1}$  در اتاق  $R_k$  تغییر وضعیت داده شده‌اند، اما چون این دو لامپ متمایزند (در حقیقت، دوقلوهای نظیر آن‌ها  $l_k, \bar{l}_{m-1}$  متمایزند)، اتاق  $R_k$  اکنون اقتصادی است آن چنان که اتاق‌های  $R_0, R_1, \dots, R_{m-1}$  اقتصادی هستند. این تعداد اتاق‌های غیراقتصادی را کاهش می‌دهد، که مخالف فرض ماست.

۷. فرض کنید  $v$  تعداد برنده‌های ویدئو باشد. چیزی که به آسانی به دست می‌آید این است که برای  $v=1$  و  $v=2$ ، تعداد مشتری‌ها  $(n)$  به ترتیب حداقل  $2k+3$  و  $3k+5$  است. با استقرا روی  $v$  ثابت می‌کنیم که اگر  $n \geq k+1$  باشد آن‌گاه  $n \geq (k+2)(v+1) - 1$  است.

بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توانیم فرض کنیم که تعداد مشتری‌ها  $(n)$  برای  $v > 0$  داده شده، مقدار مینیمم ممکن است. فرد  $P$  را در نظر بگیرید که به وسیله‌ی هیچ‌کسی به غیر از خودش متقاعد نشده است آن‌گاه  $P$  باید یک ویدئو برده باشد؛ در غیراین صورت  $P$  می‌توانست بدون کاسته شدن تعداد برنده‌های ویدئو از گروه حذف شود. فرض کنید  $R, Q$  دو فرد متقاعد شده به وسیله‌ی  $P$  باشند. مجموعه افرادی را که به وسیله‌ی  $P$  از طریق  $Q$  برای خرید کلاه اسپانیایی متقاعد شده‌اند به همراه  $Q$  با  $C$  مشخص می‌کنیم و مجموعه‌ی تمام مشتری‌های دیگر به جز  $P$  را با  $D$  مشخص می‌کنیم. فرض کنید  $x$  تعداد برنده‌هایی ویدئو در  $C$  باشد. آن‌گاه  $v-x-1$  برنده‌ی ویدئو در  $D$  خواهد بود.  $1 - (k+2)(x+1) \leq |C|$  برقرار است طبق فرض استقرا اگر  $x > 0$  باشد و اگر  $x=0$  باشد چون  $P$  برنده است. مشابهاً،  $1 - (k+2)(v-x) \leq |D|$  بنابراین

$$n \geq (k+2)(v+1) - 1 \quad \text{یعنی} \quad n \geq 1 + (k+2)(x+1) - 1 + (k+2)(v-x) - 1$$

۸. فرض کنید یک صفحه‌ی دو بعدی  $T, m \times n$  در نظر گرفته شود، که دقیقاً  $k$  تا از مربع‌ها پشت‌نما باشند. مربع پشت‌نما، تنها از یک طرف رنگ می‌شود (بنابراین از طرف دیگر به صورت مشابه به نظر می‌رسد)، در حالی که مربع غیر پشت‌نما دو طرفش رنگ شود (نه لزوماً یک رنگ). فرض کنید  $C = C(T)$  مجموعه‌ی رنگ‌آمیزی‌هایی از صفحه باشد که در آن دو مسیر سیاه از یال سمت چپ به یال سمت راست باشد، یکی در بالا و یکی در پایین که در هیچ مربع پشت‌نمایی متقاطع نباشند. اگر  $k = 0$  باشد آن‌گاه  $|C| = N^2$ ، با استقرا روی  $k$  ثابت می‌کنیم که  $|C| \leq N^2 \cdot 2^k$  است؛ این، حکم مسأله را به ازای  $|C| = M$  برای  $k = mn$  ایجاب خواهد کرد. فرض کنید  $q$  یک مربع پشت‌نمای ثابت باشد. هر  $B$  رنگ شده در  $C$  را در نظر بگیرید؛ اگر  $q$  به مربع غیر پشت‌نمایی تبدیل شد، یک صفحه‌ی جدید  $T'$  با  $k-1$  مربع پشت‌نما به دست می‌آید، پس طبق فرض استقرا  $|C(T')| \leq N^2 \cdot 2^{k-1}$ . چون  $B$  شامل دو مسیر سیاه است که حداکثر یکی از این دو مسیر از  $q$  می‌گذرد، رنگ‌آمیزی  $q$  به هر رنگ در طرف دیگر، رنگ‌آمیزی دیگری در  $C'$  را نتیجه خواهد داد؛ بنابراین  $|C(T')| \geq 2|C(T)|$ ، که ایجاب می‌کند  $|C(T)| \leq N^2 \cdot 2^k$  باشد و استقرا کامل می‌شود.

