

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المپیاد ریاضی در ایران

(مرحله دوم)



انتشارات فوشفوان

مؤلفان: عباس ثروتی

محمود پری آذر

پیش‌گفتار ناشر

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده‌ای را در بارور کردن و شکفتن استعدادهای دانش‌آموزان ایفا می‌کنند و باید به جرأت ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقاط جهان را تا حد زیادی افزایش دهند.

کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ‌عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند. لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی خلأ موجود مخصوصاً برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود. در همین راستا انتشارات خوشخوان با استعانت از حضرت حق تعالی و به کمک تئمی چند از اساتید و دبیران ممتاز ایران و نیز فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف که اغلب آنان در زمانی نه چندان دور مدال آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده‌اند، کتاب‌هایی را تألیف و به دانش‌آموزان ارائه می‌نماید. امید است مورد پسند و استفاده دانش‌آموزان این مرز و بوم قرار گیرد.

رسول حاجی زاده

مدیر انتشارات خوشخوان

پیش‌گفتار مؤلفین

در سال‌های اخیر استقبال از المپیادهای علمی بالأخص المپیاد ریاضی در میان دانش‌آموزان مستعد کشور پیشرفت چشمگیری داشته است و دانش‌آموزان بسیاری به مطالعهٔ مباحث و حل مسائل در این زمینه می‌پردازند. لذا وجود منابع مناسب جهت آمادگی برای شرکت در آزمون‌های المپیاد ریاضی امری ضروری محسوب می‌شود.

از آنجا که هیچ منبع کاملی برای دسترسی دانش‌پژوهان به آزمون‌های مرحلهٔ دوم المپیاد ریاضی کشوری و پاسخ مسائل آن موجود نمی‌باشد، لذا تصمیم به جمع‌آوری و تدوین این مجموعه گرفته شد. کتابی که پیش روی شماست شامل مسائل آزمون‌های مرحلهٔ دوم المپیاد ریاضی کشوری به انضمام پاسخ این مسائل می‌باشد. سعی شده است در حل مسائل این کتاب از روش‌های مختلف استفاده شود تا دانش‌پژوهان با روش‌های مختلف حل مسائل آشنا شوند. به همین جهت بسیاری از مسائل دارای بیش از یک راه‌حل می‌باشند. در فصل آخر این کتاب نیز مسائل المپیاد جهانی (IMO) ریاضی آورده شده است تا دانش‌پژوهان با سؤالات المپیاد جهانی ریاضی آشنا شوند.

با توجه به این که تهیه‌ی مجموعه‌ای با این حجم خالی از اشکال نخواهد بود، لذا از خوانندگان محترم خواهشمندم اشکالات این کتاب و راه‌حل‌های پیشنهادی خود برای سؤالات را به نشانی انتشارات خوشخوان و یا نشانی الکترونیکی servatiabbas@yahoo.com ارسال فرمایند.

در اینجا لازم می‌دانیم از جناب آقای رسول حاجی‌زاده مدیریت محترم انتشارات خوشخوان که پیشنهاد آماده‌سازی این مجموعه را دادند، سپاس‌گزار می‌کنیم. همچنین از خانم‌ها شهرزاد خدایاری و عطییه عسگری و آقای محمدرضا کریمی که در گردآوری سؤالات و پاسخ‌های آنها زحمت فراوانی کشیده‌اند، و نیز آقایان سالار دستجردی و فرنام منصوری و نیز خانم‌ها زهرا شجاعی و مینا نورهاشمی که در ویراستاری این مجموعه کمک کردند کمال تشکر را داریم. در پایان از آقای حسام خلینا که مسئولیت حروف‌چینی، صفحه‌آرایی و رسم تصاویر را به عهده داشتند، تشکر می‌نمائیم. امیدواریم این اثر بتواند گامی هر چند کوچک در جهت رفع نیازهای علمی دانش‌پژوهان بردارد.

عباس ثروتی - محمود پری‌آذر

تابستان ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

۱۱	پنجمین دوره	۱
۱۱	مسائل ۱.۱	۱.۱
۱۳	پاسخ مسائل ۲.۱	۲.۱
۱۹	ششمین دوره	۲
۱۹	مسائل ۱.۲	۱.۲
۲۱	پاسخ مسائل ۲.۲	۲.۲
۲۹	هفتمین دوره	۳
۲۹	مسائل ۱.۳	۱.۳
۳۱	پاسخ مسائل ۲.۳	۲.۳
۳۷	هشتمین دوره	۴
۳۷	مسائل ۱.۴	۱.۴
۳۹	پاسخ مسائل ۲.۴	۲.۴

