۱

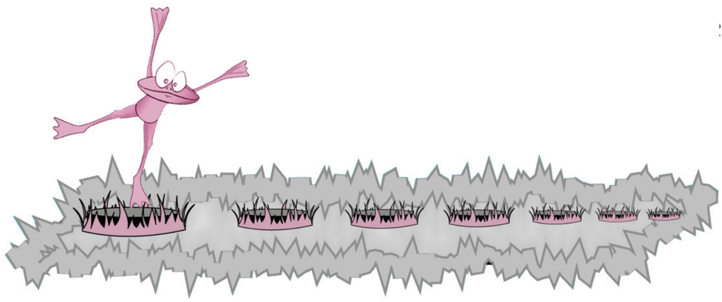
دوره‌ی بیست و سوم

سؤالات بیست و سومین المپیاد ریاضی ایران

۱ پس از بسط دادن $(۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots + ۹x^۸ + ۱۰x^۹)^۲$، چند تا از ضرایب فرد است؟

الف) ۱ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ ه) ۱۰

۲ در برکه‌ای ۷ قطعه سنگ وجود دارد که از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۷ شماره‌گذاری شده‌اند. قورباغه‌ای روی سنگ شماره‌ی یک نشسته است. فاصله‌ی سنگ‌ها به گونه‌ای است که اگر قورباغه روی سنگ iـاُم باشد می‌تواند حداکثر تا i سنگ جلو بپرد. به چند طریق ممکن است قورباغه، بدون برگشت به سمت چپ، :



الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) ۱۴

۳ به چند طریق می‌توان سه زیرمجموعه‌ی دوعضوی از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, ۶\}$ انتخاب کرد به‌طوری که هر دو تا از آن‌ها دقیقاً یک عضو مشترک داشته باشند؟

الف) ۲۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ ه) ۸۰

۴ به ازای چند عدد طبیعی n، $[\frac{n^۲}{۳}]$ عددی اول است؟ ($[x]$ جزء صحیح x است.)

الف) یک ب) دو ج) سه د) بی‌نهایت ه) چنین عددی وجود ندارد.

۵ چهارضلعی $ABCD$ در بین چهارضلعی‌هایی که داخل نیم‌دایره‌ای به شعاع واحد قرار دارند، بیش‌ترین مساحت را دارد. مساحت $ABCD$ چقدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ ج) $\frac{۶}{۵}$ د) $\frac{\sqrt{۷}}{۷}$ ه) $\sqrt{۲}$

۶ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، نیمساز زاویه‌ی C مثلث ABC را به دو مثلث متساوی‌الساقین دیگر تقسیم کرده است. نسبت $\frac{BC}{AB}$ برابر با کدام‌یک از اعداد زیر است؟

الف) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\sqrt{۲}$ د) $\frac{۱}{۲}$ ه) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

۷ سهمی $y = x^{۲} - ۲ax + ۱$ و خط $y = ۲b(a - x)$ را در نظر بگیرید. تعریف کنید

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^{۲} | \text{خط و سهمی مذکور یکدیگر را قطع نمی‌کنند}\}$$

مساحت A چقدر است؟

الف) $\frac{\pi}{۴}$ ب) $\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ ج) A بی‌کران است. د) ۱ ه) π

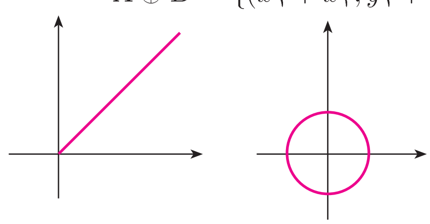
۸ ۱۸ خط در صفحه طوری رسم شده است که هر کدام افقی، عمودی یا موازی نیمساز ربع اول و سوم (یعنی خط $y = x$) است. در این وضعیت، صفحه حداکثر به چند قسمت (کران‌دار یا بی‌کران) تقسیم شده است؟

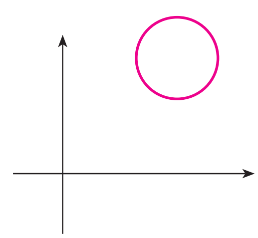
الف) ۶۳ ب) ۸۱ ج) ۱۲۱ د) ۱۲۷ ه) ۲۱۶

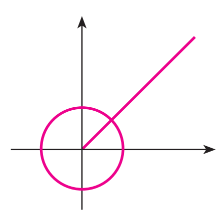
۹ فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از نقاط صفحه باشند. مجموعه‌ی $A \oplus B$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

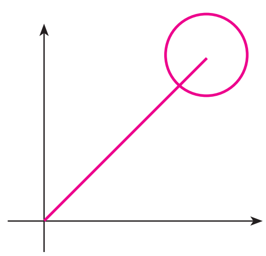
$$A \oplus B = \{(x_{۱} + x_{۲}, y_{۱} + y_{۲}) | (x_{۱}, y_{۱}) \in A, (x_{۲}, y_{۲}) \in B\}$$

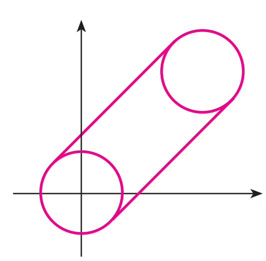
اگر A و B پاره‌خط و دایره‌ی نشان داده شده در شکل مقابل باشند، آن‌گاه $A \oplus B$ کدام‌یک از شکل‌های زیر خواهد بود؟

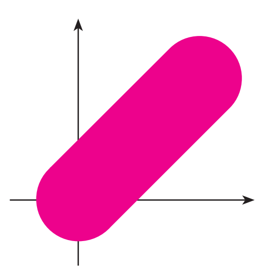


الف)


ب)


ج)


د)


ه)


۱۰ قطر یک زیرمجموعه از صفحه یعنی بزرگ‌ترین فاصله‌ی بین نقاط آن. به عنوان مثال، قطر هر مثلث برابر طول بزرگ‌ترین ضلع آن است. فرض کنید قطر دومجموعه‌ی A و B برابر d است. کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار قطر $A \oplus B$ چقدر است؟ ($A \oplus B$ همان است که در سؤال قبل تعریف شده است.)

الف) d و d ب) $\sqrt{۲}d$ و $\sqrt{۳}d$ ج) d و $۲d$ د) $\sqrt{۲}d$ و $۲d$ هـ) $۲d$ و $۳d$

۱۱ مجموعه‌های A_k، $k \in \mathbb{N}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_۱ = \text{مجموعه‌ی اعداد اول}$$

$$A_{k+۱} = \{a_۱ \times a_۲ \times \cdots \times a_{k+۱} | a_۱, a_۲, \cdots, a_{k+۱} \in A_k\}$$

توجه کنید که $a_۱, a_۲, \cdots, a_{k+۱}$ لزوماً متمایز نیستند. کدام‌یک از اعداد زیر، دست کم عضو یکی از A_kها است؟

الف) $۲^{۲۴۳} \times ۳^{۷}$ ب) $۵^{۲۵} \times ۲^{۲۵}$ ج) $۷^{۲۵} \times ۲^{۲۳۱}$

د) $۳^{۹} \times ۲^{۱۱۱}$ هـ) $۵^{۶} \times ۳^{۱۲} \times ۲^{۶۰}$

۱۲ به ازای چند مقدار طبیعی برای a، معادله‌ی $\frac{۱}{y} - \frac{a}{x+y} = \frac{۱}{x}$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جواب دارد؟

الف) چنین aای وجود ندارد. ب) یکی ج) دو تا

د) چهار تا هـ) بی‌نهایت

۱۳ می‌توان ثابت کرد در هر مثلث دلخواه ABC، قرینه‌ی مرکز ارتفاعیه (محل همرسی ارتفاع‌ها) نسبت به وسط ضلع BC روی دایره‌ی محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را D بنامید. اندازه‌ی زاویه‌ی DAC برابر است با:

الف) $\frac{\hat{A}}{۲}$ ب) $\frac{\hat{B}}{۲}$ ج) $۹۰ - \hat{A}$ د) $۹۰ - \hat{B}$ هـ) $۹۰ - \frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}$

۱۴ فرض کنید $f : R \to R$ تابعی وارون‌پذیر باشد و $h(x) = \frac{kf(x)}{۱-f(x)}$. اگر h وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $x - \frac{x}{f \circ h^{-۱}(x)}$ برابر است با:

الف) $f(x)$ ب) $h(x)$ ج) kx د) k هـ) $\frac{x}{f(x)} - x$

۱۵ کاغذی مستطیل شکل را چندین بار تا کرده‌ایم. در هر مرحله تا بر روی خطی موازی دو ضلع و در وسط آن‌ها زده شده است تا به مستطیلی با مساحت نصف مستطیل قبل برسیم. واضح است که در هر مرحله این کار به دو روش (افقی و عمودی) امکان‌پذیر است. در نهایت، همهٔ تا ها را بازکرده‌ایم و دیده‌ایم در مجموع ۳۱۸ خط تای افقی و عمودی تولید شده است. کاغذ چند بار تا شده است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۴ ج) ۱۵۹ د) ۳۱۷ هـ) ۳۱۸

۱۶ مربع توپری به ضلع واحد در فضا در نظر بگیرید. حجم مجموعه‌ی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها دست کم از یکی از نقاط مربع کوچک‌تر یا مساوی ۱ باشد، چقدر است؟

الف) ۲ ب) $۲(۱+\frac{۲}{۳}\pi)$ ج) $۲(۱+\pi)$ د) ۸ ه) $۲(۱+\frac{۵}{۳}\pi)$

۱۷ فرض کنید $S(n)$ مجموع ارقام عدد n باشد. چند عدد هفت رقمی n وجود دارد که ارقام ۱ تا ۹ دقیقاً یک بار در بین رقم‌های n و $S(n)$ ظاهر شده باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۵۰۴۰ ه) ۱۰۰۸۰

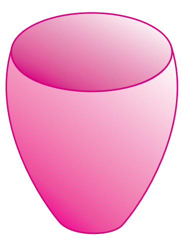
۱۸ فرض کنید عدد طبیعی a داده شده است. در هرگام، به جای عددی که در اختیار داریم یکی از عددهای $۲a+۱$، $۳a+۲$، $۴a+۳$ و $۵a+۴$ را در نظر می‌گیریم و کار را با آن ادامه می‌دهیم. با شروع ازکدام‌یک از اعداد زیر می‌توان بعد از تعدادی گام به عدد $۳۰^{۱۳۸۳}-۱$ رسید؟