۹. اجازه دهید برچسب پاره‌خط  $XY$  را با  $[XY]$  مشخص کنیم، که  $X$  و  $Y$  در آن رئوسی از چندضلعی هستند. هر پاره‌خط  $MN$  ای را که دارای برچسب ماکزیمم است با برچسب  $[MN] = r$  مشخص می‌کنیم. طبق شرط (ii)، برای هر  $P_i \neq M, N$ ، دقیقاً یکی از پاره‌خط‌های  $P_i N, P_i M$  با  $r$  برچسب‌گذاری می‌شود. بنابراین مجموعه‌ی تمام رأس‌های  $n$  ضلعی به دو گروه مجزا افزا می‌شوند:  $B = \{P_i \mid [P_i N] = r\}$ ،  $A = \{P_i \mid [P_i M] = r\}$  ادعا می‌کنیم که پاره‌خط  $XY$  با  $r$  برچسب‌گذاری می‌شود اگر و تنها اگر دو نقطه از دو گروه متفاوت را به هم وصل کند. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض کنید  $X \in A$  باشد. اگر  $Y \in A$  باشد، آن‌گاه  $[XM] = [YM] = r$ . بنابراین  $[XY] < r$  است. اگر  $Y \in B$  باشد، آن‌گاه  $[XM] = r$  و  $[YM] < r$ ، بنابراین طبق (ii)  $[XY] = r$  است که مطابق ادعای ماست.

نتیجه می‌گیریم یک برچسب‌گذاری که شرط (ii) را ارضا می‌کند به طور یکتا به وسیله‌ی گروه‌های  $A$  و  $B$  و برچسب‌گذاری‌های داخل  $A$  و  $B$  که در شرط (ii) صدق می‌کنند تعیین می‌شود. (a) با استقرا روی  $n$  ثابت می‌کنیم که بزرگ‌ترین مقدار ممکن  $r, n-1$  است. حالات تباهیده‌ی  $n=1, 2$  بدیهی هستند. اگر  $n \geq 3$  باشد، تعداد برچسب‌های متفاوت از پاره‌خط‌هایی که رأس‌های  $A$  (همچنین  $B$ ) را به هم وصل می‌کنند از  $|A|-1$  (همچنین  $|B|-1$ ) تجاوز نمی‌کند، در حالی که تمام پاره‌خط‌هایی که به رأسی در  $A$  وصلند و به رأسی در  $B$  وصلند با  $r$  برچسب‌گذاری می‌شوند. به همان خاطر  $r \leq (|A|-1) + (|B|-1) = n-1$ . تساوی برقرار است اگر تمام برچسب‌های مذکور متفاوت باشند.

(b) فرض کنید  $a_n$  تعداد برچسب‌گذاری‌های به شرط  $r = n - 1$  باشد. به کمک استقرا ثابت می‌کنیم که  $a_n = \frac{n!(n-1)!}{2^{n-1}}$  است. این برای  $n = 1$  بدیهی است، پس فرض کنید  $n \geq 2$  باشد. اگر  $|A| = k$  ثابت باشد، گروه‌های  $A, B$  به  $\binom{n}{k}$  طریق می‌توانند انتخاب می‌شوند. مجموعه‌ی برچسب‌های به کار رفته در  $A$  می‌تواند از میان  $1, 2, \dots, n-2$  به  $\binom{n-2}{k-1}$  طریق انتخاب شود. حال پاره‌خط‌های موجود در گروه‌های  $A$  و  $B$  می‌توانند مطابق شرط (ii) به ترتیب به  $a_k$  و  $a_{n-k}$  طریق برچسب‌گذاری شوند. در این روش هر برچسب‌گذاری‌ای، دوبار شمرده می‌شود، چون انتخاب  $A$  معادل انتخاب  $B$  است. نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{n-2}{k-1} a_k a_{n-k} = \frac{n!(n-1)!}{2(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k!(k-1)!} \cdot \frac{a_{n-k}}{(n-k)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!(n-1)!}{2(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{2^{n-k-1}} = \frac{n!(n-1)!}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

