



الکتریسیته و مغناطیس (۱)

برای داوطلبان المپیاد فیزیک



مؤلفان:

فرینا ساعتی - بردیا نجاری - شهروز زربافیان



انتشارات خوشخون

بی‌تگفتار ناتر

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده‌ای را در بارور کردن و شکفتن استعدادهای دانش‌آموزان ایفا می‌کنند و باید به جرأت ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقاط جهان را تا حد زیادی افزایش دهند.

کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند. لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی، خلأ موجود مخصوصاً برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود. در همین راستا انتشارات خوشخوان با استعانت از حضرت حق تعالی و به کمک تنی چند از اساتید و دبیران ممتاز ایران و نیز فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف که اغلب آنان در زمانی نه چندان دور، مدال‌آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده‌اند، کتاب‌هایی را تألیف و به دانش‌آموزان ارائه می‌نماید. در همین راستا برای داوطلبان المپیاد فیزیک مجموعه کتبی نگارش و به چاپ رسیده است (و یا خواهد رسید) که کتاب حاضر نمونه‌ای از آن می‌باشد. مدیریت و بازرنگری این مجموعه کتب را جناب آقای مدنی به عهده دارند که تقدیر و تشکر به عمل می‌آید. همچنین مؤلفان گرامی تلاش بی‌وقفه‌ای داشتند تا این اثر با قلمی شیوا و عاری از هرگونه عیب به چاپ رسد که تلاش آن دوستان نیز به ما دلگرمی می‌داد، خدا اجرشان دهد. در انتها نیز جا دارد از پرسنل زحمت‌کش در امر چاپ مخصوصاً گروه حروفچینی که متقبل زحمت فراوانی شدند قدردانی به عمل آید.

امیدوارم ضعف‌ها و عیوب ما را از طریق نامه و یا ایمیل به اطلاع برسانید تا تلاش کنیم تا در چاپ‌های بعد در صدد رفع آن نواقص باشیم.

رسول حاجی‌زاده

مدیر انتشارات خوشخوان

والسلام علی من اتبع الهدی



دانش‌آموزان عزیز (و بعضاً تمام اقشار دیگری که ممکن است به هر نحوی گذارشان به این متن بیفتد) سلام؛

رسم است و نه تنها رسم است بلکه منطقی هم هست که در ابتدای چنین نوشته‌ای (در مقام مقدمه مؤلف) هدف یا اهداف نویسنده یا نویسندگان کتاب از نگارش متن، به خواننده عرضه شود و بعد از آن مؤلف سراغ مباحث دیگر می‌رود.

به صورت ابتدایی، آنچه واضح است، هدف گروه مؤلف کتابی که پیش رو دارید، پس از کسب اندکی از حطام دنیا آماده‌سازی دانش‌آموزان مقطع دبیرستان برای ورود به دوره المپیاد فیزیک از سطح مقدماتی (اطلاعات پایه دبیرستان) تا سطح پیشرفته (معروف به دوره تابستانی یا کشوری) است. در اینجا با توجه به پیوند جدایی‌ناپذیر مفاهیم فیزیکی از بیان و مفاهیم ریاضی، معرفی مختصری از مفاهیم ریاضی هم لاجرم لازم بوده است.

سعی بر این بوده تا در هنگام نگارش متن با استمداد و نگاه‌های پیاپی به متون معتبر مرتبط با زمینه متن، هم اعتبار علمی متن مورد ارزیابی قرار بگیرد و هم نحوه بیان مطالب و روند آموزشی آن از ساختاری منطقی برخوردار شوند.

مجلدی که در دست دارید شامل مباحث الکتروسیسته ساکن است. برای این‌که دورنمای کلی از مباحث داشته باشید، به نیت اگر نمی‌دانید بدانید که الکتروسیسته ساکن به مباحث پیرامون آثاری که بارهای الکتریکی ساکن یا متحرک با سرعت‌های پایین بر فضای اطراف یا بردارهای دیگر می‌گذارند می‌پردازد. این مباحث در کنار مگنتواستاتیک (یا مغناطیس ساکن که ترجمه بسیار ناهنجاریست) قسمت اول از دو قسمت اصلی و پایه مبحث الکترودینامیک است که در حالت عمومی به بررسی تأثیر پدیده الکترومغناطیس (به عنوان یک هویت یگانه و نه متشکل از دو جزء الکتروسیسته و مغناطیس) بر فضای اطراف (و در سطوح بالا بر زمان و یا فضا زمان و...) می‌پردازد. همچنین پیشنهاد می‌کنیم قبل از شروع مباحث درسی این کتاب و کتاب مشابه، سعی کنید اطلاعات کلی در زمینه تاریخ مباحثی که قرار است مطالعه کنید به دست آورید. این کار به شما کمکی برای پذیرفته شدن در آزمون‌ها نمی‌کند ولی حداقل مطالعه مباحث علمی را لذت‌بخش‌تر می‌کند! در مورد ساختار کتاب هم به اختصار می‌توان چنین گفت:

کتاب همان‌طور که در فهرست خواهید دید شامل سه فصل، میدان الکتریکی، قانون گاوس و پتانسیل الکتریکی است.

در هر فصل ابتدا درسنامه ارائه شده است، در لابه‌لای درس، قسمت‌های کوتاه آموزشی ریاضی آورده شده است، این مباحث برای درک مطالب کتاب کفایت می‌کنند (ان‌شاءالله) اما در هر زمینه‌ای که احساس کردید اطلاعات ارائه شده کافی یا مناسب نیست می‌توانید به کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال مراجعه کنید. همچنین کتاب‌های آموزش ریاضی سال‌های سوم و چهارم دبیرستان هم می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرند.

سعی شده مثال به تعداد کافی در متن گنجانده شود. مثل تمام متون علمی دارای مثال، پیشنهاد ما این است که ابتدا سعی کنید مثال‌های درسی را خودتان حل کنید و بعد به سراغ حل بروید.

برای پیوستگی مطالب سعی شده است تا تمام مطالب مرتبط با يك موضوع، یکجا آورده شوند. در حالی که لزوماً تمام مباحث مطروحه در کتاب در تمام مراحل آزمون‌های المپیاد استفاده نمی‌شوند. بنابراین قبل از خواندن کل فصل در نظر داشته باشید که مباحثی را که در آزمون به کار شما می‌آید شناسایی کنید، با توجه به متغیر بودن حدود مباحث در سال‌های مختلف، تعیین حد و حدود به صورت یکجا و در کتاب معقول نیست. پس از پایان درسنامه تعدادی مثال حل شده آورده شده است. مثل قبل، افضل آن است که اول خودتان سعی کنید مثال‌ها را حل کنید. پس از مثال‌های حل شده، مجموعه تمرین‌ها با جواب آخر هستند و پس از آنها سؤالات دوره‌های المپیاد به ترتیب آزمون اول، آزمون دوم و سؤالات دوره تابستانی آورده شده‌اند. در هر کدام از این زیربخش‌ها هم سؤالات به ترتیب سال مرتب شده‌اند - از قدیم به جدید. تا اینجا حرف از چیزهایی بود که گروه مؤلف می‌دانست؛ گرچه قسمت عمده آن به مباحثی می‌پرداخت که بیشتر در حیطه کاری ناشر محترم است (می‌دانید که این کتاب جزوی از يك مجموعه کتاب آموزشی است)؛ اما چیزی که تا حدی بر ما و احتمالاً (و صرفاً احتمالاً) تا حد بیشتری بر شما پوشیده است و در هاله‌ای از ابهام، هدف نهایی نگارش چنین مجموعه‌ای است به هر حال، چه باور کنید و چه نکنید (که البته امیدواریم باور بکنید) چشم‌انداز مالی حوزه نشر و خصوصاً نگارش کتاب‌هایی با مخاطبان خاص، مثل کتاب‌های المپیاد کشتی چندانی ندارد، حداقل برای گروه مؤلف این کتاب که اینطور بوده است. در وضعیتی که برآورد ما (صرفاً به عنوان سه دانشجوی کارشناسی که نه اقتصاد می‌دانند و نه تجربه کار در بازار کار را دارند ...) این است که ...

بگذارید طور دیگری مطلب را بگوییم، نگاهی به تبلیغات اعم از رادیویی، تلویزیونی، اینترنتی و مکانیکی (تراکت، بیل‌بورد، ...) که در زمینه آموزشی هستند بکنید. کتاب‌هایی که به مخاطب کمک می‌کنند که در آزمون‌های ورودی مهدکودک، دبستان، راهنمایی، ... تا فوق‌دکتر پذیرفته شوند. خوب که از تنوع این کتاب‌های «متفاوت» سیر شدید، سعی کنید دنبال تبلیغاتی بگردید که در آنها سخنی به میان آمده باشد از نشری، مؤسسه‌ای، حلقه مطالعاتی، کتابخانه تخصصی یا هر چیز دیگر (حتی رستورانی ...) که هدفگذاری‌اش کمک به شما باشد برای بهبود کیفیت آموزشی در مقطعی که هستید، خواه در حال مهارت‌آموزی باشید و خواه در حوزه علوم نظری ...

این است که ما خیلی هدفمان را درست و درمان نمی‌دانیم؛ نمی‌دانیم که با نگارش این کتاب ما هم وارد چرخه بازتولید کاذب دانش‌آموزان و دانشجویانی که پرورش می‌یابند تا صرفاً در سال‌های بعد دانش‌آموزان و دانشجویان دیگری را درس بدهند. وارد شده‌ایم، یا به دانش‌آموزان کمک می‌کنیم تا وارد دانشگاه بشوند تا در آینده کالاهای ساخته شده در اقصی نقاط عالم را جابه‌جا کنید یا ... اولین قدم ناخودآگاه ما برای حذر از حضور در این سناریوی ناخوشایند فرار با تمام قوا از حیطه کار کتاب‌ها و آموزش‌های کنکور، کلاس‌های تست و ... است.

چیزی که ما را دلگرم می‌کرد که تا حدی از این ماجرا دوریم، این بود که ناشر محترم (که می‌شوند آقای حاجی‌زاده) در چند مرحله تذکر دادند که فکر کنید جامعه هدف کتاب کسانی هستند که در نقاط غیرمرکزی کشور با امکانات نه چندان انبوه آموزش المپیاد برای ورود به دوره‌ها تلاش می‌کنند.

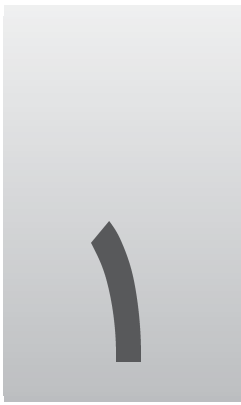
نمی‌دانم چقدر کل این مطالب منسجم از آب درآمد.
اگر هم آن را دوباره بخوانیم قصد ندارم تغییری در آن بدهم - می‌توانید آن را به مثابه يك اثر از سبك جريان سیال ذهن بخوانید.
به هر حال امیدواریم تمام خوانندگان کتاب و کسانی که آن را نمی‌خوانند - چه به دانشگاه می‌روند، چه نمی‌روند - چه بعد از آن فرار مغزها را بر قرار ترجیح می‌دهند (که امیدواریم چنین نباشد) و چه و چه، در آینده مفید فایده باشد؛ اگر چنین چیزی اصلاً امکان‌پذیر باشد.
لازم به ذکر نیست که کتاب، بدون شك پر از اشتباهات ریز و درشت و از انواع و اقسام آن است، لطفاً ما را در تصحیح آنها یاری کنید.