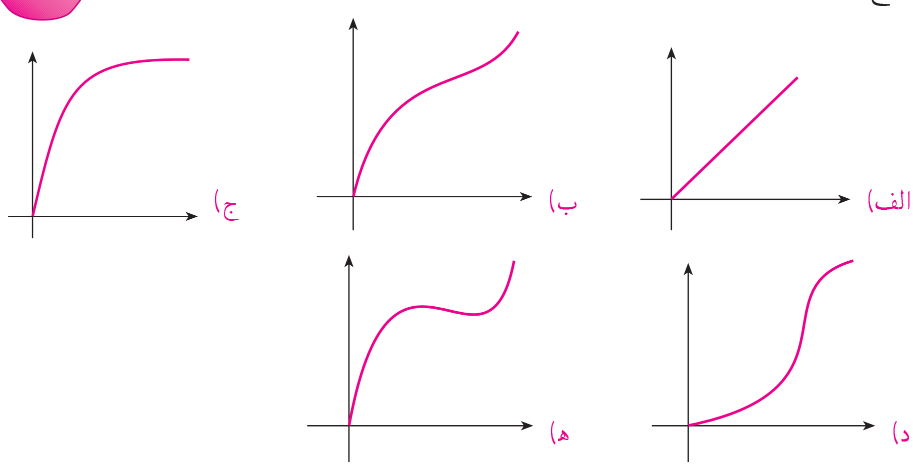
الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) هیچ‌کدام

۱۹ فرض کنید $f_۰(x)=x$ و برای هر $n\geq ۰$، $f_{n+۱}(x)=\sqrt{۱-f_n(x)}$. دامنه‌ی تابع $f_{۱۳۸۳}(x)$ کدام است؟

الف) $(-\infty,۱]$ ب) $[۰,۱]$ ج) $[۰,\frac{۱}{۲^{۱۳۸۳}}]$ د) $\{۱\}$ ه) $\{۰\}$

۲۰ در ظرفی به شکل روبه‌رو با نرخ ثابت در هر دقیقه یک لیتر آب می‌ریزیم:
کدام‌یک از نمودارهای زیر می‌تواند نشان‌دهنده‌ی ارتفاع آب بر حسب زمان باشد؟





۲۱ در دایره‌ای به شعاع واحد، AB کمانی ۶۰° و XY قطر متغیری از دایره است. خطوط XA و XB یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع می‌کنند. مکان هندسی محل برخورد ارتفاع‌های مثلث PXY چیست؟

الف) دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) خطی به موازات AB و به فاصله‌ی $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ از آن

ج) دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

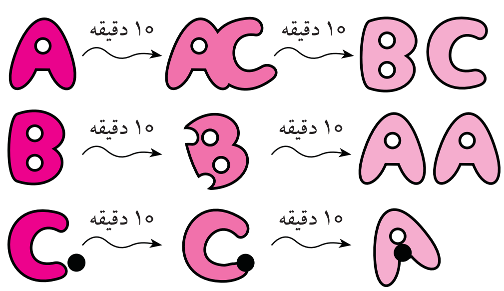
د) خطی به موازات AB و به فاصله‌ی $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ از آن

هـ) دایره‌ای به شعاع ۱

۲۲ یک عدد طبیعی را یکنوا می‌گوییم هرگاه رقم صفر نداشته باشد و به علاوه ارقام آن به‌صورت اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی مرتب شده باشند. مثلاً اعداد ۱۳۵۶ و ۷۲ یکنوا هستند اما اعداد ۲۲، ۲۰۳۴ و ۱۳۸۳ یکنوا نیستند. مجموع همه‌ی اعداد یکنوای چهاررقمی چند است؟

الف) ۱۳۹۹۸۶۰ ب) ۹۹۹۹۹۸۰ ج) ۷۹۵۵۴۲۰ د) ۱۲۶۰۰۰۰ هـ) ۴۹۴۹۵۵۰

۲۳ بیماری کشنده‌ی ABC توسط باکتری‌ای به همین نام تولید می‌شود. این باکتری در واقع دارای سه نوع A، B و C است که طبق این قوانین به هم تبدیل می‌شوند: پس از گذشت هر ۲۰ دقیقه هر باکتری A به یک B و یک C، هر باکتری B به دو A و هر باکتری C به یک A تبدیل می‌شود. به علاوه هر بار که C به A تبدیل می‌شود یک گلبول قرمز را نیز می‌خورد!



اگر در آغاز تنها یک باکتری از نوع B وارد بدن شده باشد، پس از گذشت ۱۰ ساعت چند گلبول قرمز خورده شده است؟

الف) بین ۱۰۰ تا ۵۰۰ هزار ب) بین ۵۰۰ هزار تا ۱ میلیون ج) بین ۱ تا ۵ میلیون

د) بین ۵ تا ۱۰ میلیون هـ) بیش از ۱۰ میلیون

۲۴ دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید که در آن A و B ماتریس‌هایی ۲ × ۲، I ماتریس همانی ۲ × ۲ و 0 ماتریس ۲ × ۲ با درایه‌های صفر است.

$$۲A^۶ + ۲A^۲ + A + B = 0$$
$$A^۲ - A + I = 0$$

داریم:

الف) $۳A + B = 0$ ب) $A + B = I$ ج) $A + ۳B = 0$

د) $A^۲ + B^۲ = 0$ هـ) این دستگاه جواب ندارد.

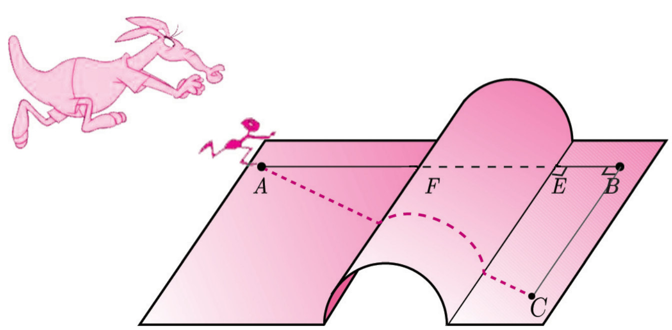
۲۵ می‌خواهیم اعداد طبیعی را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که اولاً هر دو عدد متوالی ناهمرنگ باشند و ثانیاً برای هر دو عدد ناهمرنگ a و b، یا باقی‌مانده‌ی a و b بر ۱۱ متفاوت باشد، یا باقی‌مانده a و b بر ۱۷. کم‌ترین تعداد رنگ‌های لازم چند تاست؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۷ د) ۲۱ هـ) ۱۴۷

۲۶ معادله‌ی $[\sin x] + \sin x = [\frac{x}{۳}] + \frac{x}{۳}$ چند جواب حقیقی دارد؟ ($[a]$ جزء صحیح a است.)

الف) جواب ندارد. ب) یکی ج) دو تا د) سه تا هـ) پنج تا

۲۷ در شکل زیر مثلث ABC قائم‌الزاویه است ($\hat{B} = ۹۰^\circ$)، $AB = ۱۰ - \pi$ و $BC = ۶$. نیم‌استوانه‌ای با شعاع واحد و محور عمود بر AB، بین نقاط A و C مانع شده است.



مورچه بنا به دلایلی (!) باید هر چه سریع‌تر از نقطه‌ی A به لانه‌اش در نقطه‌ی C برود. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برابر است با:

الف) $\sqrt{۱۳۶}$ ب) $\sqrt{۱۳۶} - \pi$ ج) ۱۰ د) $۷ + \pi$ هـ) ۱۱

۲۸ مهره‌ای در مبدأ مختصات قرار داده‌ایم. در هر مرحله مهره را توسط یکی از چهار بردار (m,n)، $(-m,-n)$، $(n+۱,m+۱)$ یا $(-n-۱,-m-۱)$ به نقطه‌ی دیگری منتقل می‌کنیم و این کار را تکرار می‌کنیم. به ازای کدام‌یک از (m,n)های زیر می‌توان مهره را به هر نقطه‌ی صفحه با مختصات صحیح رساند؟

الف) $n=۳$ و $m=۱$ ب) $n=۳$ و $m=۲$ ج) $n=۵$ و $m=۳$

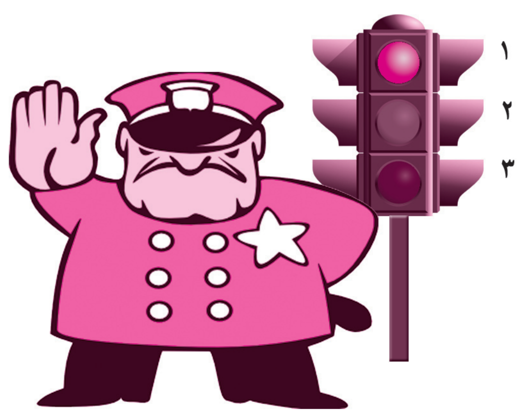
د) $n=۷$ و $m=۴$ ه) به ازای هیچ m و nای نمی‌توان این کار را انجام داد.

۲۹ فرض کنید $f(x)=x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱$. باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x^{۱۲})$ بر $f(x)$ کدام است؟

الف) $x^۳+x^۲+x+۱$ ب) $x^۲-x+۶$ ج) $x+۶$

د) ۶ ه) $۶-x$

۳۰ یک چراغ راهنمای عجیب سه کلید دارد که هر کلید آن می‌تواند در یکی از وضعیت‌های ۱، ۲ یا ۳ قرار گیرد.



می‌دانیم که اگر وضعیت هر سه کلید را همزمان تغییر دهیم، رنگ چراغ تغییر می‌کند. ابتدا هر یک از سه کلید در وضعیت ۱ هستند و چراغ قرمز است. افسر پلیس با تغییر وضعیت کلید اول از ۱ به ۲ چراغ را سبز می‌کند. حال اگر کلید دوم را هم در وضعیت ۲ قرار دهد، چراغ چه رنگی می‌شود؟

الف) قرمز ب) زرد ج) سبز

د) فقط می‌توان گفت سبز نیست. ه) هر رنگی ممکن است باشد.

پاسخ کلیدی بیست و سومین المپیاد ریاضی ایران

۱	الف **ب** ج د ه	۱۱	الف ب ج **د** ه	۲۱	الف ب **ج** د ه
۲	الف **ب** ج د ه	۱۲	الف **ب** ج د ه	۲۲	**الف** ب ج د ه
۳	الف ب ج د **ه**	۱۳	الف ب ج **د** ه	۲۳	الف ب **ج** د ه
۴	الف **ب** ج د ه	۱۴	الف ب ج **د** ه	۲۴	**الف** ب ج د ه
۵	الف **ب** ج د ه	۱۵	الف **ب** ج د ه	۲۵	الف **ب** ج د ه
۶	الف ب ج د **ه**	۱۶	الف ب ج د **ه**	۲۶	الف ب ج **د** ه
۷	الف ب ج د **ه**	۱۷	الف ب ج **د** ه	۲۷	الف ب **ج** د ه
۸	الف ب ج **د** ه	۱۸	الف **ب** ج د ه	۲۸	الف ب ج د **ه**
۹	الف ب ج د **ه**	۱۹	الف **ب** ج د ه	۲۹	الف ب ج **د** ه
۱۰	الف ب ج **د** ه	۲۰	الف **ب** ج د ه	۳۰	الف ب **ج** د ه

پاسخ تشریحی بیست و سومین المپیاد ریاضی ایران

۱

گام اول

جملات حاصل از آن بسط چگونه به‌دست می‌آیند؟

جملات حاصل از آن بسط به دو گونه‌اند:

I: مربعِ هر یک از جملات داخل پرانتز

II: دو برابر حاصل‌ضرب هر دوجمله‌ای از داخل پرانتز

گام دوم

زوج بودن ضریب کدام‌یک از جملات حاصل یقینی است؟

معلوم است که ضرایب تمام جملات ایجاد شده در بندِ II زوج هستند. در بندِ I نیز مرجعِ جملاتی که ضریب آن‌ها زوج است، دارای ضریب زوج خواهند شد.