۴۵	نهمین دوره	۵
۴۵	مسائل	۱.۵
۴۷	پاسخ مسائل	۲.۵
۵۷	دهمین دوره	۶
۵۷	مسائل	۱.۶
۵۹	پاسخ مسائل	۲.۶
۶۷	یازدهمین دوره	۷
۶۷	مسائل	۱.۷
۶۹	پاسخ مسائل	۲.۷
۷۵	دوازدهمین دوره	۸
۷۵	مسائل	۱.۸
۷۷	پاسخ مسائل	۲.۸
۸۵	سیزدهمین دوره	۹
۸۵	مسائل	۱.۹
۸۷	پاسخ مسائل	۲.۹
۹۳	چهاردهمین دوره	۱۰
۹۳	مسائل	۱.۱۰
۹۵	پاسخ مسائل	۲.۱۰

۷	فهرست مندرجات
۱۰۳	۱۱ دوره پانزدهم
۱۰۳	۱.۱۱ مسائل
۱۰۵	۲.۱۱ پاسخ مسائل
۱۱۷	۱۲ شانزدهمین دوره
۱۱۷	۱.۱۲ مسائل
۱۱۹	۲.۱۲ پاسخ مسائل
۱۳۱	۱۳ هفدهمین دوره
۱۳۱	۱.۱۳ مسائل
۱۳۳	۲.۱۳ پاسخ مسائل
۱۳۹	۱۴ هجدهمین دوره
۱۳۹	۱.۱۴ مسائل
۱۴۱	۲.۱۴ پاسخ مسائل
۱۴۹	۱۵ نوزدهمین دوره
۱۴۹	۱.۱۵ مسائل
۱۵۱	۲.۱۵ پاسخ مسائل
۱۶۱	۱۶ بیستمین دوره
۱۶۱	۱.۱۶ مسائل
۱۶۴	۲.۱۶ پاسخ مسائل

۱۷۱	بیست و یکمین دوره	۱۷
۱۷۱	مسائل	۱.۱۷
۱۷۳	پاسخ مسائل	۲.۱۷
۱۸۱	بیست و دومین دوره	۱۸
۱۸۱	مسائل	۱.۱۸
۱۸۳	پاسخ مسائل	۲.۱۸
۱۹۱	بیست و سومین دوره	۱۹
۱۹۱	مسائل	۱.۱۹
۱۹۳	پاسخ مسائل	۲.۱۹
۱۹۹	بیست و چهارمین دوره	۲۰
۱۹۹	مسائل	۱.۲۰
۲۰۱	پاسخ مسائل	۲.۲۰
۲۰۷	بیست و پنجمین دوره	۲۱
۲۰۷	مسائل	۱.۲۱
۲۰۹	پاسخ مسائل	۲.۲۱
۲۱۳	بیست و ششمین دوره	۲۲
۲۱۳	مسائل	۱.۲۲
۲۱۵	پاسخ مسائل	۲.۲۲

فصل ۱

پنجمین دوره

اردیبهشت ۱۳۶۷

۱.۱ مسائل

۱. اعداد صحیح و مثبت a و b و c را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - c^2 = 3abc \\ a^2 = 2(b+c) \end{cases}$$

۲. فرض کنید تابع حقیقی f در فاصله $[0, \infty)$ تعریف شده و f' و f'' در این فاصله موجود باشند و داشته باشیم:

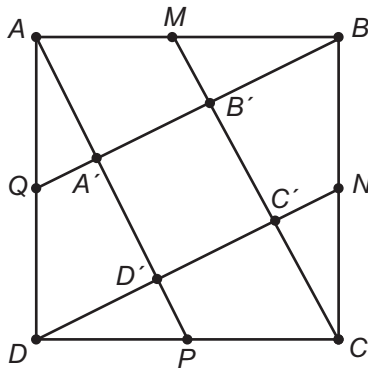
$$f''(x) = \frac{1}{x^2 + f'(x)^2 + 1}; \quad f(0) = f'(0) = 0$$

ثابت کنید تابع g با ضابطه:

$$g(0) = 0, \quad g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (x > 0)$$

کران‌دار است.

۳. در شکل زیر نقاط M و N و P و Q به ترتیب در وسط اضلاع مربع $ABCD$ قرار دارند. A' محل برخورد AP و BQ ، B' محل برخورد BQ و CM ، C' محل برخورد CM و DN و D' محل برخورد DN و AP می‌باشند. ثابت کنید مقدار مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ برابر $\frac{1}{8}$ مساحت مربع $ABCD$ است.