۱۰. چپ‌ترین ماژیک را با  $L$  و راست‌ترین ماژیک را با  $R$  مشخص می‌کنیم. برای شروع، توجه کنید که زوجیت تعداد ماژیک‌های سمت بالا سیاه ثابت است. بنابراین، اگر فقط دو ماژیک باقی بماند، این دو ماژیک باید رنگ‌های سمت بالای یکسانی داشته باشند.

به کمک استقرا روی  $n$  نشان خواهیم داد که بازی می‌تواند به صورت موفقیت‌آمیز پایان یابد اگر و تنها اگر  $n \equiv 0 \pmod{3}$  یا  $n \equiv 2 \pmod{3}$  باشد، و این که سمت بالای  $R, L$  در حالت اول سیاه و در حالت دوم سفید خواهد بود.

گزاره برای  $n = 2, 3$  واضح است. فرض کنید که بازی را برای  $n$  ای تمام کرده‌ایم، و موقعیت ماژیک  $X$  (با شمارش از سمت چپ) را که آخرین مورد حذف شده بود با  $k$  مشخص کنیم. علاوه بر تمام شدن بازی، زیر بازی‌های با  $k$  ماژیک از  $L$  تا  $X$  و با  $n - k + 1$  ماژیک از  $X$  تا  $R$  هم پایان یافته‌اند.

به همان خاطر، قبل از حذف شدن  $X$ ، سمت بالای  $L$  سیاه بوده است اگر  $k \equiv 0 \pmod{3}$  بوده باشد و سفید بوده است اگر  $k \equiv 2 \pmod{3}$  بوده باشد. ماژیک‌های  $R, L$  زمان حذف  $X$  معکوس شده بودند. به همان خاطر، در موقعیت نهایی  $R, L$  سفیدند اگر و تنها اگر  $k \equiv n - k + 1 \equiv 0 \pmod{3}$  باشد که نتیجه می‌دهد  $k \equiv 2 \pmod{3}$

است و سیاه است اگر و تنها اگر  $k \equiv n - k + 1 \equiv 2 \pmod{3}$  باشد که نتیجه می‌دهد  $n \equiv 0 \pmod{3}$  است. از طرف دیگر، بازی با  $n$  ماژیک می‌تواند به بازی با  $n - 3$  ماژیک با حذف ماژیک‌های دوم، چهارم و سوم (با همین ترتیب) کاهش یابد. این استقرا را پایان می‌دهد.

۱۱. فرض کنید  $n$  مسابقه‌دهنده وجود داشته باشد و  $a_i$  تا از آن‌ها دقیقاً  $i$  مسأله حل کرده باشند که  $a_0 + \dots + a_n = n$  است. اجازه دهید تعداد جفت‌های  $(C, P)$  که در آن مسابقه‌دهنده‌ی  $C$  یک جفت از مسایل  $P$  را حل کرده باشد با  $N$  مشخص کنیم و محاسبه کنیم. هر جفت از ۱۵ جفت مسأله حداقل به وسیله‌ی  $\frac{2n+1}{5}$  مسابقه‌دهنده حل شده بود، که ایجاب می‌کند  $N \geq 15 \frac{2n+1}{5} = 6n + 3$  باشد. از طرف دیگر،  $a_i$  دانش‌آموز، جفت مسأله حل کردند؛

بنابراین

$$6n + 3 \leq N \leq a_7 + 3a_6 + 6a_5 + 10a_4 = 6n + 4a_4 - (3a_7 + 5a_6 + 6a_5 + 6a_4)$$

نتیجتاً  $a_4 \geq 1$  است. فرض کنید  $a_4 = 1$  باشد. آن‌گاه باید داشته باشیم  $N = 6n + 4$ ، که تنها زمانی ممکن است که ۱۴ جفت از مسأله‌ها به وسیله‌ی دقیقاً  $\frac{2n+1}{5}$  دانش‌آموز حل شده باشد و بقیه به وسیله‌ی  $\frac{2n+1}{5} + 1$  دانش‌آموز حل شده باشد، و تمام دانش‌آموزان به جز برنده ۴ مسأله حل کرده باشند.

