مکانیک (۱)

سینماتیک و دینامیک

برای داوطلبان المپیاد فیزیک

مؤلفان:

سیدعلی مدنی‌تنکابنی - سید بابک مظهری

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده‌ای را در بارور کردن و شکفتن استعدادهای دانش‌آموزان ایفا می‌کنند و باید به جرأت ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقاط جهان را تا حد زیادی افزایش دهند. کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند، لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی، خلأ موجود مخصوصاً برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود. در همین راستا انتشارات خوشخوان با استعانت از حضرت حق‌تعالی و به کمك تنی چند از اساتید و دبیران ممتاز ایران و نیز فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف که اغلب آنان در زمانی نه چندان دور، مدال‌آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده‌اند، کتاب‌هایی را تألیف و به دانش‌آموزان ارائه می‌نماید. امید است موردپسند و استفادهٔ دانش‌آموزان و دبیران این مرز و بوم قرار گیرند.

والسلام علی من اتبع الهدی

مقدمه مؤلف

مجموعه‌ی در نظر گرفته شده برای شما دانش‌آموزان عزیز، شامل کتاب‌هایی در زمینه‌های مکانیك، الکتریسیته، مغناطیس، نور، نجوم، و حرارت و سیالات می‌باشد. هر کتاب بنابر حجم مطالب، به بخش‌های کوچك‌تری که در جلدهای گوناگون آمده است، تقسیم شده است. با توجه به هدف اصلی این مجموعه که آمادگی دانش‌آموزان برای مراحل مختلف المپیاد فیزیك می‌باشد، مباحثش شامل مطالب علمی پایه‌ای و همچنین پیشرفته برای بالا بردن قابلیت شما در گذراندن مراحل مختلف المپیاد می‌باشد.

سعی ما در این مجموعه بر این بوده است که مباحث را از مفاهیم پایه‌ای تا پیشرفته با تشریح کافی و با ذکر مثال‌ها و مسائل مختلف، با کمترین پیچیدگی به شما آموزش داده شود، بنابراین با خواندن دقیق این مجموعه، می‌توانید به سطح بالایی از دانش فیزیك و قابلیت حل مسائل فیزیکی دست یابید.

توجه داشته باشید که دو قسمت مسائل حل شده (المپیادی و غیرالمپیادی) موجود در هر بخش، خود شامل نکات علمی مهمی هم در فهم مسائل و هم برای حل مسائل می‌باشد، لذا این قسمت‌ها را نیز مانند متن عملی ارائه شده به دقت مطالعه کنید.

قسمت اول مبحث مکانیك که در این کتاب (مکانیك (۱)) به آن پرداخته می‌شود، شامل دو بخش سینماتیك و دینامیك که از مهم‌ترین و پایه‌ای‌ترین مباحث فیزیکی است، می‌باشد. سعی ما در این کتاب بر این بوده است که با روندی متفاوت در ارائه مطالب، یادگیری مباحث ارائه شده را برای شما آسان‌تر و لذت‌بخش کنیم.

لازمه یادگیری بخش‌های دیگر مکانیك و حتی بخش‌هایی از دیگر مباحث فیزیکی این مجموعه، تسلط بر مباحث این کتاب است. بنابراین سعی کنید که با حوصله و دقت کافی این کتاب را مطالعه و مسائل آن را به دقت حل کنید.

آرزومندیم که با ارائه این کتاب و سایر کتاب‌های این مجموعه، به هدف خود در مورد رضایت شما عزیزان و همچنین بالا بردن سطح علمی دانش‌آموزان کشور عزیزمان دست یابیم.

babak.mazhari@gmail.com

alimadani : @ut.ac.ir

با آرزوی موفقیت

فهرست مطالب

۱

حرکت شناسی (سینماتیک)

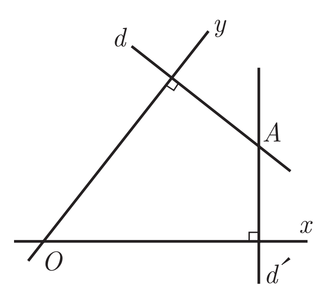
ما همه روزه در دنیای پیرامون خود حرکت‌های متفاوتی را مشاهده می‌کنیم که هرکدام در اثر عواملی خاص ایجاد شده‌اند. این عوامل تعیین کننده‌ی چگونگی حرکت یک جسم می‌باشند، برای مثال حرکت یک سیاره در مسیر دایروی به دور خورشید در اثر نیروی جاذبه‌ی بین آنها به وجود می‌آید و یا حرکت یک توپ تنیس در اثر ضربه‌ی شدید راکت در یک فاصله‌ی زمانی بسیار کوتاه به وجود می‌آید و سپس نیروی وزن توپ و مقاومت هوا هدایت کننده‌ی مسیر حرکت توپ خواهد بود.

علم سینماتیک به تحلیل و بررسی حرکات مختلف می‌پردازد بدون آنکه به عوامل ایجاد کننده‌ی این حرکات (نیروها) توجهی داشته باشد. به وسیله‌ی علم سینماتیک و روابطی که بر آن حاکم است می‌توان مشخصات حرکت یک جسم را تحلیل نمود. این مشخصات عبارتند از کمیت‌هایی که به وسیله‌ی دو کمیت بنیادی و اولیه‌ی مکان و زمان قابل تعریف می‌باشند و به آنها کمیت‌های ثانویه گفته می‌شود. در این فصل به بررسی این کمیت‌ها و چگونگی تحلیل حرکت یک جسم می‌پردازیم.

مکان و زمان

مکان و زمان دو کمیت پایه و بنیادی در علم فیزیک هستند و سیطره‌ی قوانین علم فیزیک را احاطه کرده‌اند به‌طوری که اگر ماهیت این دو کمیت را تغییر دهیم نگرشی نوین در علم فیزیک ایجاد خواهد شد همان‌طور که آلبرت انیشتین به وسیله‌ی نبوغ بی‌نظیر خود این کار را انجام داد و تحولی در علم فیزیک ایجاد نمود.

همان‌طور که می‌دانید ما در یک فضای سه‌بعدی زندگی می‌کنیم و برای اینکه بتوانیم به تحلیل حرکت‌های مختلف در این فضا بپردازیم باید یک ابزار ریاضی در اختیار داشته باشیم تا بتوانیم به وسیله‌ی آن به هر نقطه از فضا یک ترکیب ریاضی یکتا که مشخص کننده‌ی مکان آن نقطه در فضا باشد، نسبت بدهیم. از آنجایی که بسیاری از وقایع فیزیکی مانند حرکت یک جسم روی یک سطح صاف (مانند میز) را می‌توان در فضای دوبعدی یا صفحه فرض کرد ابتدا برای یک فضای دوبعدی این ابزار را به روش زیر ایجاد می‌نماییم:

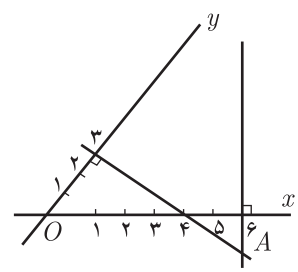


شکل ۱-۱

در یک صفحه دو محور غیرموازی دلخواه به نام‌های x و y مانند شکل (۱ـ۱) رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در یک نقطه مانند نقطه‌ی O قطع کنند. فرض کنید می‌خواهیم مکان نقطه‌ی A را به وسیله این دو محور در صفحه مشخص کنیم. یک خط از نقطه‌ی A می‌گذارنیم که بر محور

دلخواه y عمود باشد و نام آن را d می‌گذاریم. به طریق مشابه خطی عمود بر محور x از نقطه‌ی A می‌گذرانیم و نام آن را d' می‌گذاریم. حال اگر نقطه‌ی O را به عنوان نقطه‌ی مبدأ در صفحه در نظر بگیریم و دو محور x و y را به وسیله‌ی اعداد ریاضی درجه‌بندی کنیم، هر خط عمود بر محور y یا x نماینده‌ی یک عدد ریاضی و هر نقطه‌ی دلخواه در فضا حاصل تقاطع یک خط عمود بر محور y مانند d و یک خط عمود بر محور x مانند d' خواهد بود. اکنون کافیست ثابت کنیم که به ازای یک نقطه‌ی دلخواه در فضای دوبعدی مانند A تنها یک خط عمود بر هر یک از محورهای x و y می‌توان رسم کرد که از نقطه‌ی A بگذرد تا نشان دهیم به هر نقطه از فضا می‌توان یک ترکیب ریاضی منحصربه‌فرد نسبت داد. برای اثبات این مطلب از یک امر بدیهی در هندسه کمک می‌گیریم که می‌گوید دو خط موازی یکدیگر را قطع نمی‌کنند یا یکدیگر را در بی‌نهایت قطع می‌کنند. بنابراین دو خط عمود بر یک محور نمی‌توانند یکدیگر را در نقطه‌ی A قطع کنند زیرا دو خط عمود بر یک محور با یکدیگر موازی خواهند بود. پس توانستیم ابزاری ایجاد کنیم که ما را قادر می‌سازد به هر نقطه از صفحه یک زوج مرتب منحصربه‌فرد یعنی ترکیبی از دو عدد ریاضی نسبت دهیم که این اعداد ارتباط مستقیم با چگونگی درجه‌بندی محورهای x و y دارد و مکان نقطه را نسبت به نقطه‌ی مبدأ O مشخص می‌کند. قابل ذکر است که این دو عدد مستقل از یکدیگر می‌باشند، این بدین معناست که اگر در یک زوج مرتب مقدار x را ۳ اختیار کنیم هیچ تأثیری در مقدار y نخواهد داشت و y هر عددی را می‌تواند بپذیرد و مستقل از مقدار x می‌باشد. برای مثال مکان نقطه‌ی A را در (شکل ۱ـ۲) اینگونه نمایش می‌دهیم:

$$A = (x, y) = (۶, ۳)$$



شکل ۱-۲

قابل ذکر است که در فضای سه‌بعدی نیز می‌توان این کار را به وسیله‌ی سه خط که دوبه‌دو غیرموازی هستند انجام داد. در این حالت مکان هر نقطه از فضا را می‌توان به وسیله‌ی سه عدد مستقل از یکدیگر مشخص کرد.