فرینا ساعتی
بردیا نجاری فریزهندی
شهرز زربافیان
مرداد ۱۳۹۰

برای ارسال نظرات به مؤلفان هم می‌توانید از آدرس زیر استفاده کنید:
ferina.saati@gmail.com

فهرست مطالب

۱۰۹	تمرین فصل ۲	فصل ۱	بار الکتریکی، قانون کولن، میدان الکتریکی ۱
۱۱۳	سؤال‌های المپیاد فصل ۲	۱۹	مسائل نمونه فصل ۱
۱۱۷	پاسخ سؤال‌های المپیاد فصل ۲	۲۰	پاسخ مسائل نمونه فصل ۱
۱۳۳	پتانسیل الکتریکی فصل ۳	۲۷	تمرین فصل ۱
۱۶۹	مسائل نمونه فصل ۳	۲۹	سؤال‌های المپیاد فصل ۱
۱۷۲	پاسخ مسائل نمونه فصل ۳	۴۰	پاسخ سؤال‌های المپیاد فصل ۱
۱۸۱	تمرین فصل ۳	۷۹	فصل ۲ قانون گاوس
۱۸۴	سؤال‌های المپیاد فصل ۳	۹۹	مسائل نمونه فصل ۲
۱۹۰	پاسخ سؤال‌های المپیاد فصل ۳	۱۰۱	پاسخ مسائل نمونه فصل ۲



بار الکتریکی، قانون کولن، میدان الکتریکی



بار الکتریکی



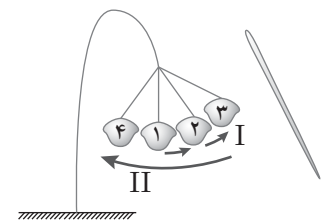
حتماً تا به حال برایتان پیش آمده است که پس از راه رفتن با جوراب پشمی بر روی فرش، دستتان را به یک جسم فلزی بزنید و جرقه‌ای بین دستتان و فلز احساس کنید. یا این‌که در تولد دوستتان، برای این‌که بادکنک را به دیوار بچسبانید، آن را به موی سرتان بمالید و چسبیدن آن را به دیوار مشاهده کنید! آیا شده که به علت این پدیده‌ها فکر کنید؟

پدیده‌هایی از قبیل این‌ها، به شاخه‌ای از علم فیزیک مربوط هستند که آن را الکترواستاتیست می‌نامیم. ما در این بخش قصد پرداختن به این شاخه را داریم.

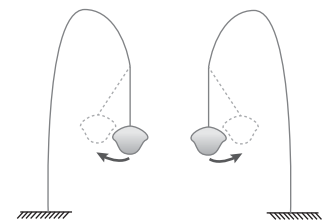
در ابتدا بیایید با آزمایشی شروع کنیم: جسمی سبک مثل یک گلوله کاغذی را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۱-۱ از یک نخ ابریشمی آویزان شده است (وضعیت ۱). حال یک میله شیشه‌ای را به پارچه‌ای ابریشمی بمالید و به آرامی به گلوله نزدیک کنید. خواهید دید که گلوله به میله نزدیک می‌شود (وضعیت ۲) و پس از تماس با آن (وضعیت ۳)، از آن جدا شده و دور می‌شود (وضعیت ۴). حال همین کار را با گلوله‌های دیگری انجام دهید. با نزدیک کردن این دو گلوله به یکدیگر، مشاهده می‌کنید که از هم دور می‌شوند؛ در صورتی که اگر این گلوله‌ها را قبل از تماس با میله شیشه‌ای به هم نزدیک می‌کردیم به حالت قائم می‌ماندند و انحرافی نداشتند. بنابراین به نظر می‌رسد که نیروی دیگری به جز نیروی گرانش و نیروی کشش نخ باعث شده است که این دو گلوله همدیگر را دفع کنند. ما این نیروی جدید را «نیروی الکتریکی» می‌نامیم (شکل ۱-۲).

حال بیایید آزمایش دیگری انجام دهیم. آزمایش قبل را تکرار می‌کنیم و بعد از مالش گلوله‌ی کاغذی به پارچه‌ی ابریشمی، میله را به گلوله تماس می‌دهیم. میله‌ی دیگری را هم که مثلاً از جنس پلاستیک انتخاب می‌کنیم به پارچه پشمی، مالش می‌دهیم و آن را به گلوله‌های کاغذی نزدیک می‌کنیم. طوری که با آن تماس پیدا نکند. می‌بینیم که میله مطابق شکل ۱-۳ گلوله را جذب می‌کند.

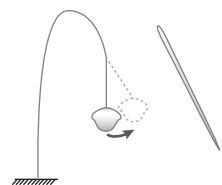
به نظر می‌رسد که نیروی الکتریکی که از آن نام بردیم، این‌جا نیز وجود دارد. معلوم شده است که نیروی الکتریکی از وجود چیزی به نام «بار الکتریکی» ناشی می‌شود. حال می‌خواهیم بدانیم که این بار الکتریکی چیست و از کجا می‌آید؟ برای درک منشأ بار الکتریکی باید بدانیم که در ماده



شکل ۱-۱ حرکت گلوله‌ی کاغذی قبل از تماس با میله‌ی شیشه‌ای.
II حرکت گلوله‌ی کاغذی بعد از تماس با آن.



شکل ۱-۲ دو گلوله‌ی کاغذی مشابه، یکدیگر را دفع می‌کنند.

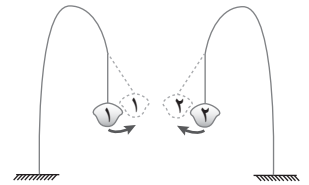


شکل ۱-۳ میله پلاستیکی گلوله‌ی کاغذی آزمایش قبل را جذب می‌کند.

چه می‌گذرد؟ همان طور که می‌دانیم اجسام از ذرات بسیار ریزی به نام «اتم» تشکیل شده‌اند که خود شامل دو قسمت هسته و الکترون است. الکترون‌ها به دور هسته در حال گردش‌اند و می‌توان آن‌ها را از اتم جدا کرد. بنابر مشاهدات انجام شده، الکترون‌ها دارای بار الکتریکی هستند.

با توجه به این‌که نیروی الکتریکی ناشی از وجود بار الکتریکی است، به نظر می‌رسد کم یا زیاد شدن تعداد الکترون‌های موجود در اجسام باید نیروی الکتریکی را به وجود بیاورد. یعنی باید اجسام باردار - یا جسمی که کمبود بار یا زیادی بار دارند - باید به یکدیگر نیروی الکتریکی وارد کنند. با توجه به دو آزمایش اخیر که گفتیم، این جمله منطقی به نظر می‌رسد. در این دو آزمایش دیدیم که دو جسم باردار همدیگر را دفع یا جذب می‌کنند (به نظر شما چرا این طور است؟). برای درک این مطلب، بیایید آزمایش دیگری ترتیب دهیم.

یک گلوله کاغذی را با میله پلاستیکی که قبلاً به یک پارچه پشمی مالش داده شده است، تماس می‌دهیم. این گلوله را در مجاورت گلوله‌ی کاغذی آزمایش قبل قرار می‌دهیم، این دو گلوله همدیگر را جذب خواهند کرد (مطابق شکل ۱-۴).



شکل ۱-۴ گلوله‌ی ۱ با میله‌ی پلاستیکی مالیده به پارچه‌ی ابریشمی و گلوله‌ی ۲ با میله‌ی شیشه‌ای مالیده به پارچه‌ی پشمی تماس داده شده است.

حال اگر این دو گلوله را با هم تماس دهیم و بار دیگر آنها را در مجاورت هم قرار دهیم، می‌بینیم که در تعادل باقی می‌ماند (البته اگر در مالش دادن و تماس دادن با دقت عمل کرده باشیم، احتمال دارد که همچنان مقداری همدیگر را جذب کنند، نکته اینجاست که گلوله‌ها بعد از تماس با هم، دیگر هم را شدیداً جذب نکنند).

از بین رفتن - یا کم شدن - نیروی بین دو گلوله حاکی از آن است که عامل به وجود آورنده نیروی الکتریکی - که همان طور که گفتیم بار الکتریکی است - بین این دو گلوله از بین رفته است؛ یا به گونه‌ای خنثی شده است. همواره رسم بر این است که به کمیت‌هایی که در نتیجه جمع شدن با هم کم می‌شوند، علامت‌های مختلفی نسبت می‌دهند، مثلاً در اینجا دو گلوله‌ی باردار - کمیت بار الکتریکی - با تماس با هم، بر هم اثر کردند و بار هر کدام کمتر شد! بنابراین بنا به قرار داد، به بارهای الکتریکی نیز علامت‌های مختلفی نسبت می‌دهند، یعنی مثبت و منفی.

اگر در آزمایش‌های قبل دقت کنید، می‌بینید که گاهی از شیشه و گاهی از پلاستیک و ابریشم برای ایجاد بار الکتریکی استفاده شد. قرارداد بار مثبت و منفی به گونه‌ای است که بار ظاهر شده بر روی شیشه را مثبت و بر روی پلاستیک را منفی می‌نامیم.

بر اساس آزمایش‌هایی که انجام شده، مشخص شده است که در واقع این تفاوت بار، ناشی از تفاوت در تعداد الکترون‌هاست در واقع، در میله‌ی پلاستیکی، افزایش تعداد الکترون و در میله‌ی شیشه‌ای کاهش آن به وجود آمده است. بنابراین، طبق قراردادی که گفته شد - که بار پلاستیک، منفی و بار شیشه مثبت است - افزایش تعداد الکترون موجب ایجاد بار منفی می‌شود و در نتیجه بار الکترون منفی است. این‌که شیشه، با کمبود الکترون، بار مثبت به دست آورد نیز حاکی از وجود ذره‌ی باردار دیگری با بار مثبت در درون اتم است. معلوم شده است که این ذره، با ذره‌ی دیگری که باری ندارد، در داخل هسته‌ی اتم قرار دارد؛ ذره‌ی مثبت پروتون و دیگری نوترون نام دارد.

بررسی‌ها نشان می‌دهد که هر اتمی تعداد مشخصی الکترون دارد و در حالت تعادل، اتم باری ندارد - و خنثی است! پس حالت تعادل ایجاد می‌کند که مجموع بارهای منفی الکترون‌ها با مجموع بار مثبت پروتون‌های موجود در هسته، به لحاظ بزرگی، دقیقاً برابر باشد. البته تنها الکترون‌ها

و پروتون‌ها نیستند که به هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند. بلکه این دو، عمده‌ترین و ملموس‌ترین عامل ایجاد این نیرو نیز محسوب می‌شوند. در حقیقت، ذرات زیادی از این قبیل وجود دارند. معلوم شده است که بار ذرات و همچنین بار ایجاد شده در اجسام، کمیتی «گسسته» است؛ یعنی هر باری مضرب صحیحی از یک بار الکتریکی معین است که «بار بنیادی» نامیده می‌شود. این بار بنیادی، که برابر با بار الکترون و پروتون است و مشخصاً کوچک‌ترین بار موجود در طبیعت است، بزرگی 1.6×10^{-19} کولن^۱ را داراست و با نماد e نمایش داده می‌شود. بنابراین هر بار الکتریکی فیزیک را - اگر با نماد q نشان دهیم - می‌توانیم به عنوان مضربی از e ، به صورت ne نمایش دهیم (که در آن n یک عدد صحیح محسوب می‌شود که مثبت یا منفی یا صفر است). (رابطه ۱)

$$q = ne \quad (1)$$

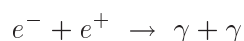
برای الکترون، n در رابطه ۱ برابر با -1 ، و برای پروتون $+1$ است. برخی از خواص سه ذره^۲ موجود در اتم، در جدول ۱-۱ آمده است.

جدول ۱-۱ برخی از خواص سه ذره‌ی زیراتمی

ذره	بار الکتریکی (کولن)	جرم (بر حسب جرم الکترون)
الکترون (e^-)	-1.6×10^{-19}	۱
پروتون (p)	$+1.6 \times 10^{-19}$	۱۸۳۶/۱۵
نوترون (n)	۰	۱۸۳۸/۶۸

هرگاه یک خاصیت فیزیکی، مانند بار الکتریکی، به جای داشتن مقادیر پیوسته، به صورت «بسته»‌های گسسته باشد، آن خاصیت را یک خاصیت «کوانتیده» می‌گویند. بنابراین، بار الکتریکی کمیتی کوانتومی با کوانتوم e است.^۳

بار الکتریکی یک کمیت پایسته است: در هر آزمایشی که بار الکتریکی در آن دخیل است، باری به وجود نمی‌آید و از بین هم نمی‌رود و بار کل همواره مقداری ثابت است.^۴ گفته می‌شود که بار کل موجود در عالم، چه مثبت و چه منفی، مقداری ثابت است، و تاکنون هیچ نقضی بر این گفته آورده نشده است این اصل پایستگی، مشابه اصل پایستگی جرم و انرژی «اصل پایستگی بار الکتریکی» نامیده شده است. برای مشاهده‌ی پایستگی بار، نابودی ذره - پادذره می‌تواند مثال خوبی باشد. وقتی یک الکترون (e^-) با بار $-e$ ، با پادذره‌اش پوزیترون (e^+) با بار $+e$ به هم نزدیک شوند، امکان دارد نابود شوند و انرژی خود را به شکل تابشی بیرون دهند. این تابش می‌تواند از طریق پرتو گاما (γ) باشد. این واکنش را مطابق رابطه‌ی زیر نمایش می‌دهند:



(۱) کولن واحد بار الکتریکی است که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت. همین بس که شما در این بخش با این عدد آشنا شوید و تصویری از کوچکی آن به دست آورید.