گام سوم

مابقیِ جملات همگی ضرایبی فرد دارند آن‌ها را مشخص کنید.

فقطَ جملاتی از بندِ I می‌ماند که ضرایب فردی دارند. آن جملات به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$(۱)^۲ = ۱ \quad , \quad (۳x^۲)^۲ = ۹x^۴ \quad , \quad (۵x^۴)^۲ = ۲۵x^۸$$
$$(۷x^۶)^۲ = ۴۹x^{۱۲} \quad , \quad (۹x^۸)^۲ = ۸۱x^{۱۶}$$

۲

گام اول

تصور کنید که اگر تعداد سنگ‌ها زیاد بود و قرار بود قورباغه به سنگ بیستم برسد آن‌گاه آن قورباغه قبل از سنگ بیستم بر روی چه سنگی بوده است (یعنی پرش از روی چه سنگ‌هایی به سنگ بیستم فقط با یک پرش امکان‌پذیر است)؟

معلوم است که جواب، سنگ‌های ۱۰، ۱۱، ۱۲، ...، ۱۹ می‌باشد.

گام دوم

پرش به روی سنگ nـاُم از روی چه سنگ‌هایی ممکن است؟

اگر n زوج باشد آن‌گاه جواب، سنگ‌های $\frac{n}{۲}$، $\frac{n}{۲}+۱$، ...، $\frac{n}{۲}+\frac{n}{۲}-۱$ می‌باشد و اگر n فرد باشد آن‌گاه جواب، سنگ‌های $\frac{n+۱}{۲}$، $\frac{n+۱}{۲}+۱$، ...، $\frac{n-۱}{۲}+\frac{n+۱}{۲}-۱$ می‌باشد.

گام سوم

اگر تعداد طرق رسیدن قورباغه به سنگ iـاُم را a_i بنامیم آن‌گاه بین a_i و a_jهای قبل از a_i چه رابطه‌ای برقرار است؟

با توجه به گام‌های قبلی معلوم است که اگر i زوج باشد آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$a_i = a_{i-1} + a_{i-2} + \cdots + a_{\frac{i}{2}}$$

و اگر i فرد باشد آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$a_i = a_{i-1} + a_{i-2} + \cdots + a_{\frac{i+1}{2}}$$

گام چهارم

با توجه به مقدار a_2 و a_3 که به راحتی به‌دست می‌آیند a_4، a_5، a_6 و a_7 را بیابید.

مقادیر a_i به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_2 = 1 \quad , \quad a_3 = a_2 = 1 \quad , \quad a_4 = a_3 + a_2 = 1 + 1 = 2$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 2 + 1 = 3 \quad , \quad a_6 = a_5 + a_4 + a_3 = 3 + 2 + 1 = 6$$
$$a_7 = a_6 + a_5 + a_4 = 6 + 3 + 2 = 11$$

۳

گام اول

مسأله را به این صورت حالت‌بندی کنید که آن سه زیرمجموعه آیا باید هر سه عضوی مشترک داشته باشند و یا می‌توانند دوبه‌دو اشتراک داشته ولی عضوی در هر سه تای آن‌ها مشترک نباشد.

آن سه زیرمجموعه به یکی از دو شکل زیر است:

I: به شکل $\{a,b\}$، $\{a,c\}$ و $\{b,c\}$ باشند.

II: به شکل $\{a,b\}$، $\{a,c\}$ و $\{a,d\}$ باشند.

گام دوم

تعداد طرق اختصاص دادن ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ به حروف a، b و c را در حالت اول و به حروف a، b، c و d را در حالت دوم بررسی کنید.

در حالتِ I باید از ۶ رقم داده شده، ۳ رقم انتخاب کنیم که این کار به $\binom{۶}{۳}$ یعنی ۲۰ طریق، شدنی است. اختصاص دادن سه رقمِ منتخب به سه حرفِ a، b و c به یک طریق ممکن است، چون نقش a، b و c در حالتِ I همگی یکسان است.

در حالتِ II باید از ۶ رقم داده شده ۴ رقم انتخاب کنیم که این کار به $\binom{۶}{۴}$ یعنی ۱۵ طریق، شدنی است. در چهار حرف موجود، نقش حرفِ a با بقیه متفاوت است، بنابراین یکی از چهار رقم را به a و سه رقمِ دیگر را به سه حرفِ متشابه b، c و d اختصاص می‌دهیم، بنابراین جواب این حالت برابر $۱ \times ۴ \times \binom{۶}{۴}$ یعنی ۶۰ می‌باشد.

گام سوم

با توجه به حالت‌بندیِ فوق جواب نهایی را بیابید.

با توجه به حالت‌بندی گام‌های قبلی جواب موردنظر برابر $۶۰ + ۲۰$ یعنی ۸۰ می‌باشد. البته لازم به ذکر است که تعداد جواب‌ها در حالتِ II را به شکل زیر نیز می‌توان پیدا کرد:

$$۶۰ = \binom{۵}{۳}.\binom{۶}{۱} = \left(\begin{array}{c}\text{انتخاب سه رقم از ۵ رقم باقی‌مانده}\\ \text{و اختصاص آن‌ها به سه حرف یکسان}\end{array}\right) \text{ و } \left(\begin{array}{c}\text{انتخاب یک رقم از ۶ رقم و اختصاص}\\ \text{آن به حرفِ متفاوت } a\end{array}\right)$$

۴

گام اول

می‌دانیم هر عدد طبیعی مانند n به یکی از سه شکل $۳k$، $۳k + ۱$ و $۳k + ۲$ می‌باشد. در هر یک از سه حالت فوق حاصل $[\frac{n^۲}{۳}]$ را بیابید.

اگر $n = ۳k$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$[\frac{n^۲}{۳}] = [\frac{۹k^۲}{۳}] = [۳k^۲] = ۳k^۲$$

اگر $n = ۳k + ۱$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$[\frac{n^۲}{۳}] = [\frac{۹k^۲ + ۶k + ۱}{۳}] = [۳k^۲ + ۲k + \frac{۱}{۳}] = ۳k^۲ + ۲k = k(۳k + ۲)$$

و بالاخره اگر $n = ۳k + ۲$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$[\frac{n^۲}{۳}] = [\frac{۹k^۲ + ۱۲k + ۴}{۳}] = [۳k^۲ + ۴k + ۱ + \frac{۱}{۳}]$$
$$= ۳k^۲ + ۴k + ۱ = (۳k + ۱)(k + ۱)$$

گام دوم

با توجه به حالت‌بندیِ قسمت قبل در چه مواقعی $[\frac{n^۲}{۳}]$ اول می‌شود؟

در حالت اول، $۳k^۲$ فقط وقتی اول می‌شود که $k = ۱$.

در حالت دوم، $k(۳k + ۲)$ فقط وقتی اول می‌شود که $k = ۱$.

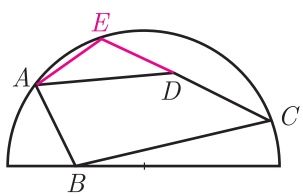
در حالت سوم، حاصلِ $(۳k + ۱)(k + ۱)$ هرگز عددی اول نمی‌شود.

بنابراین حاصل $[\frac{n^۲}{۳}]$ فقط به ازای $n = ۳$ و $n = ۴$ عددی اول می‌شود که به‌ترتیب برابرِ ۳ و ۵ به‌دست می‌آید.

۵

گام اول

اولاً استدلال کنید که ۴ رأس آن چهارضلعی باید بر روی محیط نیم‌دایره باشند.



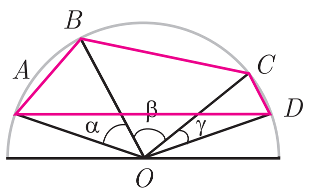
اگر رأسی مانند D از آن چهارضلعی در داخل نیم‌دایره باشد، آن‌گاه CD را امتداد می‌دهیم تا محیط نیم‌دایره را در نقطه‌ای مانند E قطع کند. معلوم است که مساحت چهارضلعیِ $ABCD$ از مساحت چهارضلعیِ $ABCD$ بیشتر است.

گام دوم

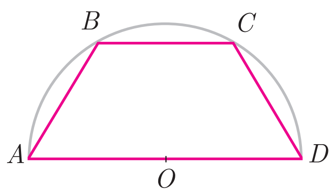
با در نظر گرفتن چهار رأس چهارضلعی بر روی محیط نیم‌دایره و با در نظر گرفتن نابرابریِ $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq ۳\sin(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳})$ برای زوایای α، β و γ با شرط $\alpha+\beta+\gamma \leq ۱۸۰^\circ$ (که به نامساوی ینسن معروف است) مسأله را حل کنید.

با فرض این‌که O مرکز نیم‌دایره باشد، با رسم شعاع‌های OA، OB، OC و OD خواهیم داشت:

$$S_{ABCD} \leq S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD}$$
$$= \frac{۱}{۲}r^۲.\sin\alpha + \frac{۱}{۲}r^۲.\sin\beta + \frac{۱}{۲}r^۲.\sin\gamma$$



$$= \frac{۱}{۲}[\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma]$$
$$\leq \frac{۱}{۲} \times ۳\sin(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳})$$
$$\leq \frac{۳}{۲}\sin(\frac{۱۸۰^\circ}{۳}) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$



حالت تساوی موقعی اتفاق می‌افتد که چهارضلعی به شکل مقابل ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی باشد که طول هر ساق آن ۱، طول قاعده‌ی کوچکش ۱ و طول قاعده‌ی بزرگش برابر ۲ باشد:

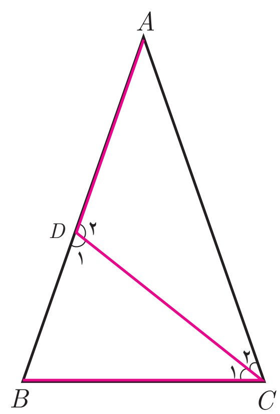
۶

راه‌حل اول:

گام اول

با تلاش بر روی زاویه‌های داخلی و خارجی مثلث‌ها، اندازه‌ی هر یک از زاویه‌های مثلث را بیابید.