مسأله‌ی  $t$  در صورتی که به وسیله‌ی برنده حل نشده باشد سخت نامیده می‌شود و جفت‌هایی از مسایل که به وسیله‌ی  $\frac{2n+1}{5} + 1$  دانش‌آموز حل شده‌اند، مخصوص نامیده می‌شوند.

اجازه دهید تعداد جفت‌های  $(C, P)$  که  $P$  شامل مسأله‌ی ثابت  $p$  باشد را با  $M_p$  مشخص کنیم و محاسبه کنیم. فرض کنید  $b_p$  تعداد مسابقه‌دهندگانی باشد که مسأله‌ی  $p$  را حل کرده‌اند. پس  $M_t = 3b_t$  (هر یک از  $b_t$  دانش‌آموز مورد نظر سه جفت مسأله‌ی شامل  $t$  حل کرده‌اند)، و  $M_p = 3b_p + 1$  برای  $p \neq t$  (برنده، چهار جفت از جفت‌های مذکور حل کرده است). از طرف دیگر، هر یک از پنج جفت شامل  $p$  به وسیله‌ی  $\frac{2n+1}{5}$  یا  $\frac{2n+1}{5} + 1$  دانش‌آموز حل شده، بنابراین  $M_p = 2n + 2$  است اگر جفت مخصوص شامل  $p$  باشد وگرنه  $M_p = 2n + 1$  است.

حال چون  $2n + 2$  یا  $M_t = 3b_t = 2n + 1$  است، داریم  $2$  یا  $2n + 1 \equiv 0$ ، اما اگر  $p \neq t$  مسأله‌ای باشد که در جفت مخصوصی یافته نشود، داریم  $M_p = 3b_p + 1 = 2n + 1$ ؛ بنابراین  $2n + 1 \equiv 3$ ، که یک تناقض است.

۱۲. فرض کنید جایگشت‌های مطلوب  $\tau, \sigma$  برای دنباله‌ی  $a_1, \dots, a_n$  وجود داشته باشد. دنباله‌ی  $(b_i)$  با مجموع مضرب  $n$  که به پیمانه‌ی  $n$  با  $(a_i)$  در دو موقعیت متفاوت است، (بگیرید  $i_1, i_2$ ) داده شده است. نشان می‌دهیم چگونه می‌توان جایگشت‌های مطلوب  $\tau', \sigma'$  را برای دنباله‌ی  $(b_i)$  ساخت. در این روند، می‌توانیم جایگشت‌های مطلوب را برای هر دنباله‌ی دیگری که مجموعش مضربی از  $n$  باشد، بسازیم.

می‌دانیم که برای هر  $i_1, i_2, \dots, i_n$  دنباله‌ی  $\sigma(i) + \tau(i) \equiv b_i, i \neq i_1, i_2, \dots, i_n$  را به شرح ذیل می‌سازیم:  
برای هر  $k \geq 2$  اندیس یکتایی است به طوری که

$$\sigma(i_{k-1}) + \tau(i_{k+1}) \equiv b_{i_k} \quad (*)$$

فرض کنید  $i_p = i_q$  یک تکرار در دنباله با کوچک‌ترین  $q$  باشد. ادعا می‌کنیم که  $p=1$  یا  $p=2$  است. فرض خُلف کنید که  $p \geq 2$  باشد. با جمع زدن (\*) برای  $k = p, p+1, \dots, q-1$  و در نظر گرفتن تساوی  $\sigma(i_k) + \tau(i_k) = b_{i_k}$  برای  $i_1, i_2, \dots, i_k \neq i_1, i_2, \dots, i_k$  به دست می‌آوریم

$$\sigma(i_{p-1}) + \sigma(i_p) + \tau(i_{q-1}) + \tau(i_q) \equiv b_p + b_{q-1}$$

چون  $i_p = i_q$  است، نتیجه می‌دهد که

$$\sigma(i_{p-1}) + \tau(i_{q-1}) \equiv b_{q-1}$$

مطابق ادعای ما  $p=1$  یا  $p=2$  است.