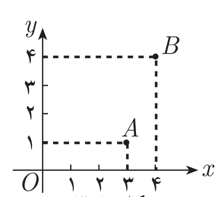
دستگاه مختصات

به ابزاری که به وسیله‌ی آن قادر باشیم مکان هر نقطه از فضا را به وسیله‌ی یک ترکیب ریاضی مشخص کنیم، دستگاه مختصات گفته می‌شود. نمونه‌ای که در قبل توضیح داده شد مثالی از یک دستگاه مختصات است. انواع مختلفی از دستگاه‌های مختصات وجود دارد که با توجه به مشخصات حرکت یک جسم دستگاه مختصات مناسب برای بررسی حرکت انتخاب می‌شود. ما در این کتاب از دستگاهی به نام دستگاه مختصات دکارتی برای حل مسائل استفاده خواهیم کرد و در قسمت المپیاد با گونه‌ی دیگری از دستگاه مختصات به نام دستگاه مختصات قطبی نیز به‌طور کامل آشنا خواهیم شد.

دستگاه مختصات دکارتی

دستگاه مختصات دکارتی در دوبعد متشکل از دو محور عمود بر هم می‌باشد که نقطه‌ی تقاطع این دو محور مبدأ دستگاه می‌باشد. به وسیله‌ی روشی که در قبل ارائه شد می‌توانیم به هر نقطه از فضای دو بعدی یا صفحه یک زوج مرتب یکتا نسبت دهیم مانند (شکل ۱ـ۳).

$$A = (x, y) = (۳, ۱) \qquad , \qquad B = (x, y) = (۴, ۴)$$



شکل ۱-۳

مکان و بردار

فرض کنید ما در مرکز یک دایره ایستاده‌ایم و می‌خواهیم مکان نقطه‌ای روی محیط دایره را مشخص کنیم. آیا در دست داشتن شعاع دایره برای تعیین مکان نقطه‌ای روی محیط آن کافی می‌باشد؟ جواب این سؤال منفی است. زیرا علاوه بر شعاع دایره جهت‌گیری آن نقطه نسبت به مرکز دایره عاملی تعیین کننده می‌باشد. بسیاری از کمیت‌های فیزیکی علاوه بر مقدار جهت نیز دارند مانند مکان و جابه‌جایی و ...، و همچنین کمیت‌هایی نیز وجود دارند که تنها به وسیله‌ی یک عدد که نشان دهنده‌ی مقدار آنهاست قابل بیان می‌باشند مانند زمان و جرم و ... .بردار ابزاریست برای بیان کمیت‌هایی که در آنها هر دو مشخصه‌ی جهت و اندازه تأثیرگذار می‌باشند.

بردار مکان

از نظر هندسی بردار مکان را می‌توان به صورت فلشی نمایش داد که ابتدای آن روی مبدأ مختصات و انتهای آن منطبق بر نقطه مورد نظر می‌باشد. نمایش یک بردار به صورت عددی ارتباط مستقیم با دستگاه مختصاتی دارد که بردار را در آن رسم می‌کنیم. نحوه‌ی نمایش بردار مکان در دستگاه مختصات دکارتی به وسیله‌ی ترکیبی از دو عدد ریاضی می‌باشد همان‌طور که مکان یک نقطه را در این مختصات مشخص کردیم که در ادامه بیشتر توضیح خواهیم داد.

بردار جابه‌جایی

جابه‌جایی یا تغییر مکان نیز مانند مکان یک کمیت برداری است. بردار جابه‌جایی را می‌توان به صورت فلشی نمایش داد که ابتدای آن نقطه‌ی شروع حرکت و انتهای آن نقطه‌ی پایان حرکت می‌باشد در نتیجه بردار جابه‌جایی تنها به نقاط ابتدا و انتهای حرکت وابسته می‌باشد و مستقل از مسیر حرکت است.

برای اینکه بیشتر مفهوم بردار را درک کنیم و با چگونگی کاربرد آن بیشتر آشنا شویم ابتدا باید با برخی از خواص و روابط بردارها آشنایی پیدا کنیم:

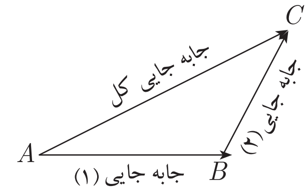
قوانین حاکم بر بردارها

بردار نیز همانند دستگاه مختصات یک تعریف ریاضی می‌باشد و در علم ریاضی تعاریف و روابط حاکم بر آنها به گونه‌ای شکل می‌گیرند که بتوان به وسیله‌ی آنها قوانین حاکم بر طبیعت را بیان و توجیه نمود. برای درک بهتر این موضوع برخی از روابط حاکم بر بردارها و ارتباط آنها با مشاهدات طبیعی را شرح می‌دهیم:

جمع برداری

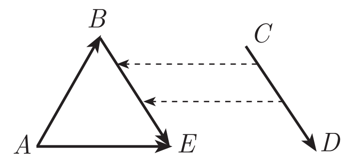
بسیاری از کمیت‌های ثانویه در فیزیک از جابه‌جایی یا تغییر مکان حاصل می‌شوند و همان طور که گفته شد جابه‌جایی یک کمیت برداری است، پس روابط حاکم بر بردارها باید به گونه‌ای تعریف شوند که به وسیله‌ی آنها بتوان هر گونه تغییرات در جابه‌جایی‌های مختلف را بیان نمود از این رو جمع برداری را می‌توان به شکل زیر تعریف نمود:

فرض کنید مطابق شکل (۱ـ۴) جسمی در اثر جابه‌جایی (۱) از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B تغییر مکان دهد و سپس در اثر جابه‌جایی (۲) از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C برود. آنچه مشاهده می‌شود این است که این جسم در نهایت در مجموع دو جابه‌جایی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی C تغییر مکان داده است و می‌توان بردار $\overrightarrow{AC}$ را که معرف جابه‌جایی کل جسم است به صورت مجموع دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ معرفی کرد. پس به‌طور کلی مجموع دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که ابتدای $\vec{b}$ بر انتهای $\vec{a}$ منطبق باشد به صورت برداری نمایش می‌دهیم که ابتدای آن منطبق بر ابتدای $\vec{a}$ و انتهای آن منطبق بر انتهای $\vec{b}$ باشد و آن را برآیند یا مجموع بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌نامیم.



شکل ۱-۴

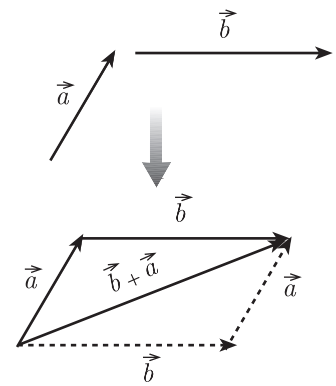
حال فرض کنید دو بردار ما به گونه‌ای انتخاب شوند که ابتدای یکی روی انتهای دیگری نباشد (مانند شکل ۱ـ۵). این حالت برای جابه‌جایی غیرممکن است زیرا جابه‌جایی به صورت پیوسته انجام می‌پذیرد اما برای بسیاری از کمیت‌های ثانویه تنها جهت و طول بردار اهمیت دارد و نقاط ابتدا و انتهای بردارها اهمیتی نخواهد داشت. در این حالت برای به‌دست آوردن برآیند دو بردار، یکی از آنها را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و آن را به گونه‌ای جابه‌جا می‌کنیم تا ابتدای آن بر انتهای بردار دیگر منطبق شود و سپس حاصل جمع دو بردار را به‌دست می‌آوریم.



شکل ۱-۵

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CD}\ \rightarrow\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$$

با توجه به مطالبی که گفته شد می‌توان روشی برای به‌دست آوردن مجموع دو بردار ارائه کرد بدین صورت که هرگاه دو بردار مورد نظر را مانند (شکل ۱ـ۶) به صورت اضلاع یک متوازی‌الاضلاع رسم کنیم یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع برابر با برآیند دو بردار خواهد شد.