اگر مقدار $\hat{C}_۱$ را برابر α در نظر بگیریم، آن‌گاه:



$$\angle C_۱ = \angle C_۲ \Rightarrow \angle C_۲ = \alpha$$
$$\angle B = \angle C \Rightarrow \angle B = ۲\alpha$$
$$\angle C_۲ = \angle A \Rightarrow \angle A = \alpha$$
$$\angle D_۲ = \angle C_۱ + \angle B = \alpha + ۲\alpha = ۳\alpha$$
$$\angle D_۱ = \angle B = ۲\alpha$$
$$\angle D_۱ + \angle D_۲ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha + ۳\alpha = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۵\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۶^\circ$$

گام دوم

با روابط مثلثاتی $\sin ۱۸^\circ$ را پیدا کرده و مسأله را حل کنید.

$$\sin ۳۶^\circ = \cos ۵۴^\circ \Rightarrow \sin[۲(۱۸^\circ)] = \cos[۳(۱۸^\circ)]$$

$$\Rightarrow\ ۲\sin ۱۸^\circ . \cos ۱۸^\circ = ۴\cos^۳ ۱۸^\circ - ۳\cos ۱۸^\circ$$

$$\Rightarrow\ ۲\sin ۱۸^\circ = ۴\cos^۲ ۱۸^\circ - ۳ = ۴(۱ - \sin^۲ ۱۸^\circ) - ۳$$

$$\Rightarrow\ ۴\sin^۲ ۱۸^\circ + ۲\sin ۱۸^\circ - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow\ \sin ۱۸^\circ = \frac{-۲ + \sqrt{۲۰}}{۸} = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}$$

در مسأله‌ی اصلی با رسم ارتفاع وارد بر قاعده مقدار زاویه‌ی $\hat{A}_۱$ برابر ۱۸° به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{۲BH}{AB} = ۲\sin ۱۸^\circ = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$$

راه‌حل دوم:

گام اول

قضیه نیمسازها را به یاد آورید و با نوشتن تناسب‌های مربوطه مسأله را حل کنید.

بدون آن‌که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود مقدار ساق مثلث ABC را برابر واحد در نظر گرفته و مقدار AD را برابر x و مقدار BD را برابر y در نظر می‌گیریم:

$$x + y = ۱ \qquad (۱)$$

$$CD = \text{نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{۱} \Rightarrow y = x^۲ \qquad (۲)$$

با استفاده از دو رابطه‌ی به‌دست آمده خواهیم داشت:

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۱ - x = x^۲ \Rightarrow x = \frac{-۱ + \sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{x}{۱} = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$$

۷

گام اول

شرط لازم و کافی برای آن‌که نمودارهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ با یکدیگر نقطه‌ی تلاقی نداشته باشد را بیان کنید.

شرط لازم و کافی برای چنین امری آن است که دستگاه زیر جواب نداشته باشد:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

به عبارت دیگر معادله‌ی $f(x) = g(x)$ در مجموعه اعداد حقیقی فاقد جواب باشد.

گام دوم

دستگاه مربوطه را تشکیل داده و پس از به‌دست آوردن معادله‌ی لازم، شرط لازم و کافی برای ریشه نداشتن معادله‌ای درجه ۲ در مجموعه اعداد حقیقی را بنویسید.

$$\begin{cases} y = x^۲ - ۲ax + ۱ \\ y = ۲ba - ۲bx \end{cases} \Rightarrow x^۲ - ۲ax + ۱ = ۲ba - ۲bx$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲(b-a)x + ۱ - ۲ab = ۰$$

معادله‌ی درجه دوم فوق باید فاقد ریشه باشد، در نتیجه مبین آن باید منفی باشد:

$$\Delta < ۰ \Rightarrow (b-a)^۲ - (۱ - ۲ab) < ۰ \Rightarrow a^۲ + b^۲ < ۱$$

می‌دانیم معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $O(۰,۰)$ و به شعاع ۱ می‌باشد. بنابراین مجموعه نقاط

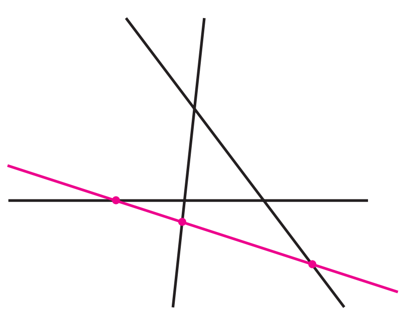
$$A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^۲ | a^۲ + b^۲ < ۱\}$$

مجموعه نقاط درون دایره‌ای به شعاع ۱ است که مساحت آن برابر با $\pi(۱)^۲$ یعنی π می‌باشد.

۸

گام اول

ابتدا فرض کنید ۳ خط دوبه‌دو متقاطعی در صفحه موجود باشد. می‌دانیم آن سه خط صفحه را به ۷ ناحیه تقسیم کرده است. استدلال کنید که با رسم خط چهارم که با هیچ‌یک از خطوط قبلی موازی نبوده و هیچ سه خطی همرس نباشند به تعداد نواحی قبلی چند ناحیه افزوده می‌شود.



خط چهارم سه خط قبلی را در سه نقطه قطع می‌کند و با هر نقطه‌ی تقاطعی یک ناحیه از ناحیه‌های قبلی به دو قسمت تقسیم می‌شود. باید دقت نمود که با نقطه‌ی تقاطع آخر یک ناحیه‌ی دیگر نیز به تعداد نواحی اضافه می‌شود، بنابراین:

$$a_۴ = a_۳ + (۳) + ۱ = ۷ + (۳) + ۱ = ۱۱$$

گام دوم

به نظر شما اگر a_k نشان‌گر تعداد نواحی حاصل از تقاطع k خط در یک صفحه باشد، با رسم خط $(k+۱)$ـاُم حداکثر چند ناحیه به نواحی قبلی اضافه می‌شود؟

با توجه به این‌که خط $(k+۱)$ـاَم خطوط قبلی را حداکثر در k نقطه قطع می‌کند و با توجه به استدلال گام قبلی معلوم می‌شود که حداکثر نواحی ایجاد شده برابر $a_k + k + ۱$ می‌باشد به عبارت دیگر رابطه‌ی $a_{k+۱} = a_k + k + ۱$ برقرار است.

گام سوم

اگر مجموعاً ۴ خط افقی و عمودی داشته باشیم در حالتی که دو تا از آن‌ها عمودی باشد و ۲ تا افقی، تعداد نواحی بیش‌تری خواهیم داشت و یا در حالتی که سه تا از آن‌ها عمودی و یکی افقی باشد؟

در حالت اول تعداد نواحی برابر ۹ و در حالت دوم تعداد نواحی برابر ۸ می‌باشد.

گام چهارم

با توجه به گام قبلی به نظر می‌رسد بیش‌ترین نواحی را موقعی خواهیم داشت که ۶ تا از خطوط عمودی، ۶ تا از آن‌ها افقی و ۶ تای دیگر موازی نیمساز ربع اول و سوم باشند. در این حالت تعداد نواحی ایجاد شده را به‌دست آورید.

۶ خط عمودی صفحه را به ۷ ناحیه تقسیم می‌کند.

هر یک از خطوط افقی هر یک از خطوط قبلی را در ۶ نقطه قطع می‌کنند، بنابراین با رسم خط اول ۷ ناحیه، با رسم خط دوم ۷ ناحیه‌ی دیگر، ...و بالاخره با رسم خط ششم نیز ۷ ناحیه به آن نواحی اضافه شده و با اضافه شدن ۷×۶ یعنی ۴۲ ناحیه به نواحی قبلی تعداد کل نواحی به ۴۹ می‌رسد.

هر یک از خطوط مورب را می‌توان چنان رسم کرد که اولاً هر ۱۲ خط قبلی را در ۱۲ نقطه قطع کرده و هیچ سه خطی همرس نباشند که در این‌صورت با رسم هر خط، به نواحی قبلی ۱۳ ناحیه اضافه می‌شود. بنابراین تعداد کلِ نواحیِ ایجاد شده برابر خواهد بود با:

$$? = ۴۹ + ۶ \times ۱۳ = ۴۹ + ۷۸ = ۱۲۷$$

گام پنجم

با توجه به نابرابری $m^۲ + n^۲ + k^۲ \geq \frac{(m+n+k)^۲}{۳}$ که آن را اثبات می‌کنید استدلال کنید که تعداد کل نواحی ایجاد شده نمی‌تواند از ۱۲۷ بیش‌تر باشد.

ابتدا نابرابری اشاره شده را اثبات می‌کنیم:

$$m^۲ + n^۲ + k^۲ \geq \frac{(m+n+k)^۲}{۳}$$

$$\Longleftrightarrow 3m^2 + 3n^2 + 3k^2 \geq m^2 + n^2 + k^2 + 2mn + 2mk + 2nk$$
$$\Longleftrightarrow m^2 - 2mn + n^2 + m^2 - 2mk + k^2 + n^2 - 2nk + k^2 \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow (m-n)^2 + (m-k)^2 + (n-k)^2 \geq 0$$

چون تمام روابط برگشت‌پذیر بوده و نابرابری آخر واضح است پس اثبات نابرابری، تمام است فقط باید دقت نمود که تساوی موقعی اتفاق می‌افتد که $m = n = k$.

اما برای استدلال دوم گام، فرض کنید که تعداد خطوط افقی، عمودی و مورب به‌ترتیب برابر m، n و k باشد در آن صورت حداکثر تعداد کل نواحی ایجاد شده برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} ? &= (m+1)(n+1) + (m+n+1)k \\ &= (m+n+k) + (mn+mk+nk) + 1 \\ &= (m+n+k) + \frac{(m+n+k)^2}{2} - \frac{(m^2+n^2+k^2)}{2} + 1 \end{aligned}$$

حال از نابرابری اشاره شده استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow ? &\leq (m+n+k) + \frac{(m+n+k)^2}{2} - \frac{(m+n+k)^2}{6} + 1 \\ &= 18 + 162 - 54 + 1 = 127 \end{aligned}$$

۹

گام اول

نقطه‌ای از مجموعه A و نقطه‌ی دیگری را از مجموعه‌ی B در نظر گرفته و با جاگذاری آن‌ها در رابطه گزینه و یا گزینه‌هایی را رد کنید.

$(0,0) \in A\ ,\ (1,0) \in B \Rightarrow\ (1,0) \in A \oplus B \Rightarrow$ [رد گزینه‌های الف و ج]

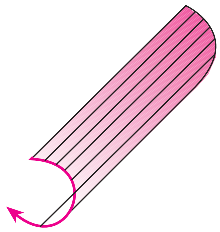
$(1,1) \in A\ ,\ (1,0) \in B \Rightarrow\ (2,1) \in A \oplus B \Rightarrow$ [رد گزینه‌ی ب]

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in A\ ,\ (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in B \Rightarrow\ (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in A \oplus B \Rightarrow$ [رد گزینه‌ی د]

گام دوم

عمل یاد شده در صورت مسأله را شبیه‌سازی کرده و مسأله را به‌صورت مستقیم و بدون رد گزینه حل کنید.

مسأله مانند آن است که دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات را با برداری در جهت نیمساز ربع اول بکشیم (انتقال دهیم) و یا تصور کنید که نیمساز کشیده شده در مجموعه‌ی A را با دایره‌ی موجود در مجموعه‌ی B دوران دهیم (شکل مقابل) معلوم است که شکل نهایی همانند شکل موجود در گزینه‌ی ه خواهد بود.



۱۰

گام اول

تصور کنید به شما گفته‌اند که دو پاره‌خط مساوی به طول d در صفحه بکشید تا نفر مقابل شما به دلخواه خود به آن دو پاره‌خط جهت داده و تبدیل به بردار کند. طرف مقابل می‌خواهد جهت‌ها را چنان انتخاب کند که برایند بردارها بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. در چه حالتی این برایند ماکزیمم و در چه حالی می‌نیمم خواهد بود؟

در حالتی که دو پاره‌خط در یک راستا باشند طرف مقابل با انتخاب جهت‌های یکسان برای آن دو پاره‌خط به برداری به طول $۲d$ خواهد رسید و در حالتی که دو پاره‌خط را عمود بر هم بکشید طول بردار برایند دو بردار به‌دست آمده برابر $\sqrt{۲}d$ خواهد شد.