۴. مطلوب است محاسبه عبارت:

$$A = \sin 1^\circ \times \sin 2^\circ \times \dots \times \sin 89^\circ$$

۵. تابع پیوسته $f: R \rightarrow R$ را چنان تعیین کنید که به ازای هر $x, y \in R$ داشته باشیم:

$$f(x^2 - y^2) = f(x)^2 + f(y)^2$$

۶. چهار خط متمایز L_1 و L_2 و L_3 و L_4 را در فضا در نظر بگیرید که هیچ سه‌تای آن‌ها در یک صفحه قرار نداشته باشند. فرض کنید محل تقاطع خطوط L_1 و L_2 نقطه A ، محل تقاطع خطوط L_2 و L_3 نقطه B و محل تقاطع خطوط L_3 و L_4 نقطه C باشد. حداقل و حداکثر تعداد خطوطی را که در فضا هر چهار خط فوق را قطع می‌نمایند تعیین کرده و ادعای خود را ثابت کنید.

۲.۱ پاسخ مسائل

۱. طبق اتحاد اویلر داریم:

$$a^3 - b^3 - c^3 = (a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc + ac) + 3abc$$

از طرفی طبق فرض مسأله داریم:

$$a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$$

لذا از مقایسه این دو رابطه به دست می آید که:

$$(a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc + ac) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc + ac = 0 & (۱) \\ \text{یا} \\ a - b - c = 0 & (۲) \end{cases}$$

در حالت (۱) داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc + ac = \frac{1}{3}[(a+b)^2 + (b-c)^2 + (c+a)^2] = 0$$

$$\Rightarrow a = -b = -c$$

از آنجائی که a, b, c باید مثبت باشند لذا نتیجه می شود که:

$$a = -b = -c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$$

که با فرض طبیعی بودن اعداد مغایر است.

در حالت (۲) داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a - b - c = 0 \Rightarrow a = b + c \\ a^2 = 3(b + c) \Rightarrow \frac{a^2}{3} = b + c \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{a^2}{3} \Rightarrow a\left(1 - \frac{a}{3}\right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0 \Rightarrow \text{غیر قابل قبول} \\ \text{یا} \\ a = 3 \end{array} \right. \quad (۳)$$

در حالت (۳) داریم:

$$a = 2 \Rightarrow b + c = 2 \Rightarrow \begin{cases} b = 0, & c = 2 \\ b = 1, & c = 1 \\ b = 2, & c = 0 \end{cases}$$

لذا تنها یک دسته جواب صحیح و مثبت برای (a, b, c) عبارت است از: $(2, 1, 1)$

۲. می دانیم که f' و f'' پیوسته اند لذا انتگرال پذیر نیز می باشند. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) - f'(0) &= \int_0^x f''(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{t^2 + f'(t)^2 + 1} \\ &\leq \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan(t) \Big|_0^x = \arctan(x) \end{aligned}$$

لذا داریم که:

$$f'(x) - f'(0) \leq \arctan(x) \Rightarrow f'(x) \leq \arctan(x) \quad (1)$$

از طرفین رابطه (۱) در بازه $[0, x]$ ، انتگرال می گیریم:

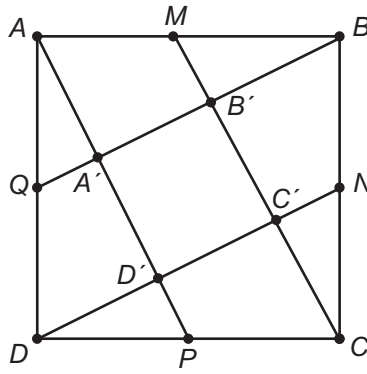
$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^x f'(t) dt &\leq \int_0^x \arctan(t) dt \\ \Rightarrow f(x) - f(0) &\leq x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{4} \ln(1 + x^2) \\ \Rightarrow f(x) &\leq x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{4} \ln(1 + x^2) \\ \Rightarrow g(x) = \frac{f(x)}{x} &\leq \arctan(x) - \frac{1}{4x} \ln(1 + x^2) \end{aligned}$$

حد سمت راست نامساوی فوق در بی نهایت برابر $\frac{\pi}{4}$ است. پس عددی مانند A وجود دارد که تابع g در بازه $[A, \infty)$ ، از بالا کراندار باشد.

همچنین بدلیل پیوستگی تابع g در بازه $[0, A]$ نتیجه می شود که g در این بازه هم از بالا کراندار است و چون در g ، $x > 0$ است، لذا تابع g در بازه $[0, \infty)$ کراندار است.