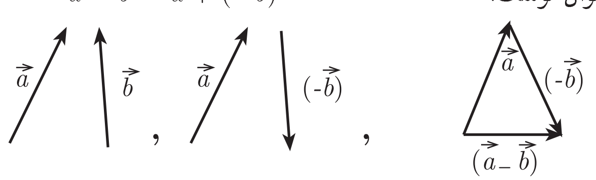


شکل ۱-۶

تفاضل دو بردار

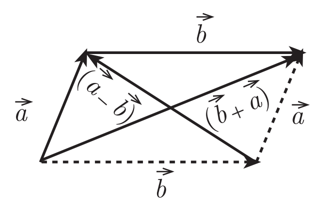
برای توضیح تفاضل دو بردار ابتدا باید قرینه‌ی یک بردار را شرح دهیم. قرینه‌ی بردار $\overrightarrow{AB}$، برداریست به همان اندازه و در خلاف جهت $\overrightarrow{AB}$ و یا به عبارت دیگر بردار $\overrightarrow{BA}$ قرینه‌ی بردار $\overrightarrow{AB}$ است. تفاضل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به شکل $(\vec{a}-\vec{b})$ به این معناست که بردار $\vec{a}$ را با قرینه‌ی بردار $\vec{b}$ جمع کنیم و می‌توان نوشت:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$



شکل ۱-۷

قابل ذکر است که در متوازی‌الاضلاعی که اضلاع آن دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد یک قطر برابر با حاصل جمع دو بردار و قطر دیگر بسته به جهت آن برابر با یکی از دو عبارت $(\vec{a}-\vec{b})$ یا $(\vec{b}-\vec{a})$ می‌شود.



شکل ۱-۸

ضرب عدد در بردار

در فیزیک عدد برای نمایش کمیت‌هایی استفاده می‌شود که تنها با یک مقدار قابل بیان هستند و جهت ندارند. به این کمیت‌ها، کمیت‌های اسکالر یا مقداری گفته می‌شود و از بردار برای نمایش کمیت‌هایی استفاده می‌شود که علاوه بر مقدار جهت نیز دارند. ضرب یک عدد در یک بردار در علم فیزیک نشان دهنده‌ی ضرب یک کمیت مقداری مانند زمان در یک کمیت برداری مانند

شکل ۱-۹

جابه‌جایی است و حاصل آن یک کمیت برداری می‌باشد. در ضرب عدد در یک بردار، جهت بردار ثابت می‌ماند و مقدار بردار با توجه به مقدار عدد ضرب شده تغییر می‌کند (مانند شکل ۱ـ۹).

ضرب بردار در بردار

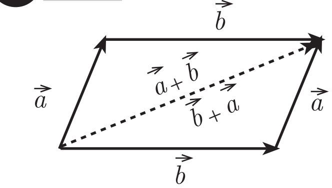
این ضرب نمایش دهنده‌ی ضرب دو کمیت برداری در یکدیگر می‌باشد و حاصل آن هم می‌تواند یک بردار باشد و هم می‌تواند یک عدد باشد. در آینده این نوع ضرب را بیشتر توضیح خواهیم داد.

مثال ۱

به صورت هندسی نشان دهید برای دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

حل. برای به‌دست آوردن طرف چپ تساوی ابتدای بردار $\vec{b}$ را روی انتهای بردار $\vec{a}$ قرار می‌دهیم و برای به‌دست آوردن طرف راست تساوی ابتدای بردار $\vec{a}$ را روی انتهای بردار $\vec{b}$ قرار می‌دهیم و در دو حالت مشاهده می‌کنیم بردار برآیند قطری از یک متوازی‌الاضلاع با اضلاع $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌باشد (شکل ۱ـ۱۰). به این خاصیت در جمع، خاصیت جابه‌جایی گفته می‌شود.



شکل ۱-۱۰

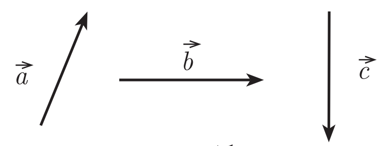
مثال ۲

با استفاده از رسم شکل ثابت کنید که رابطه‌ی زیر برای سه بردار دلخواه $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برقرار می‌باشد:

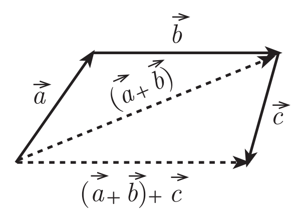
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

حل. سه بردار دلخواه $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به صورت فرضی مانند شکل (۱ـ۱۱) اختیار می‌نماییم. با توجه به طرف چپ تساوی ابتدا بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با هم جمع نموده و سپس بردار $\vec{c}$ را با برآیند این دو بردار جمع می‌نماییم. برای این کار ابتدای بردار $\vec{b}$ را روی انتهای بردار $\vec{a}$ قرار داده و سپس ابتدای بردار $\vec{c}$ را روی انتهای برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ قرار می‌دهیم. با توجه به تعریف جمع برداری انتهای برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در حالتی که ابتدای $\vec{b}$ روی انتهای $\vec{a}$ باشد همان انتهای بردار $\vec{b}$ خواهد بود در نتیجه طرف چپ تساوی را از نظر هندسی می‌توان مانند (شکل ۱ـ۱۲) رسم کرد.

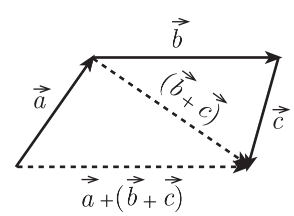
برای طرف راست تساوی به دلیل وجود پرانتز ابتدا باید برآیند دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به‌دست آوریم و سپس آن را با بردار $\vec{a}$ جمع نماییم. برای این کار ابتدای بردار $\vec{c}$ را روی انتهای بردار $\vec{b}$ قرار می‌دهیم و سپس ابتدای برآیند این دو بردار را که همان ابتدای بردار $\vec{b}$ می‌باشد بر انتهای بردار $\vec{a}$ منطبق می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که بردار برآیند نهایی همان بردار $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ خواهد بود. به این خاصیت در جمع خاصیت انجمنی گفته می‌شود.



شکل ۱-۱۱



شکل ۱-۱۲



شکل ۱-۱۳

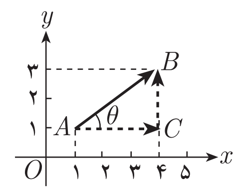
اکنون قوانین کلی حاکم بر بردارها را دانستیم و قادر هستیم نمایش بردار در دستگاه مختصات دکارتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بردار در دستگاه مختصات دکارتی

در یک فضای دوبعدی یا صفحه، هر بردار را می‌توان به صورت مجموعی از دو بردار دیگر نمایش داد و اگر ما این دو بردار را موازی با محورهای دستگاه مختصات در نظر بگیریم قادر خواهیم بود که هر برداری در صفحه را به صورت مجموع دو بردار موازی با محورهای دستگاه نمایش دهیم.

این روش برای ما بسیار مفید است زیرا به وسیله‌ی آن می‌توانیم مسائل پیچیده‌ی صفحه‌ای را به مسأله‌ای بر روی خط راست تبدیل کنیم و با تحلیل مسأله روی دو محور دستگاه مختصات به جواب مسأله دست یابیم.

برای این کار یک بردار به طول واحد در جهت محور x به نام $\vec{i}$ تعریف می‌کنیم و یک بردار به طول واحد در جهت محور y به نام $\vec{j}$ تعریف می‌کنیم، به این دو بردار، بردارهای یکه نیز گفته می‌شود. اکنون هر برداری در صفحه را می‌توانیم به صورت ترکیبی از این دو بردار واحد نمایش دهیم و مسأله‌ی صفحه‌ای را ساده‌سازی کنیم. برای مثال به (شکل ۱ـ۱۴) توجه نمایید، در این شکل می‌خواهیم بردار $\overrightarrow{AB}$ را به وسیله‌ی بردارهای یکه نمایش دهیم. این کار را به روش زیر انجام می‌دهیم:



شکل ۱-۱۴

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \ , \ \ \overrightarrow{AC} = (۴ - ۱)\vec{i} = ۳\vec{i}$$
$$\overrightarrow{CB} = (۳ - ۱)\vec{j} = ۲\vec{j} \ \rightarrow \ \overrightarrow{AB} = ۳\vec{i} + ۲\vec{j}$$

دیدیم که نحوه‌ی نمایش بردار در دستگاه مختصات دکارتی به شکل $a\vec{i} + b\vec{j}$ می‌باشد که در این ترکیب a و b دو عدد حقیقی می‌باشند و اگر این بردار، بردار مکان یک نقطه باشد a عدد محور x و b عدد محور y خواهد بود. با توجه به (شکل ۱ـ۱۴) و روابط مثلثاتی حاکم بر مثلث قائم‌الزاویه خواهیم داشت: ($|AB|$ نشان دهنده‌ی اندازه‌ی $\vec{AB}$ است)

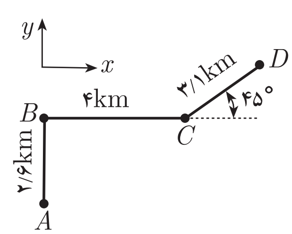
$$|BC| = |AB| \sin\theta \ , \ \ |AC| = |AB| \cos\theta$$
$$|AB|^۲ = |AC|^۲ + |CB|^۲$$