گام دوم

با تصوری که در گام قبلی از معادل‌سازی بردار به‌دست آمد ثابت کنید جواب مسأله به‌ترتیب همان اعداد $۲d$ و $\sqrt{۲}d$ می‌باشد.

اگر دقت کنید $A \oplus B$ شامل مجموعه نقاطی است که از انتهای بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به‌دست می‌آید. $\vec{a}$ برداری دلخواه است که ابتدا و انتهای آن نقاطی از A باشد و $\vec{b}$ نیز برداری است که ابتدا و انتهایش در B باشد. معلوم است که بیش‌ترین مقدار $\vec{a} + \vec{b}$ برابر $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ است و آن موقعی است که آن دو بردار در یک راستا و جهت باشند که این مقدار برابر $۲d$ است و اما کم‌ترین طول برایند برای موقعی است که دو بردار بر هم عمود شوند (البته باید توجه داشت که زاویه‌ی بین دو بردار منفرجه نیست زیرا اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه باشد آن‌گاه زاویه‌ی بین بردار $\vec{a}$ و $(-\vec{b})$ حاده بوده و برایند بزرگ‌تری دارد). برایند دو بردار با طول d که بر هم عمودند برابر $\sqrt{۲}d$ می‌باشد.

۱۱

گام اول

تعدادی از اعضاء $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ را نوشته و پس از تجزیه‌ی آن اعضا به حاصل‌ضرب عوامل اول به مجموع توان‌های عوامل اول هر یک از آن اعضا توجه کنید.

$$A_۲ = \{\cdots, ۲^۱ \times ۳^۱, ۲^۱ \times ۵^۱, ۷^۲, \cdots\}$$
$$A_۳ = \{\cdots, ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵^۲, ۲^۲ \times ۳^۱ \times ۵^۱ \times ۷^۲, \cdots\}$$
$$A_۴ = \{\cdots, ۷^{۲۴}, ۵^{۱۱} \times ۱۳^۹ \times ۱۷^۴, \cdots\}$$

گام دوم

رابطه‌ای بین مجموع توان‌های عوامل اول هر یک از اعضاء A_k را بیابید.

مجموع توان‌های عوامل اول $A_۲$ برابر ۲ است.

مجموع توان‌های عوامل اول $A_۳$ برابر !۳ یعنی ۶ است زیرا هر یک از اعضاء $A_۳$ از حاصل‌ضرب ۳ تا از اعضاء $A_۲$ به‌دست می‌آید.

⋮

مجموع توان‌های عوامل اول A_k برابر $k!$ است.

در بین گزینه‌ها فقط مجموع توان‌های عوامل اول عدد $۲^{۱۱۱} \times ۳^۹$ برابر $n!$ است یعنی:

$$۱۱۱ + ۹ = ۱۲۰ = ۶!$$

۱۲

گام اول

معادله را بر حسب متغیر x مرتب کنید.

$$\frac{۱}{x} = \frac{a}{x+y} - \frac{۱}{y} \Rightarrow \frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = \frac{a}{x+y} \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{a}{x+y}$$
$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲xy = axy \Rightarrow x^۲ + (۲-a)yx + y^۲ = ۰$$

گام دوم

شرط وجود جواب برای معادله‌ی درجه دوم به‌دست آمده در مجموعه اعداد طبیعی را بررسی کنید.

یکی از شرایط لازم برای وجود جواب طبیعی برای x از معادله‌ی درجه دوم به‌دست آمده، آن است که مقدار مبین آن مربع کامل باشد:

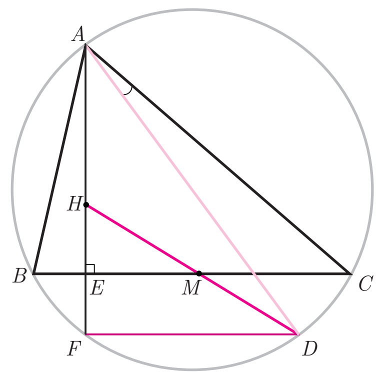
$$\Delta = k^۲ \Rightarrow [(۲-a)y]^۲ - ۴y^۲ = k^۲ \Rightarrow y^۲a(a-۴) = k^۲$$
$$\Rightarrow a(a-۴) = m^۲ \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ = m^۲ + ۴$$
$$\Rightarrow (a-۲)^۲ - m^۲ = ۴ \Rightarrow a = ۴ \ , \ m = ۰$$

به ازای $a = ۴$ برای x و y جواب‌های طبیعی‌ای مانند $x = y = ۱$ به‌دست می‌آید.

۱۳

گام اول

شکل را دقیق رسم کرده و گزینه‌های غلط را رد کنید.



با رسم دقیق شکل به نظر می‌رسد گزینه‌ی د درست باشد.

گام دوم

ببینید در روی شکل معروف‌ترین زاویه‌ای که با $\hat{B}$ متمم است کدام است و سپس تلاش کنید که ثابت کنید زاویه‌ی خواسته شده با آن برابر است.

معروف‌ترین زاویه‌ی متمم $\hat{B}$، زاویه‌ی $\angle BAE$ است:

$$\left.\begin{array}{l} HE = EF \\ HM = MD \end{array}\right\} \Rightarrow EM || FD \Rightarrow \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DC}$$
$$\Rightarrow \begin{array}{l} \angle BAE = \angle DAC \\ \angle BAE = ۹۰^\circ - \angle B \end{array} \Rightarrow \angle DAC = ۹۰^\circ - \angle B$$

البته در اثبات فوق از این نکته نیز استفاده شده است که قرینه‌ی مرکز ارتفاعیه‌ی مثلث نسبت به هر یک از اضلاع بر روی دایره‌ی محیطی مثلث قرار می‌گیرد.

۱۴

گام اول

برای f تابعی مانند $f(x)=۲x$ را مثال بزنید.

$$f(x)=۲x \Rightarrow h(x)=\frac{k.(۲x)}{۱-(۲x)}$$

حال $h^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{k.(۲x)}{۱-۲x} \Rightarrow y-۲xy=۲kx \Rightarrow x(۲k+۲y)=y$$

$$\Rightarrow x=\frac{y}{۲(k+y)} \Rightarrow h^{-۱}(x)=\frac{x}{۲(k+x)}$$

$$\frac{x}{f\circ h^{-۱}(x)}-x=\frac{x}{f(\frac{x}{۲(k+x)})}-x=\frac{x}{۲(\frac{x}{۲(k+x)})}-x=k$$

گام دوم

با الگوگیری از گام اول به حل مسأله بپردازید.

$h^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{k.f(x)}{۱-f(x)} \Rightarrow y-y.f(x)=k.f(x)$$

$$\Rightarrow y=(k+y).f(x) \Rightarrow f(x)=\frac{y}{k+y}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}\Big(f(x)\Big)=f^{-۱}\left(\frac{y}{k+y}\right) \Rightarrow x=f^{-۱}\left(\frac{y}{k+y}\right)$$

$$\Rightarrow h^{-۱}\Big(h(x)\Big)=f^{-۱}\left(\frac{y}{k+y}\right) \Rightarrow h^{-۱}(y)=f^{-۱}\left(\frac{y}{k+y}\right)$$

$$\Rightarrow h^{-۱}(x)=f^{-۱}\left(\frac{x}{k+x}\right)$$

$$\Rightarrow ?=\frac{x}{f\circ h^{-۱}(x)}-x=\frac{x}{f\left(f^{-۱}(\frac{x}{k+x})\right)}-x=\frac{x}{\frac{x}{k+x}}-x=k$$

۱۵

گام اول

ابتدا بررسی کنید که اگر کاغذ را ۲ یا ۳ و یا ۴ بار فقط تای عمودی بزنیم تعداد خطهای تا چقدر خواهد شد؟

با خط تای اول تعداد خط‌های تا برابر ۱ و تعداد لاهای کاغذ ۲ برابر می‌شود.

با خط تای دوم تعداد خط‌های تا برابر ۳ (در واقع روی هر یک از دو لای کاغذ دقیقاً یک تا اضافه می‌شود) و تعداد لاهای کاغذ برابر ۴ خواهد شد.

با خط تای سوم تعداد خط‌های تا برابر ۷ (در واقع روی هر یک از چهار لای کاغذ دقیقاً یک تا اضافه می‌شود) و تعداد لاهای کاغذ برابر ۸ خواهد شد.

و بالاخره با خط تای چهارم تعداد خط‌های تا برابر $۸ + ۷$ و تعداد لاهای کاغذ برابر ۸×۲ یعنی ۱۶ خواهد شد.

گام دوم

با الگوبرداری از گام قبلی با فرض این‌که کاغذ را m بار فقط در راستای عمودی تا کنیم تعداد خطهای عمودی را بیابید.

$$? = ۲^۰ + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + \cdots + ۲^{m-۱} = ۲^m - ۱$$

گام سوم

با فرض این‌که کاغذ را m بار در راستای عمودی و n بار در راستای افقی تا زده باشیم تعداد خطوط تا را پیدا کرده و معادله را حل کنید.

$$\text{تعداد تاهای عمودی} = ۲^m - ۱$$

$$\text{تعداد تاهای افقی} = ۲^n - ۱$$

$$\Rightarrow\ (۲^m - ۱) + (۲^n - ۱) = ۳۱۸\ \Rightarrow\ ۲^m + ۲^n = ۳۲۰$$

$$\Rightarrow\ ۲^m(۲^{n-m} + ۱) = ۲^۶ \times ۵\ \Rightarrow\ m = ۶\ ,\ n - m = ۲\ \Rightarrow\ n = ۸$$

۱۶

گام اول

ابتدا این سه مسأله را حل کنید:

I. مکان هندسی نقاطی از فضا که فاصله‌ی آن‌ها از یک صفحه برابر واحد باشد چیست؟

II. مکان هندسی نقاطی از فضا که فاصله‌ی آن‌ها از خط d برابر واحد باشد چیست؟

III. مکان هندسی نقاطی از فضا که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی O برابر واحد باشد چیست؟

I: دو صفحه به موازات صفحه‌ی داده شده و در طرفین آن صفحه که فاصله‌ی هر یک از آن‌ها از آن صفحه برابر واحد باشد.

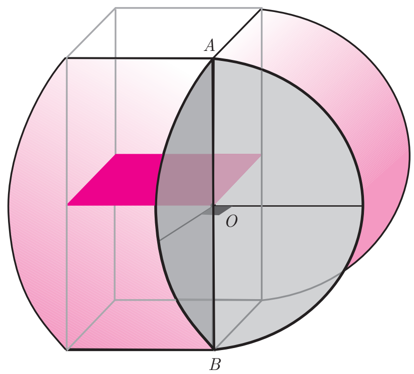
II: استوانه‌ای با شعاع قاعده‌ی واحد که خط داده شده محور آن باشد.