۳. با استفاده از خواص خطوط موازی بدیهی است که $A'B'C'D'$ مربع است، همچنین از تقارن و تشابهات موجود در شکل مشخص است که:

$$2QA' = A'B' = B'B$$



داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{S_{\triangle ADP}}{S_{ABCD}} &= \frac{1}{4} \\ \frac{S_{\triangle AQA'}}{S_{\triangle ADP}} &= \frac{\frac{1}{2}QA' \cdot AA'}{\frac{1}{2}DD' \cdot AP} = \left(\frac{QA'}{DD'}\right) \cdot \left(\frac{AA'}{AP}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \\ \frac{S_{\triangle A'B'C'D'}}{S_{\triangle AQA'}} &= \frac{A'B' \cdot A'B'}{\frac{1}{2}AA' \cdot QA'} = 2 \left(\frac{A'B'}{AA'}\right) \cdot \left(\frac{A'B'}{QA'}\right) = 2 \times 1 \times 2 = 4 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ADP}}{S_{ABCD}} \times \frac{S_{\triangle AQA'}}{S_{\triangle ADP}} \times \frac{S_{\triangle A'B'C'D'}}{S_{\triangle AQA'}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times 4$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{5}$$

۴. از اتحاد مثلثاتی زیر استفاده می کنیم:

$$\sin(x) \sin(90^\circ - x) = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

لذا داریم اگر:

$$\begin{aligned} M &= \sin 1^\circ \times \sin 2^\circ \times \sin 3^\circ \times \dots \times \sin 89^\circ \\ &= (\sin 1^\circ \times \sin 89^\circ) \times (\sin 2^\circ \times \sin 88^\circ) \times \dots \times (\sin 44^\circ \times \sin 46^\circ) \times \sin 45^\circ \\ &= \left(\frac{1}{2} \sin 2^\circ\right) \times \left(\frac{1}{2} \sin 4^\circ\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{2} \sin 88^\circ\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2^{45}} \times (\sin 2^\circ \times \sin 88^\circ) \times \dots \times (\sin 44^\circ \times \sin 46^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{45}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4^\circ\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 8^\circ\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 88^\circ\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{45}} \times (\sin 4^\circ \times \sin 8^\circ \times \dots \times \sin 88^\circ) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{45}} \times (\sin 4^\circ \times \sin 56^\circ \times \sin 64^\circ) \times (\sin 8^\circ \times \sin 52^\circ \times \sin 68^\circ) \\
 &\quad \times \dots \times (\sin 28^\circ \times \sin 32^\circ \times \sin 88^\circ) \times (\sin 6^\circ)
 \end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$\sin x \cdot \sin(60^\circ - x) \cdot \sin(60^\circ + x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3x$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{45}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times [\sin 12^\circ \times \sin 24^\circ \times \dots \times \sin 84^\circ] \\
 &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{45}} (\sin 12^\circ \times \sin 48^\circ \times \sin 72^\circ) (\sin 24^\circ \times \sin 36^\circ \times \sin 84^\circ) \sin 6^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{45}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} (\sin 36^\circ \times \sin 72^\circ) = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{45}} \times \sin 36^\circ \times \sin 72^\circ
 \end{aligned}$$

البته می‌توان $\sin 36^\circ$ و $\sin 72^\circ$ را نیز محاسبه کرد و مقدار عددی آنها را در رابطه آخر قرار داد.

$$x = y \Rightarrow f(\circ) = f(x)^2 - f(x)^2 = \circ \Rightarrow f(\circ) = \circ \quad 5$$

$$x = \circ \Rightarrow f(-y^2) = -f(y)^2 \quad (1)$$

$$y = \circ \Rightarrow f(x^2) = f(x)^2 \quad (2)$$

فرض کنید u, v دو عدد حقیقی باشند که $v < \circ, u > \circ$ با فرض $x^2 = u$ و $-y^2 = v$ داریم:

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

همچنین طبق روابط (۱) و (۲) داریم:

$$f(-u) = -f(\sqrt{u})^2 = -f(u)$$

حال اگر $u \geq \circ$ داریم:

$$u = 2u - u$$

پس:

$$f(u) = f(2u) - f(u) \Rightarrow f(2u) = 2f(u)$$

به کمک استقرا می توان ثابت کرد که:

$$f(nu) = nf(u) \quad (۳)$$

و واضح است که رابطه اخیر به ازای $u < 0$ نیز برقرار است.

$$\forall n \in \mathbb{Z} : f(n) = nf(1)$$

اگر به جای u در رابطه (۳)، $\frac{1}{n}$ بگذاریم، داریم:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n}$$

پس برای هر r گویا، $f(r) = rf(1)$.