(۲) جرم الکترون در حالت ساکن آن در حدود 9.1×10^{-31} کیلوگرم گزارش شده است.

(۳) این که چرا e کوانتوم بار الکتریکی است و بار دیگری غیر از مضرب آن وجود ندارد، رازی است که در فیزیک

کلاسیک توضیحی برایش وجود ندارد.

(۴) طوری که حتی در آزمایش‌های نابودی ذرات - پادذرات و یا واپاشی اجسام نیز بار کل تغییر نمی‌کند!



در این آزمایش بار خالص قبل از برهم کنش ($(+1) + (-1) = 0$) برابر صفر بوده و بعد از آن نیز - از آنجا که پرتو تابش حامل بار نیست - صفر می‌ماند؛ در نتیجه دیده می‌شود که در این برهم کنش، بار الکتریکی پایسته می‌ماند.

رساناها و نارساناها



ذرات درون هسته‌ی اتم را به دلیل وجود نیروهای هسته‌ای قوی، نمی‌توان به سادگی از هسته جدا کرد. بنابراین، عامل اصلی به وجود آورنده‌ی بار الکتریکی، الکترون‌ها هستند. الکترون‌ها می‌توانند درون یک جسم حرکت کنند یا از جسمی به جسم دیگر منتقل شوند، مانند حرکت الکترون‌ها در سیم‌های برق.

بیاید بار دیگر آزمایش گلوله‌ی کاغذی بخش قبل را در نظر بگیریم. در این آزمایش‌ها برای باردار کردن گلوله‌ی کاغذی از میله‌های شیشه‌ای و پلاستیکی استفاده کردیم. این بار میله‌ای فلزی را در دست می‌گیریم و آن را با پارچه‌ی ابریشمی مالش می‌دهیم و سپس به گلوله‌ی کاغذی تماس می‌دهیم. خواهیم دید که در گلوله‌های کاغذی هیچ تغییری ایجاد نمی‌شود؛ باری به آن منتقل نمی‌شود. علت این امر آن است که الکترون‌ها می‌توانند به راحتی در فلز، بدن انسان و از آن به سوی زمین حرکت کنند، در نتیجه بار ایجاد شده در میله‌ی فلزی از بدن ما عبور کرده و به زمین انتقال می‌یابد و دیگر باری روی میله باقی نمی‌ماند تا بتواند روی گلوله‌ی کاغذی جمع شود و آن را باردار کند. چنین اجسامی را - میله‌ی فلزی، زمین و بدن انسان - که بتوانند به راحتی بار الکتریکی را از خود عبور دهند، "رسانای الکترونیسته" می‌نامند و اجسامی را مانند شیشه و پلاستیک که این خاصیت را ندارند، "رسانا" و یا "دی‌الکتریک" - و یا عایق - می‌نامند. بدین ترتیب، وقتی مقداری بار الکتریکی روی سر یک رسانا قرار می‌دهیم، بی‌درنگ در سرتاسر آن پخش می‌شود، تا رسانا به تعادل^۱ برسد، و وقتی مقداری بار روی یک سر نارسانایی قرار می‌دهیم، در همان مکان باقی می‌ماند.

توجه داشته باشید که هیچ‌گاه به طور دقیق نمی‌توان تعیین کرد که جسمی رسانا یا نارسانا است. بررسی‌ها نشان می‌دهند که هر جسمی می‌تواند بار الکتریکی را، هر چند به میزان بسیار اندکی، از خود عبور دهد. بنابراین اجسام مختلف در گستره‌ای بین رسانایی کامل و نارسانایی کامل قرار می‌گیرند. بدین ترتیب حتی ممکن است که یک ماده در شرایطی رسانا و در شرایط دیگر نارسانا در نظر گرفته شود، بنابراین رسانایی امری کاملاً نسبی است و ما برای شرایطی مشخص، رسانایی و نارسانایی اجسام خاصی را قرارداد می‌کنیم.

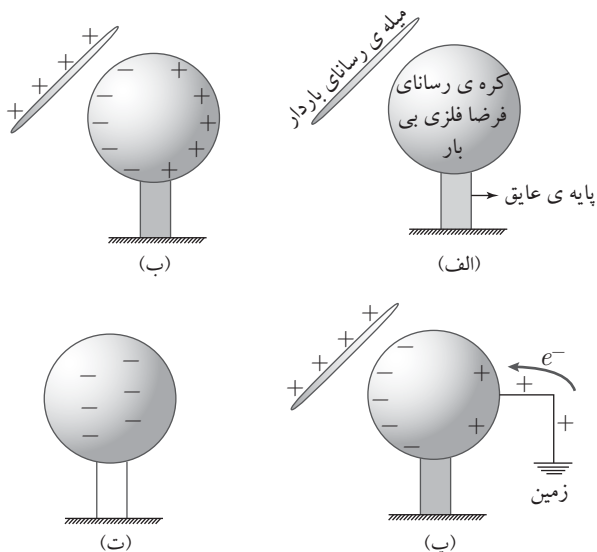
همه‌ی فلزات رساناهای خوبی هستند. حرکت بار در آنها ناشی از حرکت الکترون‌هایشان است. در فلزات به دلیل پیوند خاص اتمی‌شان، برخی از الکترون‌های هر یک از اتم‌ها "آزاد" هستند؛ یعنی پیوندی با هیچ اتم خاصی ندارند. به عبارت بهتر، الکترون‌های آزاد، به بخش‌های بیرونی اتم‌ها تعلق دارند و به دلیل اتصال سست‌شان، به سادگی جدا می‌شوند. این الکترون‌ها، همچون ذرات گاز در یک ظرف در بسته، در حجم فلز سرگردان هستند و به محض ایجاد کمبود یا ازدیاد الکترون در یک سر رسانا، سریعاً اضافه یا کمبود بار را در تمام بخش‌های رسانای فلزی پخش می‌کنند.

(۱) فعلاً با واژه‌ی تعادل کنار بیاید، تا بعدها که به مفهوم آن می‌پردازیم!

چنانچه توجه کرده باشید، در تمامی آزمایش‌هایی که تاکنون با آنها سروکار داشته‌ایم، روشی خاص برای باردار کردن اجسام پیشنهاد شده بود: مالش دادن. فرایند دیگری که برای باردار کردن اجسام وجود دارد "القا کردن" است.

القا کردن

برای باردار کردن یک کره‌ی رسانا به روش القا کردن، مطابق شکل ۵-۱ عمل می‌کنیم، ابتدا یک میله‌ی شیشه‌ای باردار را که احتمالاً بار خود را از طریق مالش به دست آورده است به کره‌ی نارسانایی که روی پایه‌ی نارسانایی قرار دارد، نزدیک می‌کنیم (شکل ۵-۱ الف).



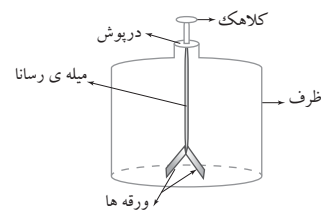
شکل ۵-۱ مراحل باردار کردن یک کره‌ی رسانا از طریق روش القا.

گفتیم که بار شیشه مثبت است، این بار مثبت الکترون‌های آزاد سمت نزدیک جسم را جذب می‌کند و در سمت دور آن کمبود الکترون باقی می‌گذارد (شکل ۵-۱ ب). از زیاد الکترون در سمت نزدیک میله بار منفی و کمبود آن در سمت دور از میله بار مثبت ایجاد خواهد کرد. اگر در این لحظه، سمت دورتر از میله‌ی رسانا را موقتاً به زمین وصل کنیم، بار مثبت آن سمت با الکترون‌هایی که از زمین به جسم منتقل می‌شوند و کمبود الکترون آن سمت را جبران می‌کنند، خنثی می‌شود؛ به عبارت بهتر بار مثبت به زمین نشت می‌کند (مطابق شکل ۵-۱ پ). این کار فلز را با مقداری بار خالص منفی باقی می‌گذارد. اگر کره‌ی رسانا را بعد از قطع شدن از زمین از میله‌ی شیشه‌ای دور کنیم، بار منفی باقی‌مانده بر روی آن در سرتاسر آن توضیح خواهد شد (شکل ۵-۱ ت).

دو وسیله‌ی الکتریکی: الکتروسکوپ - وان دوگراف

الکتروسکوپ

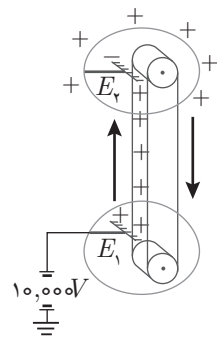
یکی از وسایل آزمایشگاهی ساده و پرکاربردی که برای مطالعه‌ی باردار بودن یا نبودن اجسام و همچنین تشخیص نوع بارشان - مثبت و منفی بودن بار - استفاده می‌شود، الکتروسکوپ است. الکتروسکوپ از یک ظرف شیشه‌ای، دو ورقه‌ی نازک رسانا - از جنس مس، آلومینیوم و غیره، یک میله‌ی رسانا - که ورقه‌ها به آن لولا شده‌اند، و یک درپوش برای ظرف تشکیل شده است (شکل ۶-۱).



شکل ۶-۱ الکتروسکوپ و اجزای آن.

فرض کنید یک میله‌ی پلاستیکی را که با پارچه‌ی پشمی مالش داده شده است (و دارای بار منفی است)، به قسمت کلاهک الکتروسکوپ نزدیک کنیم، به دلیل نیروی دافعه‌ی بین الکترون‌ها، برخی الکترون‌های آزاد قسمت بالایی میله‌ی رسانا به راه افتاده و به سمت پایین - ورقه‌ها، حرکت می‌کنند تا از بار منفی میله‌ی پلاستیکی تا حد ممکن فاصله بگیرند؛ بدین ترتیب ورقه‌ها دارای بار همنام منفی می‌شوند. این بار، موجب نیروی دافعه‌ی بین دو ورقه می‌شود که سبب باز شدن ورقه‌ها (افزایش زاویه‌ی بین آنها) می‌شود. این کار، باردار بودن یا نبودن جسم نزدیک کلاهک را مشخص می‌کند. در این آزمایش وقتی میله را از کلاهک دور کنیم، طبیعتاً از آنجا که الکتروسکوپ بی‌بار است، ورقه‌ها به حالت اولیه‌ی تعادلی خود باز می‌گردند. اما در صورتی که میله را به الکتروسکوپ تماس دهیم، در محل تماس میله با کلاهک مقداری از بار میله به الکتروسکوپ منتقل می‌شود و ورقه‌ها منحرف می‌شوند. در این حالت اگر میله را از الکتروسکوپ دور کنیم، از آنجا که بقیه‌ی بار روی میله، که روی میله در جای خود باقی مانده بود، به نوبه‌ی خود موجب انحراف ورقه‌ها از هم می‌شد، با دور شدن میله انحراف ورقه‌ها کمتر می‌شود ولی ورقه‌ها به حالت اولیه‌ی خود باز نمی‌گردند. با این کار، الکتروسکوپ باردار شد. حال اگر بار دیگر این کار را با همان میله‌ی پلاستیکی باردار انجام دهیم. مشاهده می‌کنیم که انحراف ورقه‌ها بیشتر می‌شود. این نشان می‌دهد که انحراف ورقه‌های الکتروسکوپ و در نتیجه نیروی الکتریکی بین دو ورقه، با افزایش بار الکتروسکوپ بیشتر می‌شود. در نتیجه رابطه‌ی مستقیم بین نیروی الکتریکی و بار الکتریکی، به طور تجربی قابل مشاهده است.

سؤال: راهی پیدا کنید تا به وسیله‌ی آن با استفاده از یک الکتروسکوپ خنثی، یک میله‌ی پلاستیکی با بار منفی و یک میله‌ی رسانا با دسته‌ی عایق، بدون تماس میله‌ی پلاستیکی به هیچ یک از دو جسم دیگر، میله‌ی رسانا را باردار کنیم. در این حالت، آیا می‌توانید بار میله را تعیین کنید که مثبت است یا منفی؟ بار دو جسم دیگر را چگونه؟



شکل ۱-۷ مولد وان دوگراف

مولد وان دوگراف

وان دوگراف دستگاهی است که می‌تواند مقدار زیادی الکتریسیته ساکن تولید کند. این مولد نقاله پهنی درون خود دارد که میان یک ستون حرکت می‌کند تا بار الکتریکی ایجاد کند. بارهای تولید شده توسط این نقاله، درون گنبدی در بالای این مولد تجمع می‌کنند و به دنبال راهی برای فرار هستند. این تجمع بارهای منفی گاهی به واسطه‌ی یک صاعقه‌ی کوچک الکتریکی از طریق هوا به یک جسم رسانای متصل به زمین و یا مستقیماً به خود زمین منتقل می‌شوند (شکل ۱-۷).