با داشتن مقدار بردار $\overrightarrow{AB}$ و زاویه‌ی θ می‌توانیم بردارهای $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CB}$ را به شکل زیر نمایش دهیم:

$$\overrightarrow{AC} = |AB| \cos\theta \vec{i} \ , \ \ \overrightarrow{CB} = |AB| \sin\theta \vec{j}$$
$$\overrightarrow{AB} = |AB| \cos\theta \vec{i} + |AB| \sin\theta \vec{j}$$

مثال ۳

یک پستچی از نقطه‌ی شروع حرکت خود مسیری را که در (شکل ۱ـ۱۵) نشان داده شده است می‌پیماید. بردار جابه‌جایی کل را در دستگاه مختصات دکارتی به‌دست آورده و اندازه‌ی آن و زاویه‌ی θ را که این بردار با محور x می‌سازد بیابید. ($\overrightarrow{BC} \| x$ و $\overrightarrow{AB} \| y$)



شکل ۱-۱۵

حل. با توجه به شکل پستچی حرکت خود را در ۳ مرحله انجام داده است. این مراحل را به صورت ۳ بردار نمایش می‌دهیم و سپس این بردارها را با یکدیگر جمع می‌نماییم:

$$\overrightarrow{AB} = ۲/۶\vec{j} \ , \ \ \overrightarrow{BC} = ۴\vec{i}$$
$$\overrightarrow{CD} = (۳/۱ \times \cos ۴۵)\vec{i} + (۳/۱ \times \sin ۴۵)\vec{j}$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$
$$= (۴ + ۳/۱ \times \cos ۴۵)\vec{i} + (۲/۶ + ۳/۱ \times \sin ۴۵)\vec{j}$$
$$\Rightarrow \ \overrightarrow{AD} = ۶/۱۹\vec{i} + ۴/۷۹\vec{j}$$

$$\Rightarrow \ |AD| = \sqrt{(۶٫۱۹)^{۲} + (۴٫۷۹)^{۲}} = ۷٫۸۳\text{km}$$

$$\sin\theta = \frac{۴٫۷۹}{۷٫۸۳} \ \rightarrow \ \theta = \sin^{-۱}(\frac{۴٫۷۹}{۷٫۸۳}) = ۳۷٫۷^{\circ}$$

دقت کنید که طول بردار $\overrightarrow{AD}$ برابر با مسافتی که پستچی طی می‌کند نیست بلکه برابر با کمترین مسافت بین دو نقطه‌ی A و D می‌باشد. مسافتی که پستچی می‌پیماید برابر است با:

$$\Delta S = |AB| + |BC| + |CD| = ۲٫۶ + ۴ + ۳٫۱ = ۹٫۷\text{km}$$

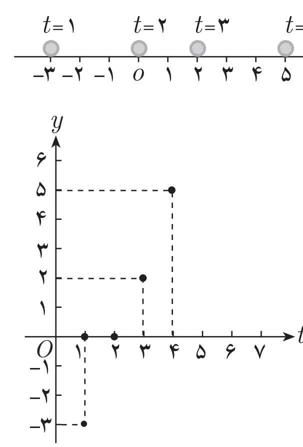
حرکت روی خط راست

در حرکت بر روی خط راست مسیر حرکت یک خط مستقیم مانند یکی از محورهای دستگاه مختصات می‌باشد و به همین دلیل تحلیل این حرکت بسیار ساده‌تر از تحلیل حرکت دوبعدی یا سه‌بعدی می‌باشد. در این نوع حرکت بردارهای جابه‌جایی مختلف و بردارهای مکان با یکدیگر موازی می‌باشند و به این دلیل محاسبات برداری بسیار ساده می‌شوند.

نمودار مکان ـ زمان

نمودار مکان ـ زمان، نموداری است که یکی از محورهای آن مکان و محور دیگر زمان می‌باشد و در یک حرکت مکان جسم را بر حسب زمان بیان می‌کند یا به عبارت دیگر مکان جسم را در هر لحظه بیان می‌کند. این نمودار ابزاری مفید برای حل مسائل سینماتیکی می‌باشد.

در (شکل ۱ـ۱۶) یک جسم نشان داده شده که بر روی محور ox در حال حرکت است. مکان این جسم را در هر لحظه می‌توان توسط برداری به شکل $a\vec{i}$ روی این محور نمایش داد، مثلاً در زمان $t = ۱\text{s}$ این جسم در مکان $x = -۳\vec{i}$ قرار دارد و در زمان‌های ۲، ۳ و ۴ ثانیه به ترتیب در مکان‌های $\circ\vec{i}$، $۲\vec{i}$ و $۵\vec{i}$ قرار دارد. به این ترتیب می‌توان این چهار نقطه را مطابق شکل روی نمودار مکان ـ زمان این جسم رسم کرد.



شکل ۱-۱۶

با در اختیار داشتن نمودار مکان ـ زمان می‌توانیم تعیین کنیم که یک جسم در هر لحظه در چه مکانی قرار دارد و یا بین دو لحظه‌ی متفاوت چه مقدار جابه‌جایی صورت گرفته است. نکته‌ی جالب توجه این است که نمودار مکان ـ زمان یک جسم همواره یک تابع است زیرا یک جسم در یک لحظه نمی‌تواند در دو مکان متفاوت حضور داشته باشد و همچنین این تابع پیوسته است زیرا یک جسم نمی‌تواند به‌طور ناگهانی از یک نقطه به نقطه‌ای با فاصله‌ی دور تغییر مکان دهد و مقید است که به طور پیوسته تغییر مکان دهد. نمودار مکان ـ زمان را می‌توان به صورت معادله نیز نشان داد که مکان را بر حسب زمان بیان می‌کند:

$$x = f(t) \xrightarrow{\text{برای مثال}} x = t^{۲} + ۳t + ۵$$

مثال ۴

معادله‌ی حرکت جسمی که بر روی خط راست حرکت می‌کند در SI به صورت $x = ۳t - ۴$ می‌باشد: الف) چه مدت پس از لحظه‌ی $t = \circ\text{s}$ متحرک به مبدأ می‌رسد؟ ب) متحرک در لحظه‌ی

$t = ۱\mathrm{s}$ در چه فاصله‌ای از مبدأ قرار دارد و جابه‌جایی آن بین دو لحظه‌ی $t = ۱\mathrm{s}$ و $t = ۵\mathrm{s}$ چه مقدار می‌باشد؟

حل. الف) متحرک زمانی به مبدأ حرکت می‌رسد که x برابر با صفر شود.

$$x = ۳t - ۴ = ۰ \;\rightarrow\; ۳t = ۴ \;\rightarrow\; t = \frac{۴}{۳}\mathrm{s}$$

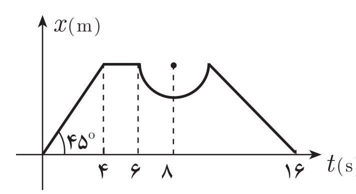
ب) متحرک در لحظه‌ی $t = ۱\mathrm{s}$ در فاصله‌ی یک متری از مبدأ قرار دارد

$$t = ۱\mathrm{s} \;\Rightarrow\; \vec{x_۱} = ۳ - ۴ = -۱\vec{i}$$
$$t = ۵\mathrm{s} \;\Rightarrow\; \vec{x_۲} = ۱۵ - ۴ = ۱۱\vec{i}$$
$$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{\Delta x}}_{\text{بردار جابه‌جایی}} = \vec{x_۲} - \vec{x_۱} = ۱۱\vec{i} - (-۱\vec{i}) = ۱۲\vec{i}$$

متحرک در بازه‌ی زمانی $۱\mathrm{s} < t < ۵\mathrm{s}$ به اندازه‌ی ۱۲ متر و در جهت مثبت محور x جابه‌جا شده است.

مثال ۵

نمودار مکان ـ زمان جسمی که روی خط راست حرکت می‌کند مطابق (شکل ۱ـ۱۷) می‌باشد مکان این جسم را در لحظات $t = ۷\mathrm{s}$ و $t = ۱۲\mathrm{s}$ بیابید و جابه‌جایی را بین این دو لحظه تعیین کنید. (منحنی بین لحظات ۶s و ۱۰s یک نیم‌دایره می‌باشد و مقیاس درجه‌بندی برای دو محور یکسان است.)

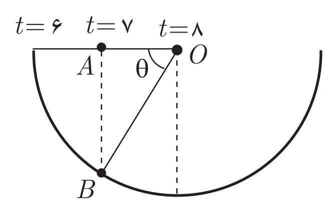


شکل ۱-۱۷

حل. به دلیل اینکه زاویه‌ی اولین خط ۴۵° درجه می‌باشد مکان در لحظه‌ی ۴s با زمان برابر و همان ۴ می‌شود و طبق نمودار تا لحظه‌ی $t = ۶\mathrm{s}$ مکان روی $x = ۴\mathrm{m}$ ثابت می‌ماند در لحظه‌ی $t = ۶\mathrm{s}$ نمودار وارد نیم‌دایره می‌شود و مکان در لحظه‌ی $t = ۷\mathrm{s}$ به شکل زیر محاسبه می‌شود.