حال جایگشت‌های ذیل را تعریف می‌کنیم:

$$\sigma'(i_1) = \sigma(i_{q-1}), \sigma'(i_k) = \sigma(i_{k-1}) \quad k = 2, 3, \dots, q-1$$

$$\tau'(i_1) = \begin{cases} \tau(i_2) & \text{اگر } p=1 \text{ باشد} \\ \tau(i_1) & \text{اگر } p=2 \text{ باشد} \end{cases}, \quad \tau'(i_k) = \tau(i_{k+1}) \quad k = 2, 3, \dots, q-1$$

$$\sigma'(i) = \sigma(i), \tau'(i) = \tau(i) \quad i \notin \{i_1, \dots, i_{q-1}\}$$

جایگشت‌های  $\sigma', \tau'$  ویژگی مطلوب را دارند. در حقیقت،  $\sigma'(i) + \tau'(i) = b_i$  به وضوح برای هر  $i \neq i_1$  برقرار است، اما پس آن برای  $i = i_1$  هم باید برقرار باشد.

۱۳. برای هر قطر سبز  $d$ ، فرض کنید  $C_d$  تعداد برخورد های سبز-قرمز نقطه‌ها روی  $d$  را مشخص کند.

وظیفه‌ی ما پیدا کردن ماکسیمم مقدار ممکن مجموع  $\sum_d C_d$  روی تمام قطرهای سبز است.

فرض کنید  $d_j, d_i$  دو قطر سبز باشند و فرض کنید بخشی از  $M$  که بین  $d_j, d_i$  است  $m$  رأس داشته باشد. حداکثر  $n-m-1$  قطر قرمز، هر دوی  $d_j, d_i$  را قطع می‌کنند، در حالی که  $m-2$  قطر باقی‌مانده حداکثر یکی از  $d_j, d_i$  را قطع می‌کند. آن نتیجه می‌دهد که:

$$C_{d_j} + C_{d_i} \leq 2(n-m-1) + (m-2) = 2n - m - 4 \quad (*)$$

حال قطرهای سبز را در دنباله‌ی  $d_1, d_2, \dots, d_{n-3}$  به صورت ذیل مرتب می‌کنیم. به آسانی دیده می‌شود که دو قطر  $d_1, d_2$  وجود دارد به طوری که  $M$  را به دو مثلث و یک  $n-2$  ضلعی تقسیم می‌کند؛ پس دو قطر  $d_3, d_4$  وجود دارند به طوری که  $n-2$  ضلعی را به دو مثلث و یک  $n-4$  ضلعی تقسیم می‌کند و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. این روند را تا زمانی که به یک مثلث یا چهارضلعی برسیم ادامه می‌دهیم. حال بخشی از  $M$  بین  $d_{2k}, d_{2k-1}$  برای  $1 \leq k \leq r$  حداقل  $n-2k$  رأس دارد، کـــه بـــرای  $\{e, 1\}$   $n-3 = 2r + e$  است؛ بنابراین، طبق (\*),  $C_{d_{2k-1}} + C_{d_{2k}} \leq n + 2k - 4$  است. علاوه بر آن،  $C_{d_{n-3}} \leq n-3$  است. جمع زدن نتیجه می‌دهد.

$$C_{d_1} + C_{d_2} + \dots + C_{d_{n-3}} \leq \sum_{k=1}^r (n + 2k - 4) + e(n-3) = 3r^2 + e(3r+1) = \left\lceil \frac{3}{4}(n-3)^2 \right\rceil$$