چند مثال



مثال ۱

اگر به سرعت در راهروی مفروش راه بروید، در حالی که جوراب به پا دارید و سپس با شخصی دست بدهید و یا دستگیره فلزی دری را بگیرید تا آن را باز کنید، غالباً جرقه‌ای ملموس بین دستتان و دیگری احساس خواهید کرد؛ علت این امر چیست؟

حل. علت این امر را می‌توان در آزمایش گلوله‌ی کاغذی جست‌وجو کرد. در این آزمایش، گفتیم که بر اثر مالش میله‌ی شیشه‌ای یا پلاستیکی با پارچه‌های ابریشمی یا پشمی، می‌توان آن را باردار

کرد. زمانی که با سرعت بر روی فرض راه می‌روید، الیاف پلاستیکی موجود در جوراب شما به الیاف نخی فرش (ابریشمی یا پشمی) مالیده و باردار می‌شود. بنابراین زمانی که شما دستگیره‌ی در را لمس می‌کنید، به علت رسانا بودن انسان، این بار الکتریکی تمایل دارد که در شما جریان یابد و به دستگیره در نیز منتقل شود. در این انتقال بار، جرقه‌ای بین دست شما و دستگیره در زده می‌شود. شما ممکن است نظیر این جرقه را هنگام اتصال سیم‌های ماشین برای روشن کردن آن - یا همان استارت زدن - دیده باشید.

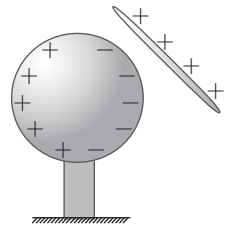
شخصی که روی چهار پایه‌ی عایق‌بندی شده‌ی ایستاده است، رسانای بارداری را که روی پایه‌ی عایقی قرار دارد لمس می‌کند. آیا رسانا کاملاً تخلیه می‌شود؟
حل. چون رسانا بر روی پایه‌ای نارسانا قرار دارد، باری به زمین انتقال نمی‌یابد. هنگامی که شخص، رسانا را لمس می‌کند، چون انسان نیز رساناست، می‌توان مجموعه‌ی انسان و رسانای باردار را به عنوان یک رسانای بزرگ‌تر در نظر گرفت که در نتیجه بار روی تمام آن پخش می‌شود (و چون توسط دو نارسانا از زمین جدا شده‌اند، باری به زمین انتقال نمی‌یابد). بنابراین رسانا تخلیه نمی‌شود و مقداری از بار اولیه بر رویش باقی می‌ماند.

مثال ۲

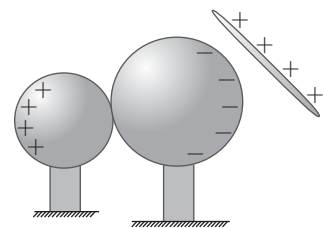
دو کره‌ی فلزی که بر روی پایه‌های نارسانای قابل حملی سوارند، در دست‌اند. راهی پیدا کنید که در آن کره‌ها دارای بار مساوی و با علامت مخالف بشوند. برای این کار می‌توانید از یک میله‌ی شیشه‌ای که با ابریشم مالش داده شده است، استفاده کنید ولی نباید آن را با کره‌ها تماس دهید. آیا اندازه‌ی این کره‌ها یکسان باید باشد تا روش شما مؤثر واقع شود؟

حل. در اینجا، سه جسم داریم. دو کره‌ی فلزی بدون بار و یک میله‌ی شیشه‌ای با بار مثبت و می‌دانیم که نمی‌توانیم میله‌ها را به کره‌ها تماس دهیم. از آنجایی که برای انتقال بارهای کوچک، باید اجسام با هم تماس پیدا کنند، پس باید کاری کنیم که از طریق تماس کره‌ها باری بین آنها انتقال یابد. با این کار چون کره‌ها با هیچ جسم دیگری امکان مبادله‌ی بار ندارند، پس دارای بارهای مساوی و مخالف هم می‌شوند. در بخش باردار کردن به روش القا دیدیم که اگر مقداری بار الکتریکی را به یک جسم فلزی - در اینجا یک کره‌ی فلزی - نزدیک کنیم، جسم رسانا به طور موضعی باردار می‌شود، یعنی یک سمت آن دارای بار مثبت، و سمت دیگر آن دارای بار منفی می‌شود^۱ (شکل ۸-۱). نکته‌ی این سؤال در همین ویژگی‌ای است که رساناها حین القا از خود نشان می‌دهند، اگر دو کره را به هم بچسبانیم و سپس میله‌ی شیشه‌ای را که دارای بار الکتریکی مثبت است مطابق شکل ۹-۱ از یک سمت به آنها نزدیک کنیم، بر اثر القا شدن، کره‌ی سمت راست دارای بار منفی و کره‌ی سمت چپ دارای بار مثبت می‌شود. حال اگر در این وضعیت - در حالی که میله همچنان نزدیک کره است، کره‌ی سمت چپ را جدا و از بقیه دور کنیم، و سپس میله را دور کنیم، دو کره خواهیم که یکی دارای بار مثبت و دیگری دارای همان مقدار بار با علامت منفی می‌شود. با توجه به نحوه‌ی آزمایش مشخص است که اندازه‌ی کره‌ها هیچ اهمیتی ندارد و تنها رسانا بودن آنها، شرطی است کافی.

مثال ۳



شکل ۸-۱ باردار شدن موضعی یک جسم رسانا.



شکل ۹-۱ باردار کردن هم‌زمان دو کره با استفاده از یک میله‌ی باردار.

(۱) این پدیده به اثر القایندگی معروف است.

مثال ۲

در سؤال قبل، راهی پیدا کنید که در آن کره‌ها دارای بارهای مساوی با علامت یکسان بشوند. آیا در این حالت نیز نیازی به یکسان بودن اندازه‌ی کره‌ها نیست؟

حل. با استفاده از روش گفته شده در پاسخ سؤال پیشین دو کره‌ی رسانا را باردار می‌کنیم. حال با تماس دست به یکی از کره‌ها، آن را خنثی می‌کنیم (البته اگر از روی چهارپایه‌ی عایق پایین آمده باشیم!). اگر کره‌ی خنثی و کره‌ی باردار را با هم تماس دهیم، دو کره با هم مبادله‌ی بار می‌کنند. اگر اندازه‌ی دو کره متفاوت باشد، نمی‌توان گفت که بار به صورت مساوی بین آنها تقسیم می‌شود، ولی اگر یکسان باشند، چون تفاوتی با هم ندارند، بارشان نیز نمی‌تواند متفاوت باشد، بنابراین می‌توان گفت که بار کره‌ی باردار به صورت یکنواخت در کل دو کره پخش می‌شود و در نتیجه کره‌ها دارای بارهای مساوی و هم‌علامت می‌شوند. در اینجا می‌بینیم که یکسان بودن اندازه‌ی کره‌ها الزامی است.

قانون کولن



تا به این نقطه از بحث، ما با بار الکتریکی و نیروی بین بارهای الکتریکی سروکار داشتیم. اما صرفاً تعریفی کیفی از نیروی الکتریکی نمی‌تواند پاسخ‌گوی نیاز ما در فیزیک باشد و بایستی در پی روابط کمی باشیم. با توجه به آنچه تا اینجا گفته شده می‌دانیم که نیروی الکتریکی که بین دو جسم باردار وجود دارد با میزان بار آن جسم رابطه‌ی مستقیم دارد، یعنی با بیشتر شدن بار یک جسم، نیرویی که به آن وارد می‌شود هم بیشتر می‌شود. همچنین دیده می‌شود که این رابطه برای فاصله‌ی بین دو جسم باردار، معکوس است. یعنی با افزایش فاصله‌ی دو جسم باردار، نیرویی که آن دو به یکدیگر وارد می‌کنند، کاهش می‌یابد. (آزمایشی مانند آزمایش‌های بخش پیشین برای بررسی این موضوع طرح کنید)، سپس نیروی الکتریکی با مقدار بار آنها نسبت مستقیم و با فاصله‌ی بین‌شان نسبت عکس دارد. شارل کولن^۱، فیزیک‌دان فرانسوی با آزمایشاتی که انجام داد^۲، مشاهده کرد که اگر فاصله‌ی بین دو بار نقطه‌ای نامشخص ولی ثابت با نام‌های q_1 و q_2 دو برابر شود، نیروی الکتریکی بین آنها یک‌چهارم برابر می‌شود. او از این نتیجه چنین استدلالت کرد که نیروی الکتریکی بین دو بار نقطه‌ای (F)، با عکس مجذور فاصله‌ی بین آنها (r) متناسب است. $(F \propto \frac{1}{r^2})$

کولن برای پیدا کردن رابطه‌ی نیرو با مقدار بارها هم آزمایش مشابهی انجام داد. ابتدا بار روی گلوله‌ی اول q_1 را نصف کرد و مقدار نیروی وارده بر گلوله‌های دیگر را اندازه گرفت، و بار دیگر بار گلوله‌های دیگر (مثلاً q_2) را نصف کرد و اثر آن را بررسی کرد و مشاهده کرد که نیرو باز هم نصف شد. او از این مشاهدات نتیجه گرفت که مقدار نیرو (F) با مقدار بارهای q_1 و q_2 رابطه‌ی خطی دارد $(F \propto q_1 q_2)$. با استفاده از نتایج این آزمایشات او قانون مربوط به نیروی اندرکنش دو بار نقطه‌ای خود را چنین بیان داشت:

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

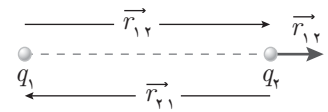
در این رابطه که به قانون کولن معروف است، k ثابتی است که در سیستم‌های مختلف اندازه‌گیری

(۱) ۱۷۳۶-۱۸۰۶

(۲) در سال ۱۷۸۵

متفاوت است. این نیرو در راستای خط واصل دو بار است و جهت آن برای دو بار هم نام (یعنی دو بار مثبت یا دو بار منفی) به سمت خارج خط واصل دو بار (نماد نیروی دافعه) و برای دو بار غیرهم نام (یعنی بار مثبت - بار منفی) به سمت داخل (نماد نیروی جاذبه) است.

برای استفاده از رابطه‌ی کولن و تعیین مقدار ثابت k ، نیاز داریم که واحدی برای مقدار بار الکتریکی تعیین کنیم. یکای بار در دستگاه یکاهای بین‌المللی (SI) کولن (C) است. کولن یکای فرعی است و از یکاهای اصلی SI محسوب نمی‌شود. حال با این یکا و با در نظر گرفتن یکای فاصله به متر، مقدار k در SI به دست می‌آید. k برابر است با نیرویی که دو بار یک کولنی که به فاصله‌ی یک متر از هم قرار دارند، به هم وارد می‌کنند. مقدار k حدوداً برابر با 9×10^9 و واحد آن با توجه به قانون کولن $\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$ است. به بیان دیگر k برابر با $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ است که در آن ϵ_0 ضریب تراوایی الکتریکی خلأ است. در این کتاب، ضریب فوق به هر دو شکل نمایش داده شده است.



شکل ۱۰-۱ فاصله‌ی بار ۱ از ۲ و r_{21} و r_{12} فاصله‌ی بار ۲ از ۱ است که $r_{12} = r_{21}$ است و در حالت برداری $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ (و $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$).

شکل برداری قانون کولن به این صورت نوشته می‌شود:

$$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{kq_1q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

\hat{r}_{12} بردار یکه‌ی بردار واصل از بار ۱ به بار ۲ می‌باشد، \hat{r}_{21} هم برعکس.

چند مثال برای قانون کولن



دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 را به فاصله‌ی l از هم نگه داشته‌ایم. طوری که مکان آنها ثابت باقی بماند. بار سوم q_3 را مطابق شکل ۱۱-۱ روی خط واصل q_1 و q_2 قرار می‌دهیم. مقدار بار q_2 را بر حسب q_1 به دست آورید، به صورتی که بار q_3 در حال تعادل باشد.