مطابق (شکل ۱ـ۱۸) شعاع دایره معادل با زمانی برابر با ۲s می‌باشد پس می‌توان گفت:

$$\cos\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{R} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow\; \theta = ۶۰^\circ \;\rightarrow\; AB = R\sin\theta = ۲ \times \sin ۶۰ = \sqrt{۳} = ۱{,}۷۳$$
$$\Rightarrow\; x_{(t=۷\mathrm{s})} = ۴ - ۱{,}۷۳ = ۲{,}۲۷\mathrm{m}$$



شکل ۱-۱۸

و اما در $t = ۱۰\mathrm{s}$ مکان جسم به $x = ۴\mathrm{m}$ باز می‌گردد و پس از ۶ ثانیه به صفر می‌رسد پس برای $t = ۱۲\mathrm{s}$ داریم:

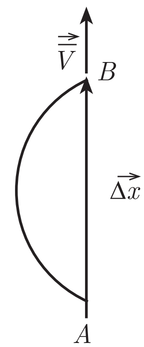
$$\text{شیب خط } m = \frac{۰ - ۴}{۱۶ - ۱۰} = -\frac{۲}{۳}$$
$$\Rightarrow\; x_{(t=۱۲\mathrm{s})} = x_{(t=۱۰\mathrm{s})} + (-\frac{۲}{۳}) \times (۱۲ - ۱۰) = ۴ - \frac{۴}{۳} = ۲{,}۶۷\mathrm{m}$$
$$\Rightarrow\; \Delta x = ۲{,}۶۷ - ۲{,}۲۷ = ۰{,}۴\mathrm{m}$$

به دلیل اینکه حرکت بر روی خط راست است محاسبات برداری مانند محاسبات عددی می‌باشند.

کمیت‌های ثانویه

پس از آشنایی با بردار به تعریف کمیت‌های ثانویه می‌پردازیم. کمیت‌های ثانویه، کمیت‌هایی هستند که مشخصات حرکت‌های مختلف را بیان می‌کنند و بررسی عمیق حرکت‌ها را امکان‌پذیر می‌سازد. سرعت، یکی از پرکاربردترین کمیت‌های ثانویه در علم فیزیک می‌باشد که از بردار جابه‌جایی ناشی می‌شود و در نتیجه یک کمیت برداری خواهد بود. ابتدا به تعریف سرعت متوسط می‌پردازیم و سپس سرعت لحظه‌ای را توضیح خواهیم داد.

سرعت متوسط

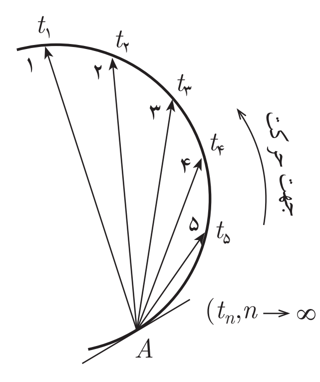


شکل ۱-۱۹

فرض کنید متحرکی روی یک مسیر دلخواه مانند (شکل ۱ـ۱۹) از نقطه‌ی A تا B تغییر مکان دهد. در طی این حرکت بردار سرعت متوسط این متحرک برابر خواهد بود با بردار جابه‌جایی بین دو نقطه‌ی A و B تقسیم بر زمان جابه‌جایی. بردار سرعت متوسط را با $\overline{\vec{v}}$ نمایش می‌دهیم و همان‌طور که از تساوی زیر مشاهده می‌شود سرعت متوسط به صورت ضرب یک عدد در بردار جابه‌جایی تعریف می‌شود پس خود برداریست هم جهت با بردار جابه‌جایی. یکای سرعت متوسط در SI طبق تعریف آن برابر است با متر تقسیم بر ثانیه:

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = (\frac{۱}{\Delta t})\overrightarrow{\Delta x}$$

سرعت لحظه‌ای



شکل ۱-۲۰

به (شکل ۱ـ۲۰) نگاه کنید. فرض کنید متحرکی در زمان t در نقطه‌ی A قرار دارد و این متحرک بر روی مسیر منحنی شکل در جهت نشان داده شده در حال حرکت است. اگر این متحرک در لحظه‌ی t_n از نقطه‌ی n عبور کند (n هر عدد طبیعی می‌تواند باشد) با دانستن بردار جابه‌جایی بین دو لحظه‌ی t و t_n می‌توان سرعت متوسط متحرک بین این دو لحظه را محاسبه نمود. با توجه به شکل ۱ـ۲۰ هر قدر مقدار n بزرگتر شود بازه‌ی زمانی حرکت یعنی $(t_n - t)$ کوچکتر خواهد شد و بردار جابه‌جایی بین این دو لحظه نزدیک به خط مماس بر مسیر حرکت در لحظه‌ی t (نقطه‌ی A) خواهد شد. حال اگر لحظه‌ی t_n را آنقدر به لحظه‌ی t نزدیک کنیم که بردار جابه‌جایی بین این دو لحظه در جهت مماس بر مسیر شود طبق تعریف گفته می‌شود سرعت متوسط بین این دو لحظه برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه‌ی t خواهد بود. در نتیجه سرعت یک متحرک در یک لحظه برابر خواهد بود با سرعت متوسط متحرک بین آن لحظه و یک لحظه‌ی بی‌نهایت نزدیک به آن. اکنون شاید این سؤال به وجود بیاید که این سرعت متعلق به کدام یک از دو لحظه‌ی t یا t_n می‌باشد. پاسخ این سؤال این است که این دو لحظه آنقدر به یکدیگر نزدیک می‌باشند که هیچگاه نمی‌توان آنها را از یکدیگر تفکیک کرد و تنها به صورت حدی قابل نمایش می‌باشند. یعنی $(t_n - t \to ۰)$ یا $t_n \to t$ و این به معنی آن است که اختلاف این دو لحظه به سمت صفر میل می‌کند. برای فهم بهتر این موضوع فرض کنید بخواهیم سرعت جسمی را در لحظه‌ی $t = ۲\mathrm{s}$ محاسبه کنیم. اگر برای این کار سرعت متوسط بین دو لحظه‌ی $t = ۲\mathrm{s}$ و $t = ۲/۰۰۰۱\mathrm{s}$ را محاسبه کنیم جواب ما برابر با جواب حاصل از محاسبات حدی نخواهد بود ولی بسیار به یکدیگر نزدیک خواهند بود و اختلاف ناچیزی خواهند داشت. چگونگی محاسبه‌ی سرعت حدی را در آینده خواهیم آموخت.

سرعت و نمودار مکان ـ زمان

همان‌طور که گفته شد بردار سرعت متوسط یک متحرک بین دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$ برابر خواهد بود با:

$$\vec{\overline{v}} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{x_۲} - \overrightarrow{x_۱}}{t_۲ - t_۱}$$

حال اگر حرکت بر روی خط راست انجام پذیرد محاسبات برداری تبدیل به محاسبات عددی خواهد شد زیرا تمامی بردارها با یکدیگر موازی خواهند بود و می‌توان نوشت:

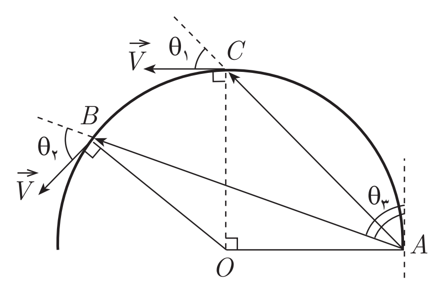
$$\overline{v} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱}$$

که این رابطه برابر خواهد بود با شیب خط مستقیمی که دو نقطه‌ی $(t_۱, x_۱)$ و $(t_۲, x_۲)$ را در نمودار مکان ـ زمان متحرک به یکدیگر متصل می‌نماید. حال اگر دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$ بی‌نهایت به یکدیگر نزدیک باشند این رابطه برابر با سرعت لحظه‌ای در این لحظات خواهد بود و در نمودار مکان ـ زمان نیز این عبارت برابر خواهد بود با شیب خط واصل بین دو نقطه‌ی $(t_۱, x_۱)$ و $(t_۲, x_۲)$ و به دلیل اینکه این دو نقطه بی‌نهایت به یکدیگر نزدیک هستند این خط همان خط مماس بر منحنی در لحظه‌ی $t_۱$ خواهد بود پس در نمودار مکان ـ زمان سرعت در هر لحظه برابر با شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه خواهد بود.

مثال ۶ اتومبیلی در یک مسیر دایره‌ای شکل به شعاع $۱۰۰\,\mathrm{m}$ دور می‌زند:

الف) هنگامی که بردارهای سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای جسم برای اولین بار با یکدیگر زاویه‌ی ۴۵° می‌سازند اتومبیل چه مسافتی را پیموده است؟

ب) در این حالت طول بردار جابه‌جایی جسم را بیابید و آن را با مسافت طی شده مقایسه کنید.