III: کره‌ای به مرکز O و شعاع واحد.

گام دوم

با استفاده از گام قبلی مکان هندسی‌های مورد اشاره را با هم‌دیگر تلاقی دهید و حجم جسم حاصل را بیابید.

در شکل زیر قسمتی از حجم موردنظر کشیده شده است.



حجم حاصل تشکیل شده است از:

I: دو مکعب که طول هر یک از یال‌های هر یک از آن‌ها برابر واحد باشد.

II: چهار نیم‌استوانه با ارتفاع واحد و طول شعاع قاعده‌ی واحد (که دو نمونه از آن در شکل رسم شده است).

III: چهار ربع کره با شعاع واحد (که یک نمونه از آن به مرکز O در شکل رسم شده است).

بنابراین جواب موردنظر به شکل زیر یافت می‌شود:

$$? = ۲ \times (۱ \times ۱ \times ۱) + ۴ \times \left(\frac{۱}{۲}\pi(۱)^۲ \times ۱\right) + ۴ \times \left(\frac{۱}{۴} \times \frac{۴}{۳}\pi(۱)^۳\right)$$
$$= ۲ + ۲\pi + \frac{۴}{۳}\pi = ۲(۱ + \frac{۵}{۳}\pi)$$

۱۷

گام اول

حداقل و حداکثر مقدار $S(n)$ را بیابید.

$$۱+۲+۳+\cdots+۷ \leq S(n) \leq ۳+۴+۵+\cdots+۹ \Rightarrow ۲۸ \leq S(n) \leq ۴۲$$

گام دوم

باقی‌مانده‌های تقسیم n و $S(n)$ بر ۹ را با هم مقایسه کنید.

چون $۱+۲+۳+\cdots+۹ = ۴۵$ و باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۹ باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹ می‌باشد بنابراین اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۹ برابر r باشد باقی‌مانده‌ی تقسیم $S(n)$ بر ۹ نیز برابر r بوده و باید داشته باشیم:

$$n+S(n) \overset{۹}{\equiv} (۱+۲+۳+\cdots+۹) \Rightarrow r+r \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow r \overset{۹}{\equiv} ۰$$

گام سوم

با توجه به دو گام قبلی $S(n)$ را پیدا کرده و از آن جا مسأله را حل کنید.

با قیاس دوگام قبلی معلوم می‌شود که $S(n) = ۳۶$ چون در بین اعداد ۲۸ و ۴۲ فقط عدد ۳۶ مضرب ۹ می‌باشد بنابراین هفت رقم متشکل n ارقام ۱، ۲، ۴، ۵، ۷، ۸ و ۹ می‌باشد که آن هفت رقم به !۷ یعنی ۵۰۴۰ طریق می‌توانند جای خود را با هم عوض کنند.

۱۸

گام اول

قیافه‌های دیگری از $۲a+۱$، $۳a+۲$، $۴a+۳$ و $۵a+۴$ را بنویسید.

می‌توان آن‌ها را به‌ترتیب به‌صورت $[۲(a+۱)-۱]$، $[۳(a+۱)-۱]$، $[۴(a+۱)-۱]$ و $[۵(a+۱)-۱]$ نیز نمایش داد.

گام دوم

عدد a را برابر ۹۰ در نظر گرفته و با اِعمال اَعمال چهارگانه‌ی فوق که با دلخواه خود از یکی دو بار استفاده می‌کنید، عدد نهایی را به‌دست آورده و نتیجه‌گیری نمایید.

$$a_۱ = [۲(۹۰+۱)-۱] = ۲\times ۹۱ - ۱$$

$$a_۲ = [۳(۲\times ۹۱-۱+۱)-۱] = ۳\times ۲\times ۹۱-۱$$

$$a_۳ = [۵(۳\times ۲\times ۹۱-۱+۱)-۱] = ۵\times ۳\times ۲\times ۹۱-۱$$

$$a_۴ = [۴(۵\times ۳\times ۲\times ۹۱-۱+۱)-۱] = ۴\times ۵\times ۳\times ۲\times ۹۱-۱$$

$$a_۵ = [۳(۴\times ۵\times ۳\times ۲\times ۹۱-۱+۱)-۱] = ۲^۱\times ۳^۲\times ۴^۱\times ۵^۱\times ۹۱-۱$$

همان‌طورکه معلوم است از عمل $3a+2$ دو بار استفاده شده است و عدد نهایی مستقل از ترتیب آن اعمال فقط به تعداد استفاده از آن چهار عمل بستگی دارد و اگر عدد اول t بوده و از آن چهار عمل به‌ترتیب α، β، γ و θ بار استفاده کنیم عدد نهایی به شکل $(2^\alpha \times 3^\beta \times 4^\gamma \times 5^\theta \times (t+1) - 1)$ خواهد شد.

گام سوم

با توجه به نتیجه‌گیری فوق گزینه‌ی موردنظر را پیدا کرده و بیان کنید برای تولید آن از هر عمل چند بار استفاده شده است؟

$$2^\alpha \times 3^\beta \times 4^\gamma \times 5^\theta \times (t+1) - 1 = 30^{1383} - 1$$
$$\Rightarrow\ 2^\alpha \times 3^\beta \times 4^\gamma \times 5^\theta \times (t+1) = 2^{1383} \times 3^{1383} \times 5^{1383}$$

همان‌طورکه مشخص است باید عدد $(t+1)$ عاملی خارج از مجموعه‌ی $\{2,3,5\}$ نداشته باشد. در بین گزینه‌ها فقط ۱۱ چنین است زیرا $11 + 1 = 2^2 \times 3^1$.

برای تولید $30^{1383} - 1$ از روی ۱۱، ۱۳۸۳ بار از عمل دوم، ۱۳۸۳ بار از عمل چهارم $(2k+1)$ بار از عمل اول و بالاخره $(690 - k)$ بار نیز از عمل سوم استفاده شده است.

۱۹

گام اول

با جاگذاری اعداد مناسب به جای x، از طریق رد گزینه جواب را پیدا کنید.

$$f_{1383}(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \cdots \sqrt{1 - \sqrt{1-x}}}} \qquad \text{(تعداد رادیکال‌ها ۱۳۸۳ تاست)}$$

عدد ۰ در دامنه است چون $f_{1383}(0) = 1$، بنابراین گزینه‌ی د رد می‌شود.

عدد ۱ در دامنه است چون $f_{1383}(1) = 0$، بنابراین گزینه‌های ج و هـ نیز رد می‌شوند.

عدد $\frac{1}{2}$ نیز در دامنه است چون $\sqrt{1-x}$، $\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$، ...همگی به ازای $x = \frac{1}{2}$ عددی بین ۰ و ۱ می‌باشد.

گام دوم

دامنه‌ی توابع f_1، f_2 و f_3 را به‌دست آورده و تعمیم دهید.

$$f_1(x) = \sqrt{1-x}\ ;\ 1 - x \geq 0 \ \Rightarrow\ x \leq 1$$
$$f_2(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x}}\ ;\ 1 - \sqrt{1-x} \geq 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{1-x} \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 - x \le 1 \Rightarrow x \ge 0$$

$$f_3(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}} \;;\; 1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}} \ge 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}} \le 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1 - x} \le 1$$

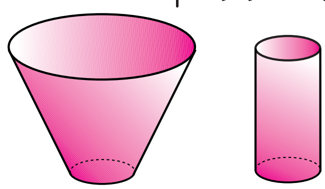
$$\Rightarrow \sqrt{1 - x} \ge 0 \checkmark$$

باید توجه کرد که در هر مرحله با فرض $0 \le x \le 1$ حاصل $\sqrt{1-x}$ عددی بین ۰ و ۱ شده و در نتیجه حاصل $1 - \sqrt{1-x}$ نیز عددی بین ۰ و ۱ خواهد شد و . . .

۲۰

گام اول

سعی کنید نمودار را برای ظروف زیر ترسیم کنید.



نمودار موجود در گزینه‌ی الف برای استوانه است و نمودار موجود در گزینه‌ی ج نیز برای ظرف دوم است.

گام دوم

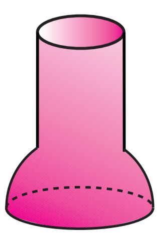
برای چه ظرفی امکان دارد در لحظه‌ای نمودار ارتفاع بر حسب زمان کاهشی باشد؟

چون در هر لحظه بر ارتفاع آب افزوده می‌شود بنابراین تابع اکیداً صعودی است و هرگز نمودار به‌صورت افقی و یا به‌صورت پایین نخواهد بود. بنابراین گزینه‌ی ه نیز رد می‌شود.

گام سوم

با توجه به گام‌های قبلی گزینه‌ی درست را مشخص کرده و ظروف متناظر به سایر گزینه‌ها را مشخص کنید.

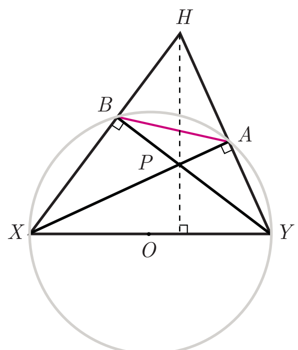
از بین گزینه‌های باقی‌مانده یعنی ب و د گزینه‌ی ب متناظر به ظرف داده شده می‌باشد و ظرف متناظر به گزینه‌ی د چنان است که از ارتفاعی به بعد شعاع ظرف یکسان بوده و شکلی تقریباً مشابه با شکل مقابل خواهد داشت.



۲۱

گام اول

محل برخورد ارتفاع‌های مثلث PXY را H نامیده و اندازه‌ی هر یک از زوایای P و H از چهارضلعی $PAHB$ را بیابید.



چون زاویه‌های XAY و XBY مقابل به قطر XY هستند، قائمه بوده و نقش ارتفاع‌های مثلث HXY را دارند. بنابراین امتداد HP بر XY عمود است. بنابراین H محل برخورد ارتفاع‌های مثلث PXY و P محل برخورد ارتفاع‌های مثلث HXY هستند. خواهیم داشت:

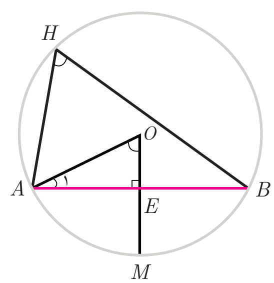
$$\angle BPA = \frac{۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ}{۲} = ۱۲۰^\circ$$

$$\angle BHA = \frac{۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$$

لازم به ذکر است که با تعویض جای دو نقطه‌ی X و Y، دو نقطه‌ی P و H نیز جای خود را با یکدیگر عوض خواهند کرد. به هر حال محاطی بودن چهارضلعی $PBHA$ قطعی است.

گام دوم

با توجه به محاطی شدن چهارضلعی $PBHA$ مکان هندسی نقطه‌ی خواسته شده را بیابید.