حل. به بار q_3 دو نیرو توسط q_1 و q_2 اعمال می‌شود. با استفاده از قانون کولن داریم:

$$\vec{F}_{13} = \frac{kq_1q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} = \frac{kq_1q_3}{4l^2} \hat{r}_{13}$$

$$\vec{F}_{23} = \frac{kq_2q_3}{r_{23}^2} \hat{r}_{23} = \frac{kq_2q_3}{l^2} \hat{r}_{23}$$

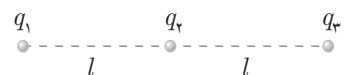
بار q_3 در تعادل است. بنابراین برآیند نیروهای وارد بر آن بایستی صفر باشد. داریم:

$$\sum \vec{F}_{q_3} = 0 \rightarrow \frac{kq_1q_3}{4l^2} \hat{r}_{13} + \frac{kq_2q_3}{l^2} \hat{r}_{23} = 0$$

از طرفی $\hat{r}_{23} = \hat{r}_{13}$. بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{kq_3}{l^2} \hat{r}_{13} \left(\frac{q_1}{4} + q_2 \right) &= 0 \quad q_3 \neq 0 \rightarrow \frac{q_1}{4} + q_2 = 0 \\ \rightarrow q_2 &= -\frac{q_1}{4} \end{aligned}$$

مثال ۵



شکل ۱۱-۱



مثال ۶

چهار بار نقطه‌ای مطابق شکل در چهار رأس یک مربع ثابت نگه داشته شده‌اند. $q = 1 \times 10^{-8} \text{ C}$ و $a = 1 \text{ cm}$ است. بردار نیروی الکتریکی وارد بر بار سمت راست بالا را حساب کنید. **حل.** از قانون کولن استفاده می‌کنیم:

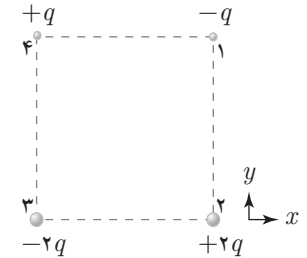
$$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

بارها را مطابق شکل ۱۲-۱ شماره‌گذاری می‌کنیم. نیروی الکتریکی بر ایند وارد بر بار ۱ (سمت راست بالا) برابر با مجموع سه نیرویی است که سه بار واقع در سه رأس بر آن وارد می‌کنند، داریم:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_1 &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} \\ &= \frac{k(-q)(+2q)}{a^2} \hat{r}_{21} + \frac{k(-q)(-2q)}{(\sqrt{2}a)^2} \hat{r}_{31} + \frac{k(-q)(q)}{a^2} \hat{r}_{41} \end{aligned}$$

طبق دستگاه مختصات مشخص شده، که در صورت مسئله داده شده است، بردارهایی که بدین ترتیب هستند

$$\begin{aligned} \hat{r}_{21} &= \hat{j}, \quad \hat{r}_{41} = \hat{i} \\ \hat{r}_{31} &= |\hat{r}_{31}| \cos 45^\circ \hat{i} + |\hat{r}_{31}| \sin 45^\circ \hat{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j} \\ \Rightarrow \sum \vec{F}_1 &= \frac{kq^2}{a^2} \left[-2\hat{j} + \frac{2}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j} \right) - \hat{i} \right] \\ &= \frac{kq^2}{a^2} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \hat{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right) \hat{j} \right] \\ &= \frac{9 \times 10^9 \times (1 \times 10^{-8})^2}{(0.1)^2} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \hat{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right) \hat{j} \right] \\ \sum \vec{F}_1 &= (-2.64\hat{i} - 11.64\hat{j}) \times 10^{-5} \text{ N} \end{aligned}$$

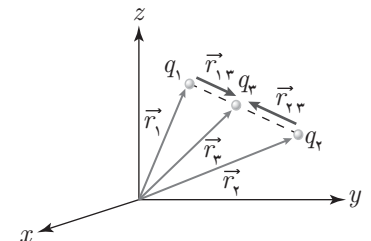


شکل ۱۲-۱

مثال ۷

دو بار مثبت q_1 و q_2 در نقاط \vec{r}_1 و \vec{r}_2 قرار داده شده است. بار q_3 و بردار \vec{r}_3 را طوری تعیین کنید که اگر q_3 را در محل \vec{r}_3 قرار دهیم، نیروی وارد بر هر سه بار صفر شود.

حل. نیروی کل وارد بر هر یک از بارها را با استفاده از قانون کولن حساب می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم تا هر کدام در حال تعادل باشند. از آنجا که نیروی الکتریکی بین دو بار نقطه‌ای در راستای خط واصل شان به آنها وارد می‌شود، صفر شدن نیروی بر ایند وارد بر هر یک از بارها تنها در صورتی ممکن می‌شود که دو نیرویی که از سوی دو بار دیگر بر آن وارد می‌شود، در یک راستا باشند، این امر تنها هنگامی محقق می‌شود که هر سه بار روی یک خط قرار داشته باشند. همان طور که از شکل ۱۳-۱ مشخص است، از آنجا که هر دو بار q_1 و q_2 مثبت هستند، و نیروی وارده از آنها بر بار q_3 از یک جنس است. برای صفر شدن نیروی وارد بر بار ۳، این بار باید میان دو بار دیگر واقع شود.



شکل ۱۳-۱

برای برآیند نیروی وارد بر q_3 داریم:

$$\sum \vec{F}_3 = \frac{kq_1q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} + \frac{kq_1q_2}{r_{23}^2} \hat{r}_{23} = 0 \quad (1)$$

و همچنین برای بردارهای \vec{r}_{13} و \vec{r}_{23} ، اندازه‌های آنها و بردارهای یکه‌شان داریم:

$$\vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \Rightarrow r_{13} = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|, \quad \hat{r}_{13} = \frac{\vec{r}_{13}}{|\vec{r}_{13}|} = \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|}$$

در مورد r_{23} و بردار یکه‌ی آن \hat{r}_{23} هم اوضاع از همین قرار است. با توجه به این اطلاعات عبارت (۱) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = 0 \quad (2)$$

از طرفی، همان طور که در شکل مشخص است، بردارهای یکه‌ی \hat{r}_{13} و \hat{r}_{23} روی یک خط و در خلاف جهت هم قرار گرفته‌اند. بنابراین داریم:

$$\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} = - \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \quad (3)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳)، رابطه‌ی (۲) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^2} - \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2} = 0$$

از آنجا که q_1 و q_2 کمیت‌هایی با مقدار مثبت هستند، می‌توان از این عبارت به ترتیب زیر جذر گرفت:

$$q_1, q_2 > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{q_1}}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} = \frac{\sqrt{q_2}}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \quad (4)$$

از آنجا که خواسته‌ی ما بردار مکان بار q_3 یعنی \vec{r}_3 است، با استفاده از رابطه‌ی (۳)، رابطه‌ی (۴) را به ترتیب زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{q_1}}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} \times \frac{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|}{\vec{r}_3 - \vec{r}_1} &= \frac{\sqrt{q_2}}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \times - \frac{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}{\vec{r}_3 - \vec{r}_2} \\ \Rightarrow \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{\sqrt{q_1}} &= - \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\sqrt{q_2}} \\ \Rightarrow \vec{r}_3 &= \frac{\sqrt{q_1}\vec{r}_2 + \sqrt{q_2}\vec{r}_1}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} \end{aligned} \quad (5)$$

و بدین ترتیب بردار \vec{r}_3 بر حسب دو بردار و دو بار دیگر تعیین می‌شود.

برای به دست آوردن بار q_3 ، بایستی معادله‌ی تعادل را برای بار دیگری، مثلاً بار q_1 بنویسیم:

$$\sum \vec{F} = \frac{kq_1q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{kq_1q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$$



$$\Rightarrow \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_3 - \vec{r}_1 &= \frac{\sqrt{q_1} \vec{r}_2 + \sqrt{q_2} \vec{r}_1 - (\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}) \vec{r}_1}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} \\ &= \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Rightarrow |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad (8)$$

با جایگذاری دو عبارت (۷) و (۸) در رابطه‌ی (۶)، پس از ساده‌سازی عبارت حاصله، داریم:

$$\begin{aligned} q_2 + \frac{q_3}{\left(\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}\right)^3} \cdot \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} &= 0 \\ \Rightarrow q_3 &= \frac{-q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2} \end{aligned}$$

و بدین ترتیب بار q_3 بر حسب دو بار q_1 و q_2 به دست می‌آید.

میدان الکتریکی



احتمالاً تاکنون توجه کرده‌اید که در طبیعت هیچ فعل و انفعالی بدون برقرار بودن یک پل ارتباطی میان دو طرف، انجام نمی‌شود. در قسمت‌های قبل دیدیم که دو جسم باردار، به یکدیگر نیروی الکتریکی وارد می‌کنند؛ ولی در عمل، پل ارتباطی‌ای میان دو جسم مشاهده نکردیم. پس نیروی الکتریکی چگونه و از چه طریقی می‌تواند از یک جسم باردار به دیگری منتقل شود؟

هنگامی که یک بار الکتریکی (یا جسمی باردار) را در فضا قرار می‌دهیم، این بار موجب ایجاد خاصیتی در آن نقطه و نقاط پیرامون آن می‌شود. به گونه‌ای که اگر بار الکتریکی دیگری را در این منطقه قرار دهیم، نیروی مشخصی را تجربه می‌کند. چنین خاصیتی، که توسط یک بار الکتریکی در فضای پیرامون آن ایجاد می‌شود، با مفهومی به نام «میدان الکتریکی» توجیه می‌شود، هر بار الکتریکی در فضای اطراف خود میدان الکتریکی ایجاد می‌کند و به هر بار الکتریکی دیگری که در این فضا قرار گیرد، نیروی متناسب با مقدار میدان الکتریکی در آن نقطه وارد خواهد شد. بنابراین، میدان الکتریکی رابطی میان بارهای الکتریکی است، که به موجب آن بارها بر هم نیرو وارد می‌کنند.

بار \leftrightarrow میدان الکتریکی \leftrightarrow بار

بنابراین، در فضایی که بارهای الکتریکی وجود داشته باشند، میدان الکتریکی حضور دارد. این میدان در هر نقطه، اندازه و جهتی دارد. در حقیقت، میدان الکتریکی، میدانی از بردارهاست که با \vec{E} نشان داده می‌شود. میدان \vec{E} ، در هر نقطه برابر با نیروی الکتریکی \vec{F} وارد بر واحد بار الکتریکی تعریف می‌شود. یعنی:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

یعنی هنگامی که آرایش ثابتی از بارهای الکتریکی در فضا وجود دارد که میدانی را در فضا به وجود آورده‌اند، برای محاسبه میدان در یک نقطه، بار آزمون q_0 را به نقطه‌ی مورد نظر می‌بریم و نیروی وارده بر آن (\vec{F}) را مشاهده می‌کنیم. میدان در این نقطه (\vec{E}) برابر نیروی وارد بر واحد بار در آن نقطه است. چنانچه این کار برای تمام نقاط فضا انجام شود، میدان الکتریکی فضا به دست آمده است.

فرض کنید بار نقطه‌ای q در مبدأ مختصات (نقطه‌ی $(0, 0, 0)$) قرار گرفته است. برای محاسبه \vec{E} در هر نقطه، بایستی از بار آزمون استفاده کنیم. بار آزمون q_0 را در نقطه‌ی دلخواهی در مختصات کروی (r, θ, φ) قرار می‌دهیم. نیروی وارد بر آن، با توجه به قانون کولن برابر است با:

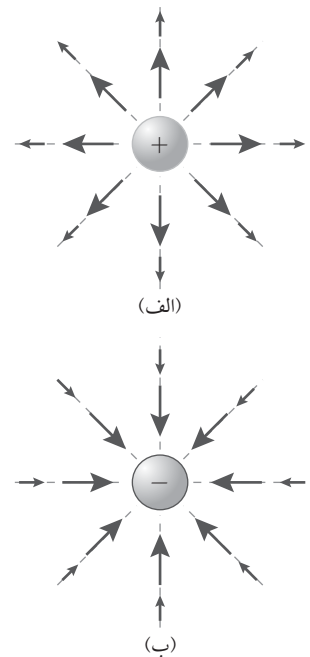
$$\vec{F} = k \frac{qq_0}{r^2} \cdot \hat{r}$$

بنابراین میدان الکتریکی در این نقطه با این رابطه به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= k \frac{qq_0}{r^2} \cdot \hat{r} \times \frac{1}{q_0} \\ &= k \frac{q}{r^2} \cdot \hat{r} \end{aligned}$$

این رابطه مستقل از زوایای θ و φ است و تنها راستای شعاعی (r) دارد. اگر بار چشمه (یا q) مثبت باشد ($q > 0$)، \vec{E} در جهت \hat{r} خواهد بود؛ یعنی میدان الکتریکی یک بار مثبت در هر نقطه دلخواه از فضای اطراف آن، در راستای خط واصل میان بار q و نقطه‌ی مورد نظر، و در جهت دور شدن از آن است. (شکل الف) اگر بار چشمه منفی باشد ($q < 0$)، میدان در همان راستا و در خلاف جهت \hat{r} خواهد بود. (شکل ب) (۱۴-۱)

به طور کلی، میدانی که یک بار نقطه‌ای در فضا ایجاد می‌کند، به شکل بردارهایی در راستای شعاع‌های فرض می‌شود که بار چشمه در مرکز آن قرار گرفته است.