شکل ۱-۲۱

حل. الف) می‌دانیم نقطه‌ی شروع حرکت نقطه‌ای مانند A می‌باشد و همچنین می‌دانیم که سرعت در هر لحظه در جهت مماس بر مسیر حرکت در آن لحظه خواهد بود و همچنین بردار سرعت متوسط میان دو لحظه هم‌جهت با بردار جابه‌جایی بین آن دو لحظه است. مطابق شکل (۱ـ۲۱) نقطه‌ی دلخواه B را در نظر بگیرید. در این نقطه زاویه‌ای که دو بردار سرعت لحظه‌ای و جابه‌جایی با یکدیگر می‌سازند برابر خواهد بود با $\theta_۲$، قابل ذکر است که زاویه‌ی بین دو بردار زاویه‌ای است که ابتدای آن دو بردار با یکدیگر می‌سازند نه انتهای یکی با ابتدای دیگری. از طرفی می‌دانیم شعاع دایره در هر نقطه روی محیط دایره بر سرعت لحظه‌ای در آن نقطه عمود می‌باشد زیرا سرعت لحظه‌ای مماس بر دایره می‌باشد پس شعاع OB بر بردار $\vec{v}$ در نقطه‌ی B عمود خواهد بود در نتیجه زاویه‌ی $O\hat{B}A$ برابر خواهد بود با $(۹۰ - \theta_۲)$، با دانستن این نکته می‌توان نوشت:

$$O\hat{B}A = ۹۰^\circ - \theta_۲$$

$$OA = OB = R \Rightarrow O\hat{B}A = O\hat{A}B = ۹۰^\circ - \theta_۲$$

$$O\hat{A}B + \theta_۳ = ۹۰^\circ \Rightarrow ۹۰^\circ - \theta_۲ + \theta_۳ = ۹۰^\circ \Rightarrow \theta_۲ = \theta_۳$$

بنابراین زاویه‌ی بردار جابه‌جایی با سرعت لحظه‌ای برای هر نقطه برابر خواهد بود با زاویه‌ی میان بردار جابه‌جایی و مماس بر دایره در نقطه‌ی A که این زاویه هنگامی برابر با ۴۵° می‌شود که

متحرک روی نقطه‌ی C باشد و در هیچ نقطه‌ای قبل از آن این اتفاق نمی‌افتد:

$$A\hat{O}C = ۹۰^\circ \ , \ OA = OC \ \Rightarrow \ O\hat{C}A = O\hat{A}C$$
$$۱۸۰^\circ - O\hat{C}A - O\hat{A}C = ۹۰^\circ \ \Rightarrow \ O\hat{C}A = O\hat{A}C = ۴۵^\circ$$

(زاویه‌ی AC با مماس بر نقطه C برابر با ۴۵° می‌باشد.)

از روی شکل می‌توان نشان داد در طی حرکت متحرک از نقطه‌ی A تا زمانی که نیمی از محیط دایره پیموده شود این زاویه از ۰ تا ۹۰ درجه تغییر می‌کند و تنها در نقطه‌ی C برابر با ۴۵° می‌شود و مسافت طی شده تا نقطه‌ی C برابر است با:

$$\Delta S = \frac{۲\pi R}{۴} = \frac{\pi R}{۲} = ۵۰\pi = ۱۵۷/۰۸\text{m}$$

ب) طول بردار جابه‌جایی برابر است با:

$$\Delta x^۲ = AC^۲ = OA^۲ + OB^۲ = ۲R^۲ \ \Rightarrow \ AC = \sqrt{۲}R = ۱۴۱/۴۲\text{m}$$
$$\Rightarrow \ ۱۴۱/۴۲ < ۱۵۷/۰۸ \ \Rightarrow \ \Delta x < \Delta S$$

حرکت یکنواخت روی خط راست

هرگاه سرعت لحظه‌ای متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در تمام لحظه‌ها یکسان باشد، حرکت آن متحرک یکنواخت نامیده می‌شود. در حرکت یکنواخت روی خط راست نمودار مکان ـ زمان، یک خط راست خواهد بود زیرا شیب مماس بر این نمودار که بیانگر سرعت متحرک در هر لحظه می‌باشد باید در تمام لحظات یکسان باشد و تنها خط راست است که این خصوصیت را داراست. در نتیجه در این نوع حرکت، سرعت متوسط بین هر دو لحظه‌ی دلخواه برابر با سرعت لحظه‌ای یا شیب خط در نمودار مکان ـ زمان می‌باشد:

$$\overline{v} = v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \ \Rightarrow \ \Delta x = v\Delta t$$

این رابطه برای حرکت یکنواخت بر روی خط راست برقرار می‌باشد و در حالت کلی اگر فاصله متحرکی تا مبدأ در لحظه‌ی $t = ۰$ برابر با $x_۰$ باشد و فاصله آن تا مبدأ در لحظه‌ی t برابر با x باشد با فرض حرکت یکنواخت بر روی خط راست می‌توان گفت:

$$x - x_۰ = v(t - t_۰) \ \xrightarrow{t_۰ = ۰} \ x = vt + x_۰$$

این رابطه همان معادله‌ی خط گذرنده از نمودار مکان ـ زمان می‌باشد که در آن v شیب خط و $x_۰$ عرض از مبدأ خط می‌باشد.

مثال ۷ رانننده‌ای فاصله‌ی بین دو شهر را به ترتیب زیر می‌پیماید:

ابتدا به مدت یک ساعت با سرعت متوسط ۱۵m/s رانندگی کرده و پس از آن به مدت ۱۰ دقیقه توقف می‌کند. آنگاه با سرعت متوسط ۲۰m/s به مدت ۳۰ دقیقه به رانندگی ادامه می‌دهد

و بقیه‌ی مسیر را تا مقصد به مدت یک ربع ساعت با سرعت متوسط ۱۲m/s رانندگی می‌کند.
اگر جاده‌ی میان این دو شهر یک مسیر مستقیم باشد به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) فاصله‌ی بین دو شهر چند کیلومتر است؟

ب) سرعت متوسط او در کل مسیر چند کیلومتر بر ساعت است؟

ج) سرعت متوسط او در طول مدت رانندگی چند متر بر ثانیه است؟

حل. الف)

$$\Delta x_۱ = \overline{v_۱}\Delta t_۱ = ۱۵ \times (۱ \times ۶۰ \times ۶۰) = ۵۴۰۰۰\text{m} = ۵۴\text{km}$$

$$\Delta x_۲ = \overline{v_۲}\Delta t_۲ = ۰ \times (۱۰ \times ۶۰) = ۰\text{km}$$

$$\Delta x_۳ = \overline{v_۳}\Delta t_۳ = ۲۰ \times (۳۰ \times ۶۰) = ۳۶۰۰۰\text{m} = ۳۶\text{km}$$

$$\Delta x_۴ = \overline{v_۴}\Delta t_۴ = ۱۲ \times (۱۵ \times ۶۰) = ۱۰۸۰۰\text{m} = ۱۰/۸\text{km}$$

$$\sum_{i=۱}^{۴} \Delta x_i = ۵۴ + ۳۶ + ۱۰/۸ = ۱۰۰/۸\text{km}$$

ب)

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۵۴ + ۳۶ + ۱۰/۸}{۱ + \frac{۱۰}{۶۰} + \frac{۳۰}{۶۰} + \frac{۱۵}{۶۰}} = ۵۲/۵۹\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

ج)

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۰۰/۸}{۱ + \frac{۳۰}{۶۰} + \frac{۱۵}{۶۰}} = ۵۷/۶\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

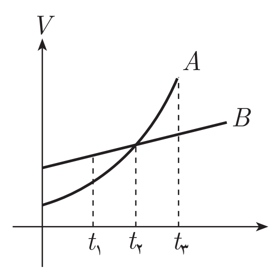
$$\overline{v} = ۵۷/۶ \times (\frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰}) = ۱۶\text{m/s}$$

نمودار سرعت ـ زمان

نمودار سرعت ـ زمان نیز مانند نمودار مکان ـ زمان برای حل مسائل سینماتیکی بسیار مفید است. این نمودار سرعت یک متحرک را بر حسب زمان نمایش می‌دهد. محور عمودی این نمودار سرعت و محور افقی آن زمان می‌باشد و این نمودار نیز مانند نمودار مکان ـ زمان همواره یک تابع پیوسته می‌باشد.

مثال ۸

نمودار سرعت ـ زمان (شکل ۱ـ۲۲) سرعت دو متحرک A و B را بر حسب زمان بیان می‌کند. اگر این دو متحرک در لحظه‌ی $t = ۰$ در یک مکان قرار داشته باشند درکدام یک از لحظات $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ این دو متحرک می‌توانند برای بار دوم در یک مکان قرارگیرند.



شکل ۱-۲۲

حل. همان‌طور که مشاهده می‌شود در بازه‌ی زمانی $۰ < t < t_۲$ سرعت متحرک A کمتر از B می‌باشد پس تا لحظه‌ی $t = t_۲$ متحرک B همواره جلوتر از متحرک A می‌باشد ولی پس از لحظه‌ی $t = t_۲$ سرعت متحرک A بیشتر از B می‌شود و از این لحظه به بعد فاصله‌ی دو متحرک کاهش می‌یابد تا در لحظه‌ای مانند $t_۳$ این دو متحرک برای بار دوم در یک مکان قرار خواهند گرفت.