اگر فرض کنیم $f(1) = a$ ، تابع f در تمام نقاط گویا بر تابع $g(x) = ax$ منطبق است و به خاطر پیوسته بودن f ، $f = g$ است.

$$\Rightarrow f(x) = ax \Rightarrow f(x^2) = f(x)^2 \Rightarrow ax^2 = a^2x^2 \Rightarrow a = \begin{cases} 0 & \Rightarrow f(x) = 0 \\ 1 & \Rightarrow f(x) = x \end{cases} \text{ یا}$$

۶. مسأله را در سه حالت بررسی می کنیم:

a- اگر هر سه نقطه بر هم منطبق باشند هر خطی که از این نقطه بگذرد یک جواب است. بنابراین بی نهایت خط با خاصیت مورد نظر قابل رسم است.

b- اگر دو نقطه بر هم منطبق باشند نیز بی نهایت خط جواب مسأله است.

c- اگر A و B و C متمایز باشند، خطی که از A به C وصل می شود جواب مسأله است. حال برای تعیین تعداد حداکثر خطوط، صفحه گذرنده از L_1 و L_2 را با P_1 و صفحه گذرنده از L_3 و L_4 را با P_2 نمایش می دهیم. چون B به هر دو صفحه تعلق دارد، پس P_1 و P_2 یا بر هم منطبق اند یا فصل مشترکی چون L دارند. شرط اول امکان ندارد، چون در آن صورت چهار خط در یک صفحه قرار می گیرند که خلاف فرض است. اگر L با خطوط L_1 و L_2 موازی نباشد، آنگاه L نیز یک جواب مسأله است.

اگر L با یکی از این دو خط موازی باشد آنگاه L نمی تواند جواب مسأله باشد. از طرف

دیگر هیچ خط دیگری جز L و خطی که A و C را به هم وصل می کند نمی تواند هر چهار خط را قطع نماید زیرا اگر چنین خطی از A نگذرد، در صفحه P_1 واقع است. در این صورت اگر محل تقاطع این خط با خط L_3 نقطه B' باشد چون B متعلق به P_1 است و B' نیز به P_1 تعلق دارد پس دو نقطه خط L_3 روی P_1 هستند و در نتیجه L_1, L_2, L_3 در یک صفحه اند که خلاف فرض است. به همین ترتیب می توان ثابت کرد که این خط از C نیز باید بگذرد، پس خط مفروض همان AC است.

فصل ۲

ششمین دوره

فروردین ۱۳۶۸

۱.۲ مسائل

۱. الف) نشان دهید برای هر m و n طبیعی:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)\dots(k+m-1) = \frac{n(n+1)\dots(n+m)}{m+1}$$

ب) اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه m با ضرایب گویا باشد، نشان دهید وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند،

$$\frac{\sum_{k=1}^n P(k)}{n^{m+1}}$$

دارای حد است.

۲. اگر در چهار ضلعی محیطی $ABCD$ ، I وسط قطر AC و J وسط قطر BD و O مرکز دایره محاط در چهار ضلعی باشد، ثابت کنید نقاط I و J و O بر یک استقامت هستند.

۲۰. ششمین دوره.....

۳. ثابت کنید که تابع هممانی، تنها تابع پوشا مانند f از N (مجموعه اعداد طبیعی) به N است که در شرط:

$$f(f(n) + f(m)) = n + m \quad (n, m \in N)$$

صدق می کند.

۴. دنباله $\{a_n\}$ چنین تعریف شده است:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{اگر } n = 1 \\ \left(\frac{2n-3}{2n}\right) a_{n-1} & \text{اگر } n \geq 2 \end{cases}$$

ثابت کنید به ازای هر $n \geq 1$ ، $\sum_{k=1}^n a_k < 1$.

۵. اگر در چهار وجهی $ABCD$ ارتفاعهای وارد از هر رأس بر وجه مقابل را با h_a, h_b, h_c و h_d نمایش دهیم، ثابت کنید:

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}$$

۶. تعداد 1369^n عدد گویای مثبت با این خاصیت مفروض اند که با کنار گذاشتن هر یک از این اعداد بقیه را می توان به 1368 دسته مساوی (از نظر تعداد) تقسیم کرد که حاصل ضرب تمام اعداد در هر دسته یکسان باشد. ثابت کنید تمام این اعداد مساوی اند.