درگام قبلی معلوم شد که H بر روی دایره‌ای به قطر HP قرار دارد. دایره‌ی فوق دایره‌ای است که کمان حاوی ۶۰° بر روی پاره‌خط AB نامیده می‌شود. با توجه به این‌که مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است بنابراین طول پاره‌خط AB با طول OA یعنی ۱ برابر است، لذا کافی است شعاع دایره‌ی شکل مقابل را (که در مقیاس بزرگ‌تری نسبت به شکل قبلی رسم شده است) بیابیم:

$$\angle H = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AMB} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \angle O = \overset{\frown}{AM} = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow OE = \frac{OA}{۲}$$

$$OA^۲ = OE^۲ + AE^۲ \Rightarrow r^۲ = (\frac{r}{۲})^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow ۴r^۲ = r^۲ + ۱ \Rightarrow ۳r^۲ = ۱ \Rightarrow r = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۲

راه‌حل اول:

گام اول

به نظر شما چند عدد چهاررقمی اکیداً صعودی وجود دارد؟

به ازای هر انتخاب چهارتایی دلخواهی از مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ دقیقاً یک عدد چهاررقمی اکیداً صعودی تولید می‌شود، بنابراین تعداد آن‌ها برابر $\binom{۹}{۴}$ یعنی ۱۲۶ می‌شود. معلوم است که تعداد اعداد چهاررقمی اکیداً نزولی نیز برابر ۱۲۶ می‌شود.

گام دوم

اگر بخواهید بین اعداد اکیداً صعودی و اکیداً نزولی تناظر یک‌به‌یک برقرار کنید به عدد ۱۴۷۸ از مجموعه‌ی اول چه عددی از مجموعه‌ی دوم را متناظر می‌کنید و در حالت کلی به عدد $\overline{xyzt}$ چه عددی از مجموعه‌ی دوم را پیشنهاد می‌کنید؟

ممکن است شما به عدد ۱۴۷۸ عدد ۸۷۴۱ را پیشنهاد کنید. این تناظر اشکالی ندارد ولی پیشنهاد ما آن است که به آن عدد، عدد ۹۶۳۲ و به عدد $\overline{xyzt}$ عدد $\overline{(۱۰-x)(۱۰-y)(۱۰-z)(۱۰-t)}$ را متناظر کنید.

گام سوم

مجموع هر جفت از اعداد متناظر شده را یافته و جواب مسأله را بیابید.

$$۱۴۷۸ + ۹۶۳۲ = ۱۱۱۱۰$$

$$\overline{xyzt} + \overline{(۱۰-x)(۱۰-y)(۱۰-z)(۱۰-t)} = ۱۱۱۱۰$$

$$\Rightarrow ? = \binom{۹}{۴} \times ۱۱۱۱۰ = ۱۳۹۹۸۶۰$$

گام دوم

در اعداد اکیداً صعودی هر یک از ارقام ۹گانه چند بار در رقم هزارگان ظاهر می‌شوند؟ در اعداد اکیداً نزولی چطور؟

اگر در اعداد اکیداً صعودی رقم ۱ در جایگاه هزارگان باشد سه رقم دیگر به $\binom{۸}{۳}$ یعنی ۵۶ طریق چیده‌شدنی هستند. بنابراین در اعداد اکیداً صعودی تعداد اعدادی که رقم هزارگان ۱، ۲، ۳ و ...دارند به‌ترتیب به شکل زیر می‌باشد:

$$۱ \rightarrow \binom{۸}{۳} = ۵۶ \quad ; \quad ۲ \rightarrow \binom{۷}{۳} = ۳۵ \quad ; \quad ۳ \rightarrow \binom{۶}{۳} = ۲۰$$
$$۴ \rightarrow \binom{۵}{۳} = ۱۰ \quad ; \quad ۵ \rightarrow \binom{۴}{۳} = ۴ \quad ; \quad ۶ \rightarrow \binom{۳}{۳} = ۱$$

معلوم است که ارقام ۷، ۸ و ۹ هرگز در جایگاه هزارگان قرار نمی‌گیرند. برای اعداد اکیداً نزولی نیز جدول فوق به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$۹ \rightarrow ۵۶ \quad ; \quad ۸ \rightarrow ۳۵ \quad ; \quad ۷ \rightarrow ۲۰$$
$$۶ \rightarrow ۱۰ \quad ; \quad ۵ \rightarrow ۴ \quad ; \quad ۴ \rightarrow ۱$$

گام سوم

مجموع همه‌ی آن اعداد بدون در نظر گرفتن ارقام یکان، دهگان و صدگانشان چقدر می‌شود؟

$$\begin{aligned} ? &= [۵۶(۱+۹) + ۳۵(۲+۸) + ۲۰(۳+۷) + ۱۰(۴+۶) \\ &\qquad + ۴(۵+۵) + ۱(۶+۴)] \times ۱۰۰۰ \\ &= ۱۲۶۰۰۰۰ \end{aligned}$$

گام چهارم

الگویی همانند الگوی موجود در گام دوم برای ارقام صدگان، دهگان و یکان نیز ارائه کرده و مسأله را حل کنید.

الگوی رقم یکان همانند رقم هزارگان بوده و مجموع ارقام یکان آن ۲۵۲ عدد برابر $۱۰ \times [۱ + ۴ + ۱۰ + ۲۰ + ۳۵ + ۵۶]$ یعنی ۲۱۰ می‌شود.

الگوی مربوط به رقم دهگان در اعداد اکیداً صعودی به شکل زیر می‌باشد:

$$۲ \to \binom{۷}{۲}\binom{۱}{۱} = ۲۱ \quad ; \quad ۳ \to \binom{۶}{۲}\binom{۲}{۱} = ۳۰ \quad ; \quad ۴ \to \binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱} = ۳۰$$
$$۵ \to \binom{۴}{۲}\binom{۴}{۱} = ۲۴ \quad ; \quad ۶ \to \binom{۳}{۲}\binom{۵}{۱} = ۱۵ \quad ; \quad ۷ \to \binom{۲}{۲}\binom{۶}{۱} = ۶$$

و با در نظر گرفتن الگویی مشابه برای اعداد اکیداً نزولی مجموع جایگاه‌های دهگان آن ۲۵۲ عدد برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} ? &= [۲۱(۲+۸)+۳۰(۳+۷)+۳۰(۴+۶)+۲۴(۵+۵) \\ &\quad +۱۵(۶+۴)+۶(۷+۳)] \times ۱۰ \\ &= ۱۲۶۰۰ \end{aligned}$$

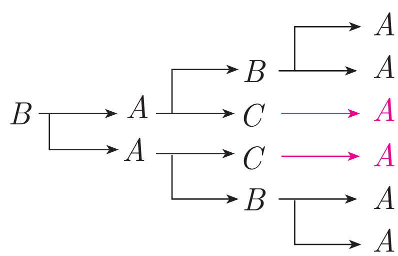
به همین ترتیب مجموع جایگاه‌های صدگان نیز برابر ۱۲۶۰۰۰ به‌دست می‌آید.
بنابراین جواب موردنظر برابر ۱۲۶۰ + ۱۲۶۰۰ + ۱۲۶۰۰۰ + ۱۲۶۰۰۰۰ یعنی ۱۳۹۹۸۶۰ می‌باشد.

۲۳

گام اول

اتفاقی که بعد از گذشت ۱۰۰ دقیقه اتفاق می‌افتد را پیشگویی کنید و نمودار آن اتفاقات را تا انتهای دقیقه‌ی ۶۰ رسم کنید.

نمودار اتفاقات بعد از گذشت ۶۰ دقیقه به شکل زیر می‌باشد که در آن فقط دو گلبول قرمز خورده شده است (آن قسمت به شکل رنگی نمایش داده شده است).



در ستون دوم (بعد از گذشت ۲۰ دقیقه) ۲ تا A وجود دارد که باعث شده است تا در ستون چهارم (بعد از گذشت ۶۰ دقیقه) ۶ تا A ایجاد شود همین روند باعث می‌شود که پیش‌بینی کنیم در ستون ششم (یعنی بعد از گذشت ۱۰۰ دقیقه) ۱۸ تا A ایجاد شود که در تولید ثلث آن‌ها یعنی ۶تایشان گلبول خورده می‌شود.

گام دوم

الگوی اشاره شده در گام قبلی را تعمیم داده و مسأله را حل کنید.

خورده شدن گلبول‌ها در انتهای دقایق ۶۰، ۱۰۰، ۱۴۰، ...، $۴۰k + ۲۰$، ... از قانون زیر پیروی می‌کند:

$$۶۰ \rightarrow ۲ \quad ; \quad ۱۰۰ \rightarrow ۶ \quad ; \quad ۱۴۰ \rightarrow ۱۸$$
$$\cdots \quad ; \quad (۴۰k + ۲۰) \rightarrow ۲ \times ۳^{k-۱} \quad ; \quad \cdots$$

بنابراین بعد از گذشت ۱۰ ساعت یعنی ۶۰۰ دقیقه تعداد گلبول‌های قرمز خورده شده برابر خواهد بود با:

$$? = (۲ \times ۳^{۰}) + (۲ \times ۳^{۱}) + (۲ \times ۳^{۲}) + \cdots + (۲ \times ۳^{۱۳})$$
$$= ۲ \times \frac{۳^{۱۴} - ۱}{۳ - ۱} = ۳^{۱۴} - ۱ = ۴۷۸۲۹۶۸$$

۲۴

گام اول

از معادله‌ی دوم حاصل $A^{۶}$ را پیدا کنید.

$$A^{۲} - A + I = \overline{0} \Rightarrow A^{۲} = A - I \Rightarrow A^{۳} = A^{۲} - A$$
$$\Rightarrow A^{۳} = (A - I) - A = -I \Rightarrow A^{۶} = (A^{۳})^{۲} = (-I)^{۲} = I$$

گام دوم

با توجه به مقدار به‌دست آمده برای $A^{۶}$، معادله‌ی اول را ساده کنید.

$$۲A^{۶} + ۲A^{۲} + A + B = \overline{0} \Rightarrow ۲I + ۲(A - I) + A + B = \overline{0}$$
$$\Rightarrow ۳A + B = \overline{0}$$

۲۵

گام اول

ابتدا بررسی کنید که آیا آن رنگ‌آمیزی با ۲ رنگ ممکن است یا نه؟

معلوم است که چنین چیزی ناممکن است زیرا اگر اعداد فرد را با قرمز و اعداد زوج را آبی رنگ کنیم آن‌گاه دو عدد ۱ و ۱۸۸ ناهمرنگ بوده و باقی‌مانده‌ی آن‌ها هم در تقسیم بر ۱۱ یکسان است و هم در تقسیم بر ۱۷.

گام دوم

اگر تعداد رنگ‌ها از ۲ به ۳ افزایش یابد آیا مشکل ایجاد شده در گام اول قابل حل است یا نه؟

اگر رنگ زرد هم به دو رنگ قبلی اضافه شود آن‌گاه مشکل ایجاد شده کاملاً قابل حل می‌شود. کافی است اعداد طبیعی را در مجموعه‌های ۱۸۷تایی به شکل زیر تقسیم‌بندی کنیم:

$$\begin{array}{lll} A_۱ = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۸۷\} & ; & A_۲ = \{۱۸۸, ۱۸۹, ۱۹۰, \cdots, ۳۷۴\} \\ A_۳ = \{۳۷۵, ۳۷۶, ۳۷۷, \cdots, ۵۶۱\} & ; & A_۴ = \{۵۶۲, ۵۶۳, ۵۶۴, \cdots, ۷۴۸\} \\ \vdots & & \end{array}$$

اعداد آخر هر یک از آن مجموعه‌ها را زردرنگ کنید.