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

هنگامی که شما از حال سکون شروع به دویدن می‌کنید سرعت شما از صفر شروع به افزایش یافتن می‌کند تا در نهایت به مقداری ثابت می‌رسد و هنگام ایستادن نیز سرعت شما کاهش می‌یابد تا به مقدار صفر برسد و شما به حالت سکون بازگردید. شتاب متوسط کمیتی برداری است که از تقسیم بردار تغییر سرعت بین دو لحظه بر زمان بین آن دو لحظه به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{\overline{a}} = \frac{\overrightarrow{v_۲} - \overrightarrow{v_۱}}{t_۲ - t_۱} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

بردار شتاب متوسط را به وسیله‌ی $\overrightarrow{\overline{a}}$ نمایش می‌دهند. در حرکت بر روی خط راست به دلیل موازی بودن بردارها این رابطه به شکل عددی درخواهد آمد:

$$\overline{a} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

شتاب کمیتی است که نرخ تغییر سرعت را بر حسب زمان بیان می‌کند و بر اساس تعریف آن، برداری هم جهت با بردار تغییر سرعت خواهد بود. یکای شتاب در سیستم واحد SI $(\mathrm{m/s^۲})$ می‌باشد.

اگر دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$ بی‌نهایت به یکدیگر نزدیک باشند شتاب متوسط بین این دو لحظه برابر با شتاب لحظه‌ای آنها خواهد بود. به دلیل شباهتی که تعریف شتاب با تعریف سرعت دارد تمام روابطی که بین سرعت و مکان برقرار بود، اینک بین شتاب و سرعت برقرار خواهد بود. پس برای حرکت بر روی خط راست با شتاب ثابت خواهیم داشت:

$$\overline{a} = a = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} \ \ , \ \ v = at + v_۰$$

در حرکت بر روی خط راست هنگامی که دو بردار شتاب و سرعت هم جهت باشند سرعت در حال افزایش و حرکت تند شونده خواهد بود و هنگامی که این دو بردار در خلاف یکدیگر باشند حرکت کند شونده خواهد بود:

$$\left.\begin{array}{l} \text{حرکت تند شونده در جهت مثبت محور} \ : \ a^+ \ , \ v^+ \\ \text{حرکت تند شونده در جهت منفی محور} \ : \ a^- \ , \ v^- \end{array}\right\} \Rightarrow \ a \times v > ۰ \ \Rightarrow \ \text{حرکت تند شونده}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{حرکت کند شونده در جهت منفی محور} \ : \ a^+ \ , \ v^- \\ \text{حرکت کند شونده در جهت مثبت محور} \ : \ a^- \ , \ v^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \ a \times v < ۰ \ \Rightarrow \ \text{حرکت کنده شونده}$$

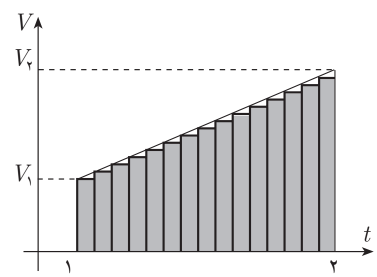
در حرکت بر روی خط راست با شتاب ثابت معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرک به صورت خطی با شیب a و عرض از مبدأ $v_۰$ خواهد بود. در این حالت می‌توان نشان داد که سرعت متوسط بین هر دو لحظه‌ی دلخواه برابر خواهد بود با مجموع سرعت در آن دو لحظه تقسیم بر دو:

$$\overline{v} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}$$

برای اثبات این رابطه تنها کافیست نشان دهیم جابه‌جایی بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 برابر است با:

$$\Delta x = \overline{v}\Delta t = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t$$

برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2 نمودار سرعت ـ زمان جسم را بین لحظات t_1 تا t_2 رسم می‌کنیم (مانند شکل ۱ـ۲۳) و سپس محور زمان را به بازه‌های بسیار کوچک زمانی تقسیم می‌کنیم. می‌دانیم در هر یک از این بازه‌ها جابه‌جایی برابر خواهد بود با سرعت متوسط در آن بازه ضرب در مقدار بازه‌ی زمانی. حال اگر بازه‌های زمانی را بی‌نهایت کوچک در نظر بگیریم سرعت متوسط در هر بازه برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در هر لحظه از آن بازه‌ی بی‌نهایت کوچک خواهد بود و مقدار جابه‌جایی متحرک در هر بازه برابر خواهد بود با سرعت لحظه‌ای ضرب در زمان آن بازه و بدین ترتیب جابه‌جایی کل برابر با مجموع همه‌ی جابه‌جایی‌ها خواهد بود. مقدار هر جابه‌جایی را می‌توان به صورت مساحت مستطیلی در نظر گرفت که طول آن مقدار سرعت متوسط در آن بازه‌ی زمانی بی‌نهایت کوچک و عرض آن برابر با زمان خواهد بود. در نتیجه جابه‌جایی کل بین دو لحظه‌ی دلخواه t_1 و t_2 برابر خواهد بود با مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2:



شکل ۱-۲۳

$$\Delta x = \text{مساحت زیر نمودار} = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)(t_2 - t_1)$$
$$= \overline{v}\Delta t \Rightarrow \overline{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

قابل ذکر است که مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان نیز برابر با تغییرات سرعت می‌باشد. اکنون با استفاده از سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست می‌توانیم معادله‌ی مکان ـ زمان را برای این حرکت بیابیم.

معادله‌ی مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

با استفاده از روابطی که به‌دست آوردیم می‌توانیم بنویسیم:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

در رابطه‌ی زیر Δx میزان جابه‌جایی در زمان Δt است و v_1 و v_2 به ترتیب سرعت در لحظات t_1 و t_2 می‌باشند.

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2}\Delta t$$

حال اگر فرض کنیم t_1 مبدأ زمان انتخاب شود $(t_1 = 0)$ و t_2 را یک لحظه‌ی دلخواه در نظر بگیریم و سرعت متحرک را در $t = 0$ برابر با v_0 و در t_2 برابر با v_2 قرار دهیم همچنین مکان متحرک را نیز در این لحظات x_0 و x_2 قرار دهیم در این صورت خواهیم داشت:

$$x_2 - x_0 = \frac{v_2 + v_0}{2}(t_2 - t_0)$$

$$v_2 = a(t_2 - t_0) + v_0 \quad , \quad t_0 = 0 \Rightarrow v_2 = at_2 + v_0$$

$$\Rightarrow x_2 - x_0 = \frac{at_2 + v_0 + v_0}{2}t_2 \Rightarrow x_2 = \frac{a}{2}t_2^2 + v_0 t_2 + x_0$$

حال به دلیل اینکه $t_۲$ یک لحظه‌ی کاملاً دلخواه بوده است این رابطه برای هر لحظه‌ای مانند t برقرار خواهد بود:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t + x_\circ$$

که در این رابطه $x_\circ$ و $v_\circ$ به ترتیب مکان و سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = \circ$ می‌باشند و x مکان متحرک در لحظه‌ی t و a شتاب حرکت می‌باشد.

برای به‌دست آوردن رابطه‌ای که کمیت زمان در آن حذف شده باشد به شکل زیر عمل خواهیم کرد:

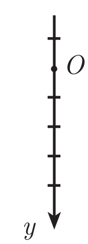
$$v = at + v_\circ \;\Rightarrow\; t = \frac{v - v_\circ}{a}$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t + x_\circ \;\Rightarrow\; x = \frac{۱}{۲}a\left(\frac{v - v_\circ}{a}\right)^۲ + v_\circ\left(\frac{v - v_\circ}{a}\right) + x_\circ$$

$$\Rightarrow\; x - x_\circ = \frac{v^۲ - v_\circ^۲}{۲a} \;\Rightarrow\; v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a(x - x_\circ)$$

سقوط آزاد

سقوط آزاد مثالی از حرکت بر روی خط راست با شتاب ثابت است که ما هر روزه آن را مشاهده می‌کنیم. هنگامی که شما ایستاده‌اید و یک پاک‌کن از دست شما رها می‌شود، حرکت پاک‌کن تا لحظه‌ی برخورد با زمین یک سقوط آزاد است که در مسیری مستقیم و تحت شتاب جاذبه‌ی زمین صورت می‌گیرد (این در صورتی است که از مقاومت هوا صرف‌نظر شود). در سقوط آزاد جابه‌جایی در امتداد قائم صورت می‌گیرد و ما می‌توانیم برای راحتی کار بردار یکه‌ی خود را رو به سمت پایین در نظر بگیریم تا شتاب جاذبه همواره مثبت باشد در نتیجه جهت مثبت محور حرکت را رو به سمت پایین اختیار می‌کنیم: (مانند شکل ۱ـ۲۴)



شکل ۱-۲۴

$$y = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_\circ t + y_\circ$$

$$v = gt + v_\circ$$

مثال ۹ گلوله‌ی کوچکی از بالای ساختمانی رها می‌شود. وقتی در ارتفاع ۱۵ متری بالای سطح زمین قرار دارد سرعتش $۱۰\,\mathrm{m/s}$ است.