شکل ۱۴-۱

برهم‌نهی میدان‌های الکتریکی



اگر تعداد بار نقطه‌ای در فضا حضور داشته باشند، نیروی الکتریکی که بر بار آزمون q_0 وارد می‌شود، برابر با مجموع نیروهایی است که هر کدام از بارهای نقطه‌ای، به طور مستقل، بر بار q_0 وارد می‌کنند. اگر برایندهای نیروهای وارد بر q_0 با $\sum \vec{F}_i$ و نیروی وارده از هر بار q_i بر بار q_0 با \vec{F}_i (که i شماره‌ی بار چشمه است) نشان داده شود، داریم:

$$\sum \vec{F}_{q_0} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

و در مورد میدان الکتریکی در محل بار آزمون q_0 (که هر نقطه‌ی دلخواهی می‌تواند باشد)

داریم:

$$\vec{E} = \frac{\sum \vec{F}_{q_0}}{q_0} = \frac{\sum \vec{F}_i}{q_0} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F}_n}{q_0}$$

(۱) توجه کنید، نقطه را با مختصات (r, θ, φ) ، یعنی در مختصات کروی اعلام کردیم تا همین نکته را یادآور شویم که میدان در راستای شعاعی است.



و از آنجایی که هر کدام از جملات عبارت سمت راست، برابر با میدان الکتريکی حاصل از هر بار چشمه در مکان بار q_0 است، داریم:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

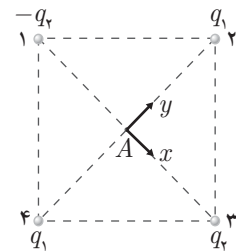
و این همان خاصیت برهم‌نهی میدان‌های الکتريکی است. میدان الکتريکی ناشی از یک آرایش بار مشخص در نقطه‌ای از فضا با مجموع برداری میدان مستقل حاصل تک‌تک از بارها در آن نقطه برابر است.

در شکل ۱۵-۱، بردار میدان الکتريکی را در نقطه‌ی A (مرکز مربع) به دست آورید. **حل.** با توجه به اصل برهم‌نهی میدان‌ها، داریم:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

برای محاسبه‌ی بردار تک‌تک میدان‌ها، و سپس جمع برداری آنها، بایستی دستگاه مختصات و مبدأ آن را مشخص کنیم. دستگاه مختصات مناسب، در شکل نشان داده شده است که در نقطه‌ی مرکز و در راستای قطرهای مربع انتخاب شده است. میدان ناشی از هر کدام از بارها عبارت است از:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{-kq_2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} \hat{i}, \quad \vec{E}_2 = \frac{kq_1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} (-\hat{j}) \\ \vec{E}_3 &= \frac{kq_2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} (-\hat{i}), \quad \vec{E}_4 = \frac{kq_1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} (\hat{j}) \\ \Rightarrow \vec{E}_A &= E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = \frac{-4kq_2}{a^2} \hat{i} \end{aligned}$$



شکل ۱۵-۱

بدین ترتیب، با استفاده از اصل برهم‌نهی، میدان ناشی از هر آرایش بار نقطه‌ای قابل محاسبه است. اما در واقعیت، معمولاً بارهایی که با آنها سروکار داریم، نقطه‌ای نیستند، بلکه به شکل اجسام باردار هستند که بار آنها به گونه پیوسته است، مانند سیم یا نخ باردار یا ورق و یا کره‌ی باردار. در این حالت‌ها، برای میدان الکتريکی و محاسبات مربوط به آن، مفهومی به نام «چگالی بار الکتريکی» تعریف می‌شود. چگالی بار الکتريکی در حالت کلی، بار الکتريکی در واحد طول، سطح یا حجم است و این‌که کدام یک از اینها انتخاب شود، به شرایط بارگذاری و شکل تأثیر آرایش آن در نقاط مورد نیاز برای محاسبات بستگی دارد. تعاریف مربوط به هر کدام از انواع چگالی در زیر آمده است:

- چگالی بار خطی، که با λ نشان داده می‌شود، برابر است با مقدار بار موجود در واحد طول. این تعریف، با توجه به شکل زیر با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\lambda = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta L}$$

در صورتی که بار بر روی نخ یا سیم توزیع شده باشد، می‌توان چگالی بار را خطی در نظر گرفت.



شکل ۱۶-۱

• چگالی بار سطحی، σ ، برابر است با مقدار بار موجود در واحد سطح. با توجه به شکل ۱۷-۱:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A}$$

بار سطحی باری است که روی سطحی مانند یک ورق، یک پوسته‌ی کروی و هر سطح دیگری مانند آنها توزیع شده باشد.

• چگالی بار حجمی، ρ ، برابر است با مقدار بار موجود در واحد حجم. با توجه به شکل ۱۸-۱:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

بار حجمی باری است که در حجمی از جسم پخش شده باشد، مانند بار پخش شده در داخل کره نارسانا.

محاسبه‌ی میدان در توزیع بارهای غیرنقطه‌ای چگونه است؟ این کار با تقسیم جسم باردار به قسمت‌های بسیار کوچکی انجام می‌شود و هر قسمت معادل با یک بار نقطه‌ای با مقدار Δq در نظر گرفته می‌شود؛ در نتیجه این تقسیم‌بندی، میدان الکتریکی در نقطه‌ی دلخواهی از فضا، از برآیند میدان‌های حاصل از هر کدام از بارهای نقطه‌ای فرضی Δq به دست می‌آید. در این حالت، جسم به مجموعه‌ای از تعداد زیادی بار نقطه‌ای تبدیل می‌شود. Δq ، و به عبارت بهتر، dq ، جزء بار الکتریکی جسم، در توزیع بار خطی از رابطه‌ی $dq = \lambda \cdot dl$ ، در توزیع بار سطحی از رابطه‌ی $dq = \sigma dA$ و در توزیع بار حجمی از رابطه‌ی $dq = \rho dV$ به دست می‌آید. محاسبه‌ی میدان ناشی از هر جزء بار، با توجه به رابطه میدان الکتریکی در زیر آمده است، میدان ناشی از جزء بار، dq که در مکان \vec{r} از فضا واقع است، در نقطه‌ی A ، واقع در \vec{r}_0 ، برابر است با:

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \frac{k dq}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}$$

که در آن $|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2$ معادل r^2 ، و $\frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}$ معادل عبارت \hat{r} در رابطه‌ی میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای واقع در مبدأ مختصات است.

حال برای به دست آوردن میدان (\vec{E}) ناشی از کل توزیع بار جسم در نقطه‌ی \vec{r}_0 کافیت اجزای کوچک میدان الکتریکی، یا $d\vec{E}$ ها را با یکدیگر جمع کنیم. با توجه به پیوسته بودن تقریبی توزیع بار، این مجموع (\sum) به جمع انتگرالی تبدیل می‌شود:

$$\vec{E} = \int \frac{k dq}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r})$$

و این انتگرال بر روی تمام جسم انجام می‌شود.

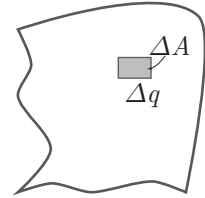
برای هر کدام از انواع توزیع بار، شکل رابطه‌ی انتگرالی با توجه به تفاوت در شکل dq در زیر

آمده است:

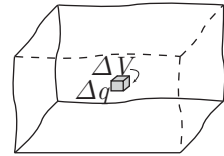
$$\vec{E} = \int \frac{k \lambda dL}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r})$$

$$\vec{E} = \iint \frac{k \sigma dA}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r})$$

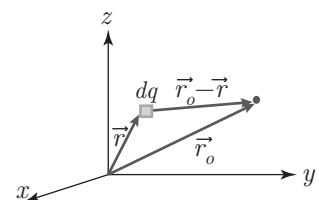
$$\vec{E} = \iiint \frac{k \rho dV}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r})$$



شکل ۱۷-۱



شکل ۱۸-۱



شکل ۱۹-۱



انتگرال چندگانه



اگر تابع f روی مستطیل $Q = [a, b] \times [c, d]$ پیوسته باشد، آنگاه f روی Q انتگرال پذیر است. به علاوه، مقدار انتگرال را می‌توان با انتگرال‌گیری مکرر به دست آورد. این انتگرال روی Q را به شکل زیر نشان می‌دهند:

$$\iint_Q f = \int_c^d \left[\int_a^b f(a, b) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

می‌دانیم که اگر L خطی در صفحه‌ی یک ورق باشد و $d(x, y)$ فاصله‌ی نقطه‌ی (x, y) تا خط L باشد گشتاور لختی ورق حول L با رابطه‌ی زیر معلوم می‌شود:

$$I_L = \iint_S d^2(x, y) dx dy$$

که در آن (x, y) نقطه‌ای از صفحه‌ی S محسوب می‌شود. به عنوان مثال گشتاور لختی حول محور x که با I_x نشان داده می‌شود برابر است با:

$$I_x = \iint_S y^2 dx dy$$

و نیز گشتاور لختی قطبی حول مبدأ که با I_0 نمایش داده می‌شود برابر است با:

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy$$

یک ورق نازک با چگالی ثابت c به دو دایره متحد‌المركز به شعاع‌های a و b و $0 < b < a$ به مرکز مبدأ محدود است. می‌خواهیم گشتاور لختی قطبی آن را محاسبه کنید. **حل.** I_0 برای این ورق برابر است با:

$$I_0 = c \iint_S (x^2 + y^2) dx dy$$

که در آن ناحیه‌ای است که در چنین بازه‌ای قرار دارد:

$$b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$$

$$I_0 = c \iint_{S(a)} (x^2 + y^2) dx dy - c \iint_{S(b)} (x^2 + y^2) dx dy$$

که $S(a)$ و $S(b)$ قرص‌هایی دایره‌ای شکل به شعاع‌های a و b هستند. نخست برای محاسبه‌ی انتگرال روی $S(a)$ می‌توانیم از انتگرال‌گیری در پی استفاده کنیم:

$$\iint_{S(a)} (x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2) dy \right] dx = \frac{\pi a^4}{4}$$

همچنین انتگرال روی $S(b)$ نیز به شکل همین رابطه محاسبه می‌شود. بنابراین برای گشتاور لختی قطبی داریم:

$$I_0 = \frac{\pi c}{4} (a^4 - b^4) = \pi c (a^2 - b^2) \frac{(a^2 + b^2)}{4} = m \frac{a^2 + b^2}{4}$$

که m جرم ورق است که با رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$m = \pi c(a^2 - b^2)$$

مفهوم انتگرال چندگانه را می‌توان از فضای دوبعدی (انتگرال دوگانه) به فضای n بعدی برای هر $n \geq 3$ تعمیم داد. f که «انتگرالده» نامیده می‌شود، یک میدان اسکالر است که روی مجموعه‌ای مانند S از فضای n بعدی معین و کراندار است. f روی S را انتگرال n گانه می‌نامند و آن را به شکل زیر مشخص می‌کنند

$$\int \cdots \int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

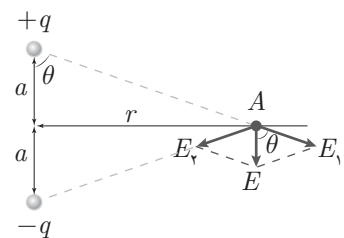
این انتگرال را یا به صورت n انتگرال پی‌درپی و یا به صورت انتگرال برداری $\int_S f(\vec{x}) d\vec{x}$ با یک علامت انتگرال نشان می‌دهند که در آن $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$. انتگرال سه‌گانه وقتی است که $n = 3$ باشد. در این حالت به جای (x_1, x_2, x_3) می‌نویسیم (x, y, z) و آن را به شکل زیر نمایش می‌دهیم

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{یا} \quad \iiint_S f$$

دوقطبی الکتریکی



به مجموعه‌ی دو بار الکتریکی با بارهای مختلف، دوقطبی الکتریکی می‌گویند. دو بار $+q$ و $-q$ را در نظر بگیرید. که در فاصله‌ی $2a$ از هم قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی در نقطه‌ی A که از فاصله‌ی r از وسط دو بار و روی عمودمنصف آنها قرار گرفته است را مطابق شکل با برآیندگیری از دو میدان \vec{E}_1 و \vec{E}_2 به دست می‌آوریم.