اعداد فرد موجود در هر یک از $A_{۲i+۱}$ها را آبی و اعداد زوج موجود در آن‌ها را قرمز رنگ کنید.

و بالاخره اعداد زوج موجود در هر یک از $A_{۲i}$ها را آبی و اعداد فرد موجود در آن‌ها را آبی رنگ کنید.

معلوم است که رنگ‌آمیزی فوق تمام خواسته‌های مسأله را برآورده می‌کند.

۲۶

گام اول

ابتدا استدلال کنید که معادله در مجموعه اعداد $x > ۳$ و $x < -۳$ فاقد جواب است.

همان‌طور که معلوم است سمت راست تساوی هرگز بزرگ‌تر از ۲ و کوچک‌تر از ۲− نمی‌شود در حالی که اگر مقدار x را بیش از ۳ و یا کم‌تر از ۳− قرار دهیم سمت چپ تساوی به‌ترتیب بزرگ‌تر از ۲ و کوچک‌تر از ۲− خواهد بود.

گام دوم

با انتخاب بازه‌های مناسب و با رسم دقیق منحنی‌های $y = x$ و $y = ۳\sin x$ در یک دستگاه مختصاتی تعداد جواب‌های معادله را بیابید.

در بازه‌ی $[-۳, ۳]$ نقاط حساس برای $\sin x$ نقاط $\frac{\pi}{۲}$ و ۰ و برای $\frac{x}{۳}$ نقاط ۳−، ۰ و ۳ می‌باشد. منظور از نقاط حساس نقاطی است که در آن نقاط جزء صحیح توابع داده شده تغییر می‌کند:

I:

$$x = -۳ \Rightarrow [\frac{x}{۳}] = -۱ \;,\; [\sin x] = [\sin(-۳)] = -۱$$

$$\Rightarrow \text{معادله} : \frac{-۳}{۳} + (-۱) = \sin(-۳) - ۱$$

$$\Rightarrow -۱ = \sin(-۳)$$

تساوی به‌دست آمده نادرست است به این معنا که $x = -۳$ جوابی از معادله نمی‌باشد. لازم به ذکر است که $\frac{-\pi}{۲} < -۳ < -\pi$ و در نتیجه $-۱ < \sin(-۳) < ۰$.

II:

$$-۳ < x < ۰ \Rightarrow [\frac{x}{۳}] = -۱ \;\; , \;\; [\sin x] = -۱$$
$$\Rightarrow \text{معادله} \; : \; \frac{x}{۳} - ۱ = \sin x - ۱$$
$$\Rightarrow x = ۳ \sin x$$

معادله‌ی فوق با توجه به نمودار کشیده شده در انتهای جواب، در بازه‌ی مورد اشاره فقط یک جواب دارد (حدوداً $x = -۲/۴$).

III:

$$۰ \leq x < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow [\frac{x}{۳}] = ۰ \;\; , \;\; [\sin x] = ۰$$
$$\Rightarrow \text{معادله} \; : \; \frac{x}{۳} = \sin x \Rightarrow x = ۳ \sin x$$

باز با توجه به نمودار موجود در انتهای جواب معلوم است که معادله‌ی فوق در بازه‌ی $[۰, \frac{\pi}{۲})$ فقط یک جواب دارد ($x = ۰$).

IV:

$$x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{\pi}{۶} - ۰ = \sin \frac{\pi}{۲} + [\sin \frac{\pi}{۲}] = ۲$$

تساوی فوق برقرار نیست به این معنا که $\frac{\pi}{۲}$ ریشه‌ای از معادله نمی‌باشد.

V:

$$\frac{\pi}{۲} < x < ۳ \Rightarrow [\frac{x}{۳}] = ۰ \;\; , \;\; [\sin x] = ۰$$
$$\Rightarrow \text{معادله} \; : \; \frac{x}{۳} = \sin x \Rightarrow x = ۳ \sin x$$

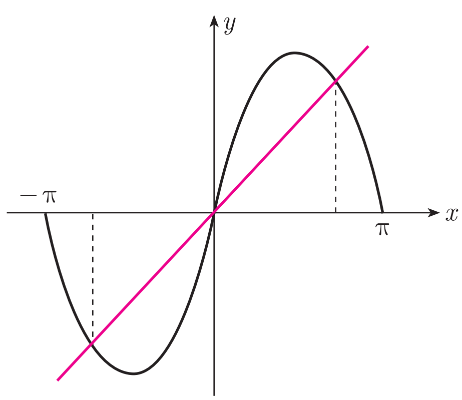
معادله‌ی به‌دست آمده همان معادله‌ی بالاست. باز به نمودار توجه کرده و دقت کنید که در بازه‌ی مورد اشاره دو منحنی $y = x$ و $y = ۳ \sin x$ فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند (حدوداً $x = ۲/۴$)

VI:

$$x = ۳ \Rightarrow \frac{۳}{۳} + [\frac{۳}{۳}] = \sin(۳) + [\sin(۳)]$$
$$\Rightarrow ۲ = \sin(۳)$$

تساوی به‌دست آمده نادرست است به این معنا که عدد ۳ ریشه‌ای از معادله نمی‌باشد.

بنابراین معادله داده شده فقط سه جواب حقیقی دارد.

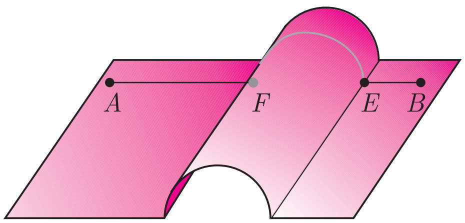


۲۷

گام اول و آخر (!)

مانع نیم‌استوانه را باز کرده و مسطح کنید و ببینید طول ضلع AB چه تغییر می‌کند؟

اگر نیم‌استوانه را باز کرده و مسطح کنیم از طول AB طول پاره‌خط EF کم شده و طول کمان $\overset{\frown}{EF}$ اضافه می‌شود. چون شعاع قاعده‌ی نیم‌استوانه واحد است بنابراین طول پاره‌خط EF برابر ۲ و طول کمان $\overset{\frown}{EF}$ برابر $\frac{2\pi}{2}$ یعنی π می‌باشد. بنابراین



$$AB_{\text{جدید}} = AB_{\text{قدیم}} - 2 + \pi$$
$$= (10 - \pi) - 2 + \pi = 8$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ایجاد شده طول وتر AC که همان جواب مطلوب است برابر $\sqrt{8^2 + 6^2}$ یعنی ۱۰ به‌دست می‌آید.

۲۸

گام اول و آخر (!)

ابتدا توجه کنید که بردار دوم قرینه‌ی بردار اول و بردار چهارم قرینه‌ی بردار سوم می‌باشد. بنابراین k بار استفاده از بردار اول و k' بار استفاده از بردار دوم همانند آن است که از بردار اول $(k - k')$ بار استفاده کرده باشیم. بنابراین بدون آن‌که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود فرض کنید p بار از بردار اول و q بار از بردار سوم استفاده کرده باشیم و برآیند حاصل را بررسی کنید.

$$p.(m,n) + q.(n+1, m+1) = (a,b)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} pm + qn + q = a \\ pn + qm + q = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pmn + qn^2 + qn = an \\ pmn + qm^2 + qm = bm \end{cases}$$
$$\Rightarrow q(m^2 - n^2) + q(m-n) = bm - an$$
$$\Rightarrow q = \frac{bm - an}{(m-n)(m+n+1)} \in \mathbb{Z}$$

قرار است به هر نقطه‌ی دلخواهی از صفحه برسیم. به عنوان مثال اگر $a = b$ باشد آن‌گاه $q = \frac{۱}{m+n+۱}$ که عدد فوق هرگز به غیر از $m = n = ۰$ عددی صحیح نخواهد شد.

۲۹

گام اول

فرض کنید باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x^۲)$ بر $f(x)$ برابر $R(x)$ باشد، رابطه‌ی مربوطه را بنویسید.

$$f(x^{۱۲}) = f(x).Q(x) + R(x)$$
$$\Rightarrow\ f(x^{۱۲}) = (x^۵ + x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱).Q(x) + R(x)$$

گام دوم

به چه صورت می‌توان عبارت $f(x)$ را با نگارشی ساده‌تر نمایش داد.

معلوم است که می‌توان طرفین تساوی را در $(x-۱)$ ضرب کرد، خواهیم داشت:

$$(x-۱).f(x^{۱۲}) = (x-۱)(x^۵ + x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱).Q(x) + (x-۱).R(x)$$
$$\Rightarrow\ (x-۱).f(x^{۱۲}) = (x^۶-۱).Q(x) + (x-۱).R(x)$$

با توجه به این که عبارت به‌دست آمده اتحاد است می‌توان به جای x هر عددی قرار داد، به عنوان مثال به جای $x^۶$ عدد ۱ را قرار می‌دهیم:

$$(x-۱).f\Big((x^۶)^۲\Big) = (۱-۱)\times Q(x) + (x-۱).R(x)$$
$$\Rightarrow\ (x-۱).f(۱) = (x-۱).R(x)\ \Rightarrow\ R(x) = f(۱) = ۶$$

۳۰

گام اول

وضعیت اول را ۱۱۱ و دومی را ۲۱۱ نمایش داده و سعی کنید رنگ چراغ در وضعیت‌های ۳۲۲ و ۳۳۳ را حدس بزنید.

$$\left.\begin{array}{l}\text{قرمز} = ۱۱۱ \Rightarrow (\text{مخالف قرمز}) = ۳۲۲ \\ \text{سبز} = ۲۱۱ \Rightarrow (\text{مخالف سبز}) = ۳۲۲\end{array}\right\} \Rightarrow \text{زرد} = ۳۲۲$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{قرمز} = ۱۱۱ \Rightarrow (\text{مخالف قرمز}) = ۳۳۳ \\ \text{سبز} = ۲۱۱ \Rightarrow (\text{مخالف سبز}) = ۳۳۳\end{array}\right\} \Rightarrow \text{زرد} = ۳۳۳$$

گام دوم

سعی کنید ترکیب‌های دیگری از ارقام ۱، ۲ و ۳ را نوشته و در نهایت رنگ معادل ۲۲۱ را بیابید.

$$\text{قرمز} = ۱۳۳ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{(مخالف زرد)} = ۱۳۳ \Rightarrow \text{زرد} = ۳۲۲ \\ \text{(مخالف سبز)} = ۱۳۳ \Rightarrow \text{سبز} = ۲۱۱ \end{array}\right.$$

$$\text{سبز} = ۲۲۱ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{(مخالف قرمز)} = ۲۲۱ \Rightarrow \text{قرمز} = ۱۳۳ \\ \text{(مخالف زرد)} = ۲۲۱ \Rightarrow \text{زرد} = ۳۳۳ \end{array}\right.$$