۲.۲ پاسخ مسائل

۱. الف- داریم:

$$\begin{aligned} k(k+1)\dots(k+m-1) &= k(k+1)\dots \times (k+m-1) \times \frac{(k+m)-(k-1)}{m+1} \\ &= ([k(k+1)\dots(k+m)] - [(k-1)k \times \dots \times (k+m-1)]) \times \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

بنابراین وقتی سیگما بسته می‌شود، عبارت‌های داخل کروشه، یکی در میان با یکدیگر ساده خواهند شد.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=1}^n k(k+1)\dots(k+m-1) &= \frac{1}{m+1} [n(n+1) \times \dots (n+m) - 0] \\ &= \frac{n(n+1) \times \dots \times (n+m)}{m+1} \end{aligned}$$

ب-

ابتدا نشان می‌دهیم که بزرگترین توان n در $\sum_{k=1}^n P(k)$ برابر $m+1$ است. اثبات با استقرا نسبت به m است. واضح است که هر چند جمله‌ای از درجه m را می‌توان به صورت

$$ax(x+1)\dots(x+m-1) + P_{m-1}(x)$$

نوشت که در آن a عددی است ثابت و P_{m-1} چند جمله‌ای از درجه حداکثر $m-1$ است.

حال اگر $m=1$ آنگاه $P(x)$ به صورت $(a \neq 0)ax + b$ است و در نتیجه:

$$P(1) + P(2) + \dots + P(n) = a(1+2+\dots+n) + nb = a \frac{n(n+1)}{2} + nb$$

واضح است که درجه آن نسبت به n ، $m+1=2$ است و در نتیجه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n P(k)}{n^2} = \frac{a}{2}$$

اگر حکم فوق در مورد چند جمله‌ای‌هایی با درجه کمتر از m برقرار باشد آنگاه:

$$P_m(x) = ax(x+1) \times \dots \times (x+m-1) + P_{m-1}(x)$$

بنابراین:

$$\sum_{k=1}^n P(k) = a \sum_{k=1}^n k(k+1) \dots (k+m-1) + \sum_{k=1}^n P_{m-1}(k)$$

در جمله دوم بنا بر فرض استقرای حداکثر توان n برابر m است و جمله اول بنا بر (الف) برابر:

$$\frac{a}{m+1} n(n+1) \dots (n+m-1)$$

است که توان n در آن $m+1$ است و بنابراین:

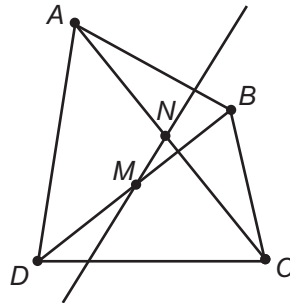
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n P(k)}{n^{m+1}} = \frac{a}{m+1}$$

موجود است.

۲. لم: مکان هندسی نقاطی مانند P در صفحه چهارضلعی $ABCD$ ، به طوری که داشته باشیم:

$$S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PDC} = S_{\triangle PAD} + S_{\triangle PBC}$$

خطی است که از وسط دو قطر AC و BD می‌گذرد. (اثبات به عهده خواننده)

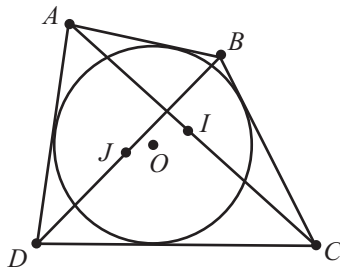


بدیهی است که:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle ABJ} &= S_{\triangle AJD} \\ S_{\triangle JDC} &= S_{\triangle JCB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\triangle AJB} + S_{\triangle DJC} = S_{\triangle AJD} + S_{\triangle BJC}$$

به روش مشابه:

$$S_{\triangle AIB} + S_{\triangle DIC} = S_{\triangle AID} + S_{\triangle BIC}$$



اگر r شعاع دایره محاطی باشد داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle AOB} + S_{\triangle DOC} &= \frac{r}{2}(AB + DC) \\ S_{\triangle AOD} + S_{\triangle BOC} &= \frac{r}{2}(AD + BC) \end{aligned} \right\} \\ ABCD \Rightarrow AB + DC = AD + BC \text{ چهارضلعی محیطی است}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AOB} + S_{\triangle DOC} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle BOC}$$

بنابراین هر سه نقطه J, O, I در خاصیت مربوط به «لم» فوق صدق می‌کنند یعنی J, O, I هم‌خط‌اند.

۳. راه حل اول: ابتدا یک به یکی تابع را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f(m) = f(n) &\Rightarrow f(f(m) + f(n)) = f(f(n) + f(m)) \\ &\Rightarrow m + n = n + m \Rightarrow m = n \end{aligned}$$

پس تابع یک به یک است. اکنون فرض می‌کنیم که:

$$\begin{aligned} f(1) &= a > 1 \\ \Rightarrow a &= s + t \quad \text{که} \quad s, t \in N \\ \Rightarrow f(f(s) + f(t)) &= s + t = a = f(1) \\ \Rightarrow f(f(s) + f(t)) &= f(1) \xrightarrow{\text{طبق یک به یکی}} f(s) + f(t) = 1 \end{aligned}$$

اما می‌دانیم که $f(t), f(s) \in N$ هستند و هیچ‌گاه جمع دو عدد طبیعی، یک نمی‌شود.