شکل ۱-۲۰

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ E_1 &= E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2 + r^2} \\ E &= 2E_1 \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \\ \Rightarrow E &= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2 + r^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + r^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

بنابراین میدان دوقطبی در نقطه‌ی A که در فاصله‌ی معقولی از دوقطبی قرار دارد به دست آمد. در صورتی که A در فاصله‌ی بسیار دورتری از دوقطبی قرار داشته باشد ($a \ll r$). با صرف نظر از ترم‌های $\frac{a}{r}$ مرتبه‌ی دو، میدان تقریبی نقطه‌ی A را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$E \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2aq}{r^3}$$



عبارت $2aq$ به اندازه‌ی لنگر دوقطبی الکتریکی معروف است و آن را با P نشان می‌دهند. با این تعریف، عبارت میدان الکتریکی ناشی از دوقطبی در فواصل دور از آن، به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{P}{r^3}$$

توجه کنید که میدان الکتریکی در فواصل دور از دوقطبی با عکس توان سوم فاصله متناسب است. مسئله‌ی دوقطبی بسیاری مواقع در بررسی خواص عایق‌ها و دی‌الکتریک‌ها مطرح می‌شود. لنگر دوقطبی \vec{P} در جهت خط‌اصل بار منفی به مثبت آن (\vec{d}) است و با رابطه‌ی زیر معلوم می‌شود:

$$\vec{P} = q \cdot \vec{d}$$

مطابق شکل، چنانچه این دوقطبی در میدان الکتریکی یکنواخت \vec{E} قرار بگیرد، بر هر یک از دو بار نیرویی وارد می‌شود که خلاف جهت هم هستند. دو نیروی وارد شده هم‌اندازه و در جهت مخالف هم و از دو نقطه اثر متفاوت وارد می‌شوند. بنابراین گشتاور خالصی ایجاد می‌کنند که تمایل بر چرخاندن دوقطبی دارد تا آن را با میدان هم‌جهت سازد. نیروی مؤثر در تولید گشتاور دوقطبی نیروی عمود بر راستای دوقطبی است که بر هر یک از بارها به صورت مجزا از طرف میدان وارد می‌شود. اگر زاویه‌ی راستای دوقطبی با راستای میدان θ باشد، گشتاور T که حول محور گذرنده از مرکز دوقطبی (O) وارد می‌شود به صورت زیر است:

$$T = 2 \times \frac{d}{4} \times F_n = d \cdot F \cdot \sin \theta = d \cdot (qE) \cdot \sin \theta = PE \cdot \sin \theta \Rightarrow T = PE \sin \theta$$

عبارت به‌دست آمده برای گشتاور دوقطبی به بیان بهتر همان ضرب خارجی بردارهای لنگر دوقطبی و میدان الکتریکی یکنواختی است که دوقطبی در آن قرار گرفته است.

$$\vec{T} = \vec{P} \times \vec{E}$$

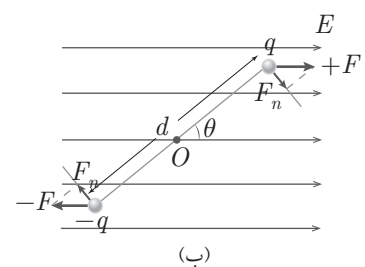
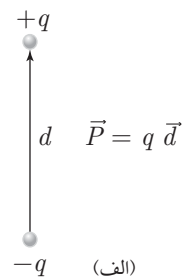
این بردار گشتاور، همان گشتاوری است که تمایل به چرخش دوقطبی و هم‌راستا ساختن آن با میدان یکنواخت E دارد.

فرض کنید امتداد لنگر دوقطبی با میدان E زاویه‌ی θ می‌سازد و می‌خواهیم آن را به زاویه‌ی θ برسانیم. کار لازم برای چنین تغییری در سیستم ذخیره می‌شود. این کار از برآیندگیری گشتاور دوقطبی در جزء تغییر زاویه به‌دست می‌آید. برای محاسبه‌ی کار، داریم:

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} T d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} PE \sin \theta \cdot d\theta \\ &= PE [-\cos \theta]_{\theta_0}^{\theta} = PE (\cos \theta_0 - \cos \theta) \end{aligned}$$

اگر مبنای زاویه را 90° در نظر بگیریم، یعنی فرض کنیم زاویه‌ی اولیه‌ی لنگر دوقطبی با میدان $\frac{\pi}{2}$ است، کار لازم برای ایجاد وضعیت θ در این حالت به شکل عبارت زیر است:

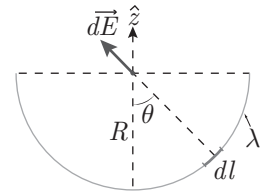
$$W = -PE \cos \theta = -\vec{P} \cdot \vec{E}$$



شکل ۱-۲۱ الف) دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی یکنواخت. ب) بردار لنگر دوقطبی.



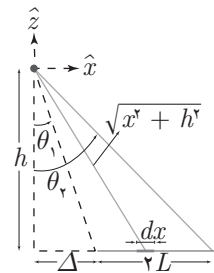
۱. فرض کنید بار با چگالی خطی λ بر روی نیم دایره‌ای به شعاع R توزیع شده است. می‌خواهیم \vec{E} را در مرکز نیم دایره بیابیم (شکل ۲۲-۱).



شکل ۲۲-۱

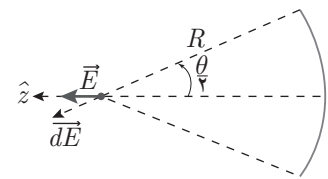
۲. میله‌ای به طول $2l$ و چگالی بار ثابت λ داریم. می‌خواهیم میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار بر روی این میله را در نقطه‌ای به فاصله‌ی h ، که بر روی عمود منصف میله واقع است، به دست آوریم.

۳. در شکل (۲۳-۱)، مثال قبل را تعمیم داده‌ایم. تقارن موجود در آن دیگر وجود ندارد و می‌بایست میان برابند را هم در جهت افقی و هم در جهت عمودی محاسبه کنیم.



شکل ۲۳-۱ شکل سؤال ۳.

۴. فرض کنید سیمی به شکل قطاعی از دایره به شعاع R و زاویه‌ی θ ، حامل چگالی بار خطی λ داشته باشیم. میدان را در مرکز این قطاع می‌خواهیم. (شکل ۲۴-۱)



شکل ۲۴-۱

۵. نیم کره‌ای به شعاع R دارای چگالی بار یکنواخت سطحی σ است. می‌خواهیم میدان الکتریکی \vec{E} را در مرکز نیم کره بیابیم.

۶. میدان حاصل از نیم کره‌ی مثال قبل در نقطه‌ای به فاصله‌ی R بالای مرکز نیم کره چقدر است؟

۷. فرض کنید نقطه‌ای درون کره‌ای به شعاع R و چگالی بار سطحی یکنواخت σ قرار دارد. فاصله‌ی نقطه از مرکز کره h است. می‌خواهیم میدان را در این نقطه بیابیم.

۸. بار با چگالی بار سطحی ثابت σ بر روی دیسک دایره‌ای شکل به شعاع R قرار دارد. میدان در نقطه‌ی A به فاصله‌ی h در بالای مرکز دیسک را بیابید.

۹. بار با چگالی ثابت σ بر روی صفحه‌ی دوبعدی که از هر دو بُعدش تا بی نهایت ادامه یافته، پخش شده است. می‌خواهیم میدان را در نقطه‌ای بالای صفحه و به فاصله‌ی h از آن محاسبه کنیم.

۱۰. کره‌ای به شعاع R دارای چگالی بار حجمی یکنواخت ρ است. می‌خواهیم میدان را در نقطه‌ای به فاصله‌ی h از مرکز کره حساب کنیم.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۱



۱. جزئی کوچک از نیم‌دایره را در نظر بگیرید که با زاویه θ در شکل مشخص شده است. قرینه‌ی این جزء، در زاویه $-\theta$ وجود دارد که میدان حاصل از آن، با توجه یکنواخت بودن توزیع بار خطی، برابر با $d\vec{E}$ و دارای مؤلفه‌ای افقی در جهت مخالف و مؤلفه‌ای عمودی برابر با مؤلفه‌ی عمودی $d\vec{E}$ خواهد داشت.

بنابراین تقارن، هر $d\vec{E}$ در نهایت تنها مؤلفه‌ی عمودی خود را باقی خواهد گذاشت، و محاسبه‌ی مؤلفه‌ی افقی میدان صفر را نتیجه می‌دهد. در نتیجه، میدان را در راستای z محاسبه می‌کنیم. با توجه به رابطه‌ی گفته شده داریم:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int |dE_z| \hat{z} = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{k dq}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2} (\cos \theta) \cdot \hat{z}$$

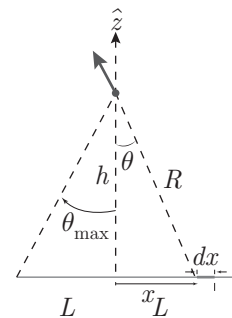
$|\vec{r}_0 - \vec{r}|$ در این مثال، R است. نقطه‌ی \vec{r}_0 که میدان در آن محاسبه می‌شود، در این مثال مبدأ مختصات است و در نتیجه $\vec{r}_0 = \vec{0}$ داریم:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda dL}{R^2} \cos \theta \cdot \hat{z} = k \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R d\theta}{R^2} \cos \theta \cdot \hat{z} \\ &= \frac{k \lambda}{R} (\sin \theta)_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{z} = \frac{2k \lambda}{R} \hat{z} \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R} \hat{z} \end{aligned}$$

و بدین ترتیب، میدان در مرکز نیم‌دایره محاسبه شد.

۲. با توجه به شکل (۲۵-۱) و برقراری تقارن (همان طور که در مثال قبل گفته شد)، داریم:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int d\vec{E} = \int |dE_z| \hat{z} = \int_{-L}^L \frac{k \cdot dq}{R^2} \cos \theta \hat{z} \\ &= k \int_{-L}^L \frac{\lambda \cdot dx}{R^2} \cos \theta \hat{z} = k \int_{-L}^L \frac{\lambda dx}{x^2 + h^2} \cos \theta \hat{z} \\ &= k \lambda \int_{-L}^L \frac{dx}{x^2 + h^2} \cos \theta \hat{z}, \quad \begin{cases} x = h \tan \theta \\ dx = h \cdot \sec^2 \theta d\theta \end{cases} \\ \Rightarrow \vec{E} &= k \lambda \int_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}} \frac{h \sec^2 \theta d\theta}{h^2 \tan^2 \theta + h^2} \cos \theta \hat{z}, \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \\ &= \frac{k \lambda}{h} \int_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}} \cos \theta d\theta \hat{z} \\ &= \frac{k \lambda}{h} (\sin \theta)_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}} = \frac{k \lambda}{h} \cdot \frac{2l}{\sqrt{l^2 + h^2}} \hat{z} \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \frac{L}{h \sqrt{L^2 + h^2}} \cdot \hat{z} \end{aligned}$$



شکل ۲۵-۱

۳. رابطه‌ای که برای محاسبه میدان عمودی استفاده می‌شود، همان رابطه‌ی مثال قبل است، با این تفاوت که محدوده‌ی θ در مورد آن متفاوت است. در این جا زاویه از θ_1 تا θ_2 تغییر می‌کند، داریم:

$$E_z = \frac{k\lambda}{h} (\sin \theta)_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{k\lambda}{h} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

و در مورد میدان افقی، داریم:

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{k\lambda dx \sin \theta}{x^2 + h^2} = \frac{k\lambda}{h} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{k\lambda}{h} (-\cos \theta)_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{k\lambda}{h} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{k\lambda}{h} [(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)\hat{x} + (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)\hat{z}] \end{aligned}$$

دو حالت خاص این مثال، حالات پرکاربردی هستند که بهتر است میدان‌های مربوط به آنها محاسبه شود:

الف) خط باری که از دو طرف تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد. این حالت، وقتی حاصل می‌شود که در این مثال، θ_1 به $\frac{\pi}{2}$ و θ_2 به $-\frac{\pi}{2}$ میل کند. در نتیجه میدان افقی و عمودی چنین مقداری خواهد داشت:

$$E_{\text{عمودی}} = \frac{2k\lambda}{h} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h}$$

$$E_{\text{افقی}} = 0$$

ب) خط باری که از $\theta_1 = 0$ تا $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ کشیده شده باشد. بدین معنی که از مبدأ مشخص شده آغاز شود و از سمت راست نامتناهی باشد. میدان در نقطه‌ای مشابه این مثال که در فاصله h بالای لبه چپ میله قرار گرفته است، بدین ترتیب خواهد بود:

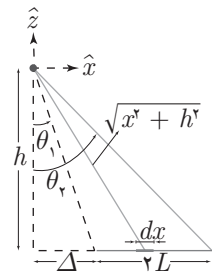
$$E_{\text{عمودی}} = \frac{k\lambda}{h}$$

$$E_{\text{افقی}} = \frac{k\lambda}{h}$$

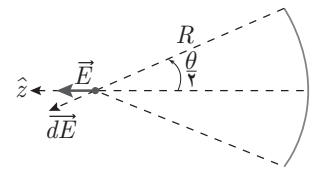
و بدین ترتیب، میدان در این حالت، مستقل از مقدار h ، با افق زاویه‌ی 45° می‌سازد. ۴. مانند مثال ۱، رابطه‌ای مشابه برای میدان داریم. چرا که تقارن، با در نظر گرفتن مبدأ زاویه منطبق بر خط تقارن این قطاع، مانند مثال ۱ برقرار خواهد بود و تنها تفاوت در محدوده‌ی θ خواهد بود که در این مورد از $-\frac{\theta}{2}$ تا $\frac{\theta}{2}$ متغیر است. بنابراین، بنا بر رابطه‌ی به‌دست آمده در مثال ۱ داریم:

$$\vec{E} = \frac{k\lambda}{R} (\sin \theta)_{-\theta/2}^{\theta/2} \hat{z} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin \frac{\theta}{2} \hat{z}$$

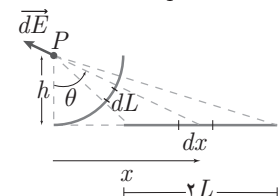
نکته‌ای با بررسی چهار مثال حل شده به‌دست می‌آید. به شکل ۲۸-۱ دقت کنید. قطاعی از دایره به شعاع h را (همان طور که در شکل نشان داده شده است) در نظر بگیرید. همان‌گونه



شکل ۱-۲۶



شکل ۱-۲۷



شکل ۱-۲۸



که دیدیم، میدان ناشی از جزء dx میله در نقطه‌ی P با چنین رابطه‌ای به دست می‌آید:

$$|dE| = \frac{k\lambda dx}{x^2 + h^2} = \frac{k\lambda dx}{x^2 + h^2}$$

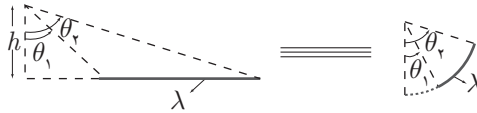
با تغییر متغیر $x = h \tan \theta$ داریم:

$$dx = h(1 + \tan^2 \theta)d\theta \Rightarrow |dE| = \frac{k\lambda}{h}d\theta$$

حال فرض کنید همین مقدار بار بر روی جزء dL از قطاع دایره‌ای به مرکز O که در شکل نشان داده شده است، قرار می‌گرفت. برای میدان حاصل از این جزء در نقطه‌ی O داریم:

$$|dE| = \frac{k\lambda dL}{h^2} = \frac{k\lambda h d\theta}{h^2} \Rightarrow |dE| = \frac{k\lambda}{h}d\theta$$

که همان نتیجه قبل است. بنابراین از نقطه‌ی O ، میله‌ی باردار به صورت نیم‌دایره‌ای به شعاع h دیده می‌شود که در ناحیه‌ای که بین θ_1 و θ_2 ، که خود محدوده‌ای است که میله در آن قرار دارد، قرار گرفته است. این هم‌ارزی در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۲۹-۱

۵. بنابر تقارن، با توجه به مثال‌های قبل (به خصوص مثال نیم‌دایره) معلوم می‌شود که میدان فقط مؤلفه‌ی عمودی دارد. داریم:

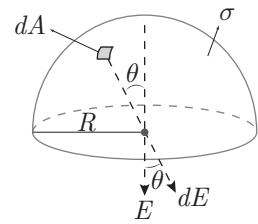
$$E = \int dE_{\text{عمودی}} = \int \frac{k\sigma dA}{R^2} \cos \theta$$

عبارت $dA \cos \theta$ که در انتگرال بالا حاصل شد، برابر با مساحت تصویر جزء dA از نیم‌کره بر روی دایره‌ی عظیمه‌ی آن است. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، از آنجا که جزء سطح روی کره تقریباً به شکل مستطیلی است که دو ضلع آن مستقیماً بر روی سطح صفحه تصویر می‌شوند و دو ضلع دیگرش در $\cos \theta$ ضرب شده و تصویر می‌شوند و بدین ترتیب، قطعه‌ای که دقیقاً بالای نیم‌کره (نقطه‌ی A در شکل) قرار گرفته باشد، مساحت تصویری برابر با مساحت خودش دارد و برای قطعه‌ای که در زاویه‌ی 90° واقع است (یعنی مثلاً در نقطه‌ی B در شکل) مساحت تصویر شده‌اش تقریباً صفر است. بنابراین:

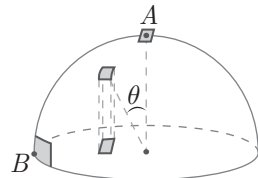
$$E = \int \frac{k\sigma}{R^2} (dA \cos \theta) = \frac{k\sigma}{R^2} \int dA_{\text{سایه}} = \frac{k\sigma}{R^2} A_{\text{قاعده}} = \frac{k\sigma}{R^2} \cdot \pi R^2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

البته، از طریق انتگرال‌گیری در مختصات کروی هم می‌توان به همین عبارت برای میدان نیم‌کره در نقطه‌ی مورد نظر دست پیدا کرد:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{k\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{R^2} \cos \theta = 2\pi k\sigma \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{2k\pi\sigma}{2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{aligned}$$



شکل ۳۰-۱



شکل ۳۱-۱

۶. بنابر تقارن و از آن چه در مثال‌های قبل دیدیم، در اینجا نیز میدان برآیند تنها در راستای عمودی است. داریم:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{k\sigma (\cos \frac{\theta}{2})}{(2R \cos \frac{\theta}{2})^2} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{k\sigma \times 2\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\pi k\sigma}{2} \int_0^{\pi/2} 2 \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 2\pi k\sigma \left(-\cos \frac{\theta}{2} \right)_0^{\pi/2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

۷. باز هم تقارن داریم و در نتیجه‌ی آن میدان تنها در راستای z مؤلفه دارد.

$$E = E_z = k \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{d^2} \cos \alpha$$

که در آن جزء مساحت در مختصات کروی است که در بخش مربوط به مختصات کروی به دست آمده است. فاصله‌ی جزء مساحت از نقطه‌ی A یا d ، به شکل زیر به دست می‌آید (شکل ۳۴-۱).

$$d = \sqrt{(R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta - h)^2}$$

همچنین برای زاویه‌ای که راستای میدان حاصل از جزء مساحت در نقطه‌ی A با راستای عمودی می‌سازد، داریم:

$$\begin{aligned} dE_z &= dE \cos \alpha = dE \frac{R \cos \theta - h}{d} \\ &= dE \frac{R \cos \theta - h}{\sqrt{(R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta - h)^2}} \end{aligned}$$

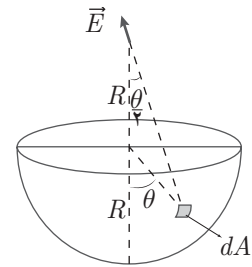
بنابراین میدان برآیند به شکل زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} E_z &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{[(R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta - h)^2]^{3/2}} (R \cos \theta - h) \\ &= 2\pi k\sigma \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{R^2 \sin \theta d\theta (R \cos \theta - h)}{(R^2 + h^2 - 2Rh \cos \theta)^{3/2}} \end{aligned}$$

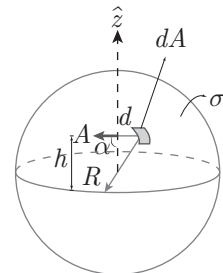
در این مرحله از انتگرال‌گیری، بایستی متغیر را تغییر دهیم. متغیر u و a را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$u = 2hR \cos \theta \Rightarrow du = -2Rh \sin \theta d\theta$$

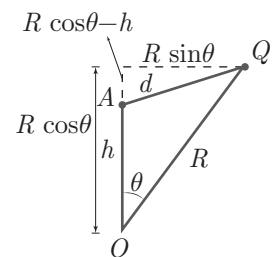
$$a = R^2 + h^2$$



شکل ۳۲-۱



شکل ۳۳-۱



شکل ۳۴-۱



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow E &= \frac{1}{2} \pi k \sigma R^2 \left[\int \frac{-u du \cdot R}{\sqrt{h^2 R^2 (a-u)^{3/2}} + \frac{1}{2} R} \int \frac{du}{(a-u)^{3/2}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \pi k \sigma R^2 \left[\frac{R}{\sqrt{h^2 R^2}} \left(\int \frac{(a-u) du}{(a-u)^{3/2}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \int \frac{adu}{(a-u)^{3/2}} \right) + \frac{1}{2} R \int \frac{du}{(a-u)^{3/2}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \pi k \sigma R^2 \left[\frac{1}{\sqrt{R h^2}} (-2\sqrt{a-u}) + \frac{a}{\sqrt{R h^2}} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{-2}{\sqrt{a-u}} + \frac{1}{2} R \cdot \frac{2}{\sqrt{a-u}} \right]_{u=-2hR}^{u=2hR} \\
 &= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{-2}{\sqrt{R h^2}} (R-h - (R+h)) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{2a}{\sqrt{R h^2}} - \frac{1}{R} \right) \times \left(\frac{1}{R-h} - \frac{1}{R+h} \right) \right] \\
 \Rightarrow E &= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{hR} - \left(\frac{h^2 + R^2}{2R h^2} - \frac{1}{R} \right) \left(\frac{2h}{R^2 - h^2} \right) \right] \\
 &= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{hR} + \frac{h^2 + R^2}{R^2 - h^2} \cdot \frac{1}{hR} + \frac{2h}{R(R^2 - h^2)} \right] \\
 \Rightarrow E &= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{hR} - \frac{R^2 + h^2}{R(R^2 - h^2)} \right] \\
 &= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{hR} - \frac{1}{hR} \cdot \frac{R^2 - h^2}{R^2 - h^2} \right] = 0
 \end{aligned}$$

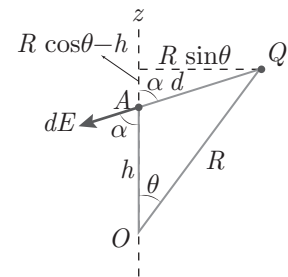
بنابراین، معلوم شد که میدان الکتریکی در داخل کره‌ی باردار با بار یکنواخت سطحی صفر است.

۸. جزئی از مساحت را مطابق شکل ۳۶-۱ در نظر بگیرید. بنابر تقارن میدان الکتریکی در جهت \hat{z} خواهد بود. بنابراین، تنها مؤلفه‌ی \hat{z} از میدان این جزء سطح مورد نیاز است. داریم:

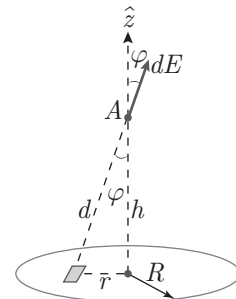
$$dE_z = \frac{k\sigma r dr d\theta}{d^2} \cos \varphi, \quad d^2 = r^2 + h^2$$

که در آن رابطه‌ی جزء سطح در مختصات کروی (و استوانه‌ای و قطبی) است که در بخش مربوط به آن به دست آمد. در مورد زاویه‌ی φ نیز داریم:

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi &= \frac{h}{d} = \frac{h}{(r^2 + h^2)^{1/2}} \\
 \Rightarrow dE_z &= \frac{k\sigma r dr d\theta \cdot h}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \\
 \Rightarrow E_z &= k\sigma h \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{r dr d\theta}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{1}{2} \pi k \sigma h \int_0^R \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}}, \quad \begin{cases} u = h^2 + r^2 \\ \Rightarrow du = 2r dr \end{cases}
 \end{aligned}$$



شکل ۳۵-۱



شکل ۳۶-۱