این مقدار در مثال ذیل به دست می‌آید. فرض کنید  $A_1A_2, \dots, A_n$  ،  $n$  ضلعی  $M$  باشد و فرض کنید  $l = \left[ \frac{n}{2} \right] + 1$  باشد. قطرهای  $A_1A_i, i = 3, \dots, l, A_1A_j, j = l+2, \dots, n$  سبز رنگ می‌شوند، در حالی که قطرهای  $A_2A_i, i = l+1, \dots, n, A_{l+1}A_j, j = 3, \dots, l-1$  قرمز رنگ می‌شوند، بنابراین جواب

$$\left\lfloor \frac{3}{4}(n-3)^2 \right\rfloor$$

۱۴. فرض کنید  $F$  محلّ تماس دایره‌ی محاطی داخلی با  $AC$  باشد و  $N, M$  به ترتیب نقاط تماس دایره‌ی محاطی خارجی متناظر با  $BC, AB$  باشند. اگر  $I$  مرکز دایره‌ی محاطی داخلی باشد و  $I_a$  مرکز دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس  $A$  باشد و  $P$  نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس  $A$  با پرتو  $AC$  باشد. داریم  $\frac{AI}{IL} = \frac{AI}{IF} = \frac{AI_a}{I_aP} = \frac{AI_a}{I_aN}$  ، که ایجاب می‌کند که  $\Delta AIL \sim \Delta AI_aN$  باشد. بنابراین  $L$  روی  $AN$  قرار دارد، و به صورت مشابه  $K$  روی  $CM$  قرار دارد.  $y = CF, x = AF$  بگیریم. چون  $CE = BN = y, AD = BM = x, BD = BE$   $AB + BC = 3AC$  نتیجه می‌دهد  $EN = x, DM = y$  است. حال مثلث‌های  $MKA, CLN$  متشابه‌اند چون ارتفاع‌های  $LE, KD$  در شرط  $AD = EN, DM = CE, DK = EL$  صدق می‌کنند. بنابراین  $\angle AKM = \angle CLN$  است که ایجاب می‌کند  $ACKL$  محاطی باشد.

۱۵. فرض کنید  $P$  رأس چهارم لوزی  $C_2A_1A_2P$  باشد. چون  $\Delta C_2PC_1$  متساوی‌الاضلاع است، به آسانی نتیجه می‌گیریم که  $B_1B_2C_1P$  هم لوزی است. بنابراین  $\Delta PB_1A_2$  متساوی‌الاضلاع است و  $\angle(C_2A_1, C_1B_2) = \angle A_2PB_1 = 60^\circ$  است. به آسانی نتیجه می‌شود که  $\Delta AC_1B_2 \sim \Delta BA_1C_2$  و نتیجتاً  $AC_1 = BA_1$  است؛ مشابهاً  $BA_1 = CB_1$  است. به همان خاطر مثلث  $A_1B_1C_1$  متساوی‌الاضلاع است. حال از  $B_1B_2 = B_2C_1$  نتیجه می‌شود که  $A_1B_2$  زاویه‌ی  $\angle C_1A_1B_1$  را نصف می‌کند. مشابهاً،  $C_1A_2, B_1C_2$  زوایای  $\angle A_1B_1C_1$  و  $\angle B_1C_1A_1$  را نصف می‌کنند؛ بنابراین  $C_1A_2, B_1C_2, A_1B_2$  در مرکز دایره‌ی محاطی داخلی  $A_1B_1C_1$  یعنی مرکز  $ABC$  هم رسند.

۱۶. چون  $\angle ALD = \frac{1}{2}\angle AYD = \angle KAB, \angle ADL = \angle KBA = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BCD$  است، مثلث‌های

$LDA, ABK$  متشابه‌اند. بنابراین  $\frac{BK}{BC} = \frac{BK}{AD} = \frac{AB}{DL} = \frac{DC}{DL}$  است که به

همراه  $\angle LDC = \angle CBK$  به ما می‌دهد  $\Delta LDC \sim \Delta CBK$  به همان خاطر

$\angle KCL = 360^\circ - \angle BCD - (\angle LCD + \angle KCB) = 360^\circ - \angle BCD - (\angle CKB + \angle KCB) = 180^\circ - \angle CBK$

که ثابت است.