از تناقض بوجود آمده نتیجه می‌گیریم که $a = 1$ است. پس $f(1) = 1$ است. حال به کمک استقرا بدیهی است که $f(n) = n$ است.

راه حل دوم: ابتدا ثابت می‌کنیم که:

$$\forall n \geq 2 \Rightarrow f(n) \geq 2$$

حال اگر $n \geq 2$ باشد آنگاه $1, n-1 \in N, n = (n-1) + 1$ و از آنجا که تابع f پوشاست پس اعدادی طبیعی مانند α, β وجود دارند که:

$$f(\alpha) = n-1, \quad f(\beta) = 1$$

بنابراین:

$$f(n) = f((n-1) + 1) = f(f(\alpha) + f(\beta)) = \alpha + \beta \Rightarrow f(n) = \alpha + \beta$$

و $\alpha, \beta \in N$ اند لذا $\alpha + \beta \geq 2$ است پس:

$$\forall n \geq 2 \Rightarrow f(n) \geq 2 \quad (1)$$

از رابطه (۱) می‌توان نتیجه گرفت که $f(1) = 1$ است. حال با استقرا بدیهی است که $f(n) = n$ است.

۴. از رابطه $a_n = \left(\frac{2n-3}{2n}\right)a_{n-1}$ بلافاصله نتیجه می‌شود که

$$2k \times a_k = (2k-3) \times a_{k-1} \quad (k \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{k-1} &= (2k - 2)a_{k-1} - 2k \times a_k \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} = \sum_{k=2}^{n+1} [(2k - 2)a_{k-1} - 2ka_k] \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k &= 2a_1 - 2(n+1)a_{n+1} = 1 - 2(n+1)a_{n+1} \end{aligned}$$

توسط استقرا واضح است که:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$$

پس:

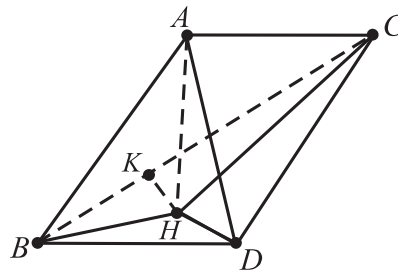
$$\sum_{k=1}^n a_k = 1 - 2(n+1)a_{n+1} < 1$$

۵. در چهاروجهی $ABCD$ مساحت هر یک از وجه‌ها را به صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم:

$$S_{\triangle ABC} = S_d, \quad S_{\triangle ABD} = S_c, \quad S_{\triangle ACD} = S_b, \quad S_{\triangle BCD} = S_a$$

حال اگر حجم هرم را با V نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{3}S_a h_a = \frac{1}{3}S_b h_b = \frac{1}{3}S_c h_c = \frac{1}{3}S_d h_d = V$$



از این رو داریم:

$$S_d = \frac{3V}{h_d}, \quad S_c = \frac{3V}{h_c}, \quad S_b = \frac{3V}{h_b}, \quad S_a = \frac{3V}{h_a}$$

حال ثابت می‌کنیم که $S_a < S_b + S_c + S_d$ است.

برای اثبات از A ارتفاع AH را بر وجه BCD رسم می‌کنیم. در حالتی که H در داخل

مثلث BCD باشد، H را به رئوس D, C, B وصل کرده و از H عمود HK را بر یال BC رسم می‌کنیم. از K به A وصل می‌کنیم. AK بر BC عمود است زیرا $AH \perp BCD$ ، پس $AH \perp BC$ و $HK \perp BC$ پس $AHK \perp BC$. به بیان دیگر، در صفحه AHK دو خط AH و HK بر BC عمودند پس BC بر صفحه AHK عمود است و در نتیجه بر کلیه خطوط آن و به‌خصوص بر AK عمود است.
از طرفی داریم:

$$S_{\triangle ABC} = S_d = \frac{AK \cdot BC}{2}, \quad S_{\triangle HBC} = \frac{KH \cdot BC}{2}$$

اما در مثلث قائم‌الزاویه AHK ، $AK > KH$ و تر است. پس $AK > KH$ و در نتیجه $S_d > S_{HBC}$. به روش مشابه ثابت می‌شود که:

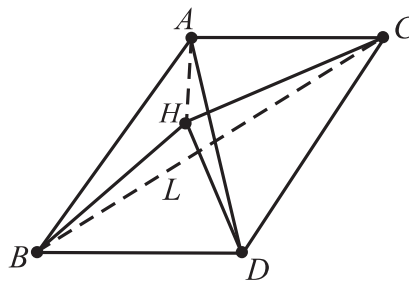
$$\begin{cases} S_b > S_{HCD} \\ S_c > S_{HBD} \end{cases}$$

از جمع این سه نامساوی داریم:

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

$$\Rightarrow \frac{3V}{h_a} < \frac{3V}{h_b} + \frac{3V}{h_c} + \frac{3V}{h_d} \Rightarrow \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}$$

این حالتی بود که H در داخل مثلث BCD باشد. در حالتی که H خارج از مثلث BCD باشد، فرض می‌کنیم H در طرف BC باشد و L را محل تقاطع BC و HD می‌گیریم.



خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S_b > S_{HCD} > S_{LCD} \\ S_c > S_{HBD} > S_{LBD} \end{cases}$$

پس:

$$S_b + S_d > S_{LCD} + S_{LBC}$$

و از این رو داریم:

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

یعنی:

$$\frac{3V}{h_a} < \frac{3V}{h_b} + \frac{3V}{h_c} + \frac{3V}{h_d} \Rightarrow \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}$$

پس حکم برقرار است.

۶. بدون این که از کلیت مسأله کاسته شود می توان تمام اعداد را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها ضرب کرد. با این کار تمام اعداد را می توان طبیعی در نظر گرفت. آشکار است که هر یک از اعداد را که برداریم، بقیه اعداد را می توان به دو دسته مساوی تقسیم کرد که حاصل ضرب هر دو دسته یکسان گردد.

فرض کنید تمام اعداد اولی که در تجزیه این اعداد به کار رفته اند p_1, p_2, \dots, p_k باشند. با ضرب تمام اعداد در عبارت $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$ می توان فرض کرد که در تجزیه تمام اعداد، اعداد اول یکسان بکار رفته است.

حال کافی است نشان دهیم که توان هر یک از این اعداد اول در هر یک از این اعداد یکسان است. اگر توان های عدد اول p_1 را به ترتیب با $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ نشان دهیم. ($m = 1369^n$) ادعا می کنیم که $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m$ است. همچنین برای بقیه p_i ها نیز به روش مشابه چنین رابطه ای صادق است.

α_i ها دارای این خاصیت هستند که هر یک از آن ها را کنار بگذاریم بقیه را می توان به دو دسته مساوی تقسیم کرد که حاصل جمع اعداد هر دو دسته یکسان گردند و لذا اگر هر α_i را به یک عدد تقسیم، یا در یک عدد ضرب و یا با یک عدد جمع کنیم این خاصیت باقی می ماند. آشکار است که همه α_i ها با هم یا زوج هستند یا فرد، زیرا اگر یکی را کنار می گذاشتیم مجموع بقیه به ۲ بخش پذیر می شد.

حال فرض می کنیم که α_k کوچکترین این اعداد باشد. پس اعداد $\alpha_1 - \alpha_k$

$\alpha_n - \alpha_k, \dots, \alpha_2 - \alpha_k$ نیز دارای این خاصیت α_i هستند. حال فرض می‌کنیم که $\alpha_i - \alpha_k = 2^{m_i} \times x_i$ که x_i ها فرد هستند. آنگاه همه $\alpha_i - \alpha_k$ ها را بر 2^p تقسیم می‌کنیم (p کوچکترین m_i هاست). بنابراین در بین اعداد $\frac{\alpha_n - \alpha_k}{2^p}, \dots, \frac{\alpha_2 - \alpha_k}{2^p}, \frac{\alpha_1 - \alpha_k}{2^p}$ یک عدد فرد و یک عدد زوج (که همان صفر است) ظاهر می‌گردد که غیر ممکن است. مگر اینکه $\forall i : \alpha_i = \alpha_k$ باشد.

فصل ۳

هفتمین دوره

بهمن ۱۳۶۸

۱.۳ مسائل

۱. الف) ثابت کنید برای هر عدد صحیح و مثبت n ، نامساوی زیر برقرار است:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

ب) یک عدد طبیعی n پیدا کنید به طوری که:

$$\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = 12$$

($[x]$ نمایش جزء صحیح عدد حقیقی x است.)

۲. کره S به مرکز O و شعاع R و نقطه ثابت P روی آن داده شده است. سه نقطه A و B و C روی کره به گونه‌ای حرکت می‌کنند که کنج $ABC - P$ همواره کنج سه قائمه است. ثابت کنید صفحه مثلث ABC از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۳. اگر دنباله $\{a_n\}_{n \geq 1}$ یک دنباله باشد که $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$ و

$$a_{n+1} = 1 + a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} + (a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1})^2, \quad (n \geq 2)$$