الف) سرعت سنگ در لحظه‌ی رسیدن به زمین چقدر است؟

ب) ارتفاع ساختمان و سرعت متوسط گلوله در مدت سقوط چقدر است؟ ($g = ۱۰\,\mathrm{m/s^۲}$ فرض شود)

حل. الف) گلوله برای رسیدن به سطح زمین باید مسافتی معادل $۱۵\mathrm{m}$ را طی کند:

$$y - y_\circ = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_\circ t \;\Rightarrow\; ۱۵ = ۵t^۲ + ۱۰t$$

$$\Rightarrow\; t^۲ + ۲t - ۳ = \circ \;\Rightarrow\; t = \begin{cases} ۱\mathrm{s} & \text{قق} \\ -۳s & \text{غق} \end{cases}$$

۱ ثانیه زمان می‌گذرد تا سنگ به سطح زمین برسد پس سرعت سنگ در سطح زمین خواهد بود:

$$v = gt + v_{\circ} \Rightarrow v = g \times ۱ + ۱۰ = ۲۰\,\mathrm{m/s}$$

ب)

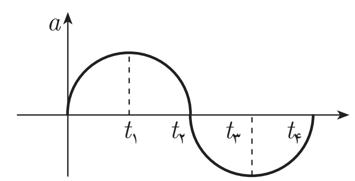
$$\overline{v} = \frac{v_{\circ} + v_{\text{سطح زمین}}}{۲} = \frac{\circ + ۲۰}{۲} = ۱۰\,\mathrm{m/s}$$

ارتفاع ساختمان $h = y = \overline{v}\Delta t = ۱۰\Delta t$

$$\Delta t = \frac{v - v_{\circ}}{g} = \frac{۲۰ - \circ}{۱۰} = ۲\mathrm{s} \Rightarrow y = ۱۰ \times ۲ = ۲۰\,\mathrm{m}$$

مثال ۱۰

در نمودار شتاب ـ زمان (شکل ۱ـ۲۵) تعیین کنید در هر بازه‌ی زمانی حرکت کند شونده یا تند شونده می‌باشد. $(v_{\circ} = \circ)$



شکل ۱-۲۵

حل. در فاصله‌ی زمانی $\circ < t < t_۲$ شتاب مثبت می‌باشد و سرعت نیز که برابر با مساحت زیر نمودار است در هر لحظه بین این بازه مثبت خواهد بود پس حرکت در این بازه تند شونده خواهد بود. در بازه‌ی $t_۲ < t < t_۴$ شتاب منفی است و اما سرعت همچنان مثبت است زیرا در لحظه‌ی $t_۲$ سرعت برابر است با مساحت نیم‌دایره از $t = \circ$ تا $t = t_۲$ و سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = t_۴$ به دلیل برابر بودن مساحت دو نیم‌دایره در بالا (مثبت) و پایین (منفی) محور زمان برای بار دوم صفر خواهد شد ولی هیچگاه منفی نخواهد شد بنابراین در بازه‌ی $t_۲ < t < t_۴$ حرکت کند شونده خواهد بود.

مثال ۱۱

جسمی را از حالت سکون از ارتفاع بسیار زیاد رها می‌کنیم رابطه‌ای بیابید که بگوید این جسم در ثانیه‌ی nام از حرکت خود چه مقدار جابه‌جا می‌شود. (n هر عدد طبیعی می‌تواند باشد)

حل. ثانیه‌ی اول حرکت یعنی بازه‌ی زمانی $\circ < t < ۱$ ثانیه در نتیجه ثانیه‌ی nام حرکت یعنی بازه‌ی زمانی $n - ۱ < t < n$ ثانیه، برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در ثانیه‌ی nام حرکت می‌نویسیم:

$$v_{n-۱} = g(n-۱) + v_{\circ} \quad , \quad v_{\circ} = \circ$$

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}g(۱)^۲ + v_{n-۱}(۱)^۲ = \frac{۱}{۲}g + ng - g = g(n - \frac{۱}{۲})$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید جملات جابه‌جایی در هر ثانیه از حرکت یک تصاعد حسابی را تشکیل می‌دهند که قدر آن برابر با شتاب حرکت می‌باشد. در حالت سقوط آزاد قدر این تصاعد برابر با g می‌باشد و جابه‌جایی کل را می‌توان از حاصل جمع جملات این تصاعد محاسبه نمود.

ثانیه‌ی ۱ام : $\Delta y_۱ = g(۱ - \frac{۱}{۲}) = \frac{g}{۲}$

ثانیه‌ی ۲ام : $\Delta y_۲ = g(۲ - \frac{۱}{۲}) = \frac{۳g}{۲}$

ثانیه‌ی ۳ام : $\Delta y_۳ = g(۳ - \frac{۱}{۲}) = \frac{۵g}{۲}$

$\vdots$

ثانیه‌ی nام : $\Delta y_n = g(n - \frac{۱}{۲}) = \frac{(۲n - ۱)g}{۲}$

حرکت در دو بعد

تا اینجا حرکت بر روی خط راست را آموختیم و با مشخصه‌های این حرکت آشنایی پیدا کردیم. اکنون می‌پردازیم به حرکت‌های منحنی شکل در دو بعد و با مشخصات این دسته از حرکات آشنایی پیدا می‌کنیم. همان‌طورکه اشاره شد ما می‌توانیم هر برداری در صفحه را به صورت حاصل جمع دو بردار موازی با محورهای مختصات بیان کنیم و گفتیم که می‌توانیم به وسیله‌ی دو بردار یکه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ حرکات پیچیده‌ی صفحه‌ای را به حرکت بر روی خط راست ساده‌سازی کنیم. اکنون چگونگی این عمل را توضیح خواهیم داد.

بردار مکان و بردار جابه‌جایی در دو بعد

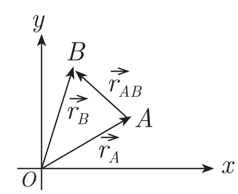
بردار مکان یک نقطه مانند A برداریست که ابتدای آن مبدأ مختصات و انتهای آن نقطه‌ی A می‌باشد و بردار جابه‌جایی بین دو نقطه‌ی A و B برابر خواهد بود با:

جابه‌جایی از A به B: $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

جابه‌جایی از B به A: $\vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$

$$\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} \ , \ \vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$$

$$\Rightarrow \ \vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$



شکل ۱-۲۶

همان‌طورکه مشاهده می‌کنید تفکیک کردن بردارها به دو بردار موازی با محورها بر اساس $\vec{i}$ و $\vec{j}$ محاسبات برداری را تبدیل به محاسبات ساده‌ی عدد خواهد کرد.

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

سرعت متوسط بین دو لحظه‌ی دلخواه برداری است هم جهت با بردار جابه‌جایی بین آن دو لحظه و همان‌طورکه توضیح داده شد سرعت لحظه‌ای در یک لحظه‌ی دلخواه برابر است با سرعت متوسط بین آن لحظه و یک لحظه‌ی بی‌نهایت نزدیک به آن. سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط را نیز می‌توان بر اساس بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بیان کرد برای مثال اگر ما رابطه‌ی x و t را برای یک متحرک در اختیار داشته باشیم می‌توانیم سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای متحرک را در هر زمانی در راستای محور x یا بردار $\vec{i}$ به‌دست آوریم مانند رابطه‌ی زیر:

$$x = ۳t - ۵ \ \Rightarrow \ v_x = ۳\text{m/s} \ \Rightarrow \ v_x = ۳\vec{i}$$

اما باید توجه داشت که v_x تنها مؤلفه‌ی افقی سرعت متحرک است و رابطه میان دو کمیت x و t هیچگونه اطلاعاتی درباره‌ی مؤلفه‌ی عمودی سرعت متحرک (v_y) در اختیار ما قرار نمی‌دهد.

نمایش سرعت لحظه‌ای در حرکت دوبعدی

می‌دانیم سرعت یک متحرک در لحظه‌ی t برابر خواهد بود با سرعت متوسط آن متحرک بین لحظه‌ی t و لحظه‌ای بی‌نهایت نزدیک به آن، در نتیجه برای محاسبه‌ی سرعت لحظه‌ای می‌توان

به روش زیر عمل کرد:

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}\Big)_{\Delta t\to ۰} \quad , \quad \overrightarrow{\Delta r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}$$
$$\Rightarrow \ \vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

به دلیل اینکه Δt به سمت صفر می‌کند متحرک زمان بسیارکوتاهی برای تغییر مکان خواهد داشت پس مقادیر Δy و Δx نیز به سمت صفر میل خواهند کرد. در این حالت رابطه‌ی سرعت لحظه‌ای را به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

در این رابطه عبارت $\frac{dx}{dt}$ برابر است با مشتق تابع x بر حسب متغیر t و عبارت $\frac{dy}{dt}$ برابر است با مشتق تابع y نسبت به متغیر t.

$$\frac{dx}{dt} = v_x \ , \ \frac{dy}{dt} = v_y \ \Rightarrow \ \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

مثال ۱۲ معادله‌ی حرکت جسمی با دو رابطه‌ی زیر در SI مشخص شده است:

$$y = ۲t^۲ + ۱ \quad , \quad x = ۶t$$

الف) معادله‌ی مسیر حرکت را بیابید.

ب) معادله‌ی سرعت جسم را بنویسید و بزرگی سرعت را در $t = ۲\mathrm{s}$ محاسبه کنید.

ج) بردار سرعت متوسط جسم را بین لحظه‌های $t = ۱\mathrm{s}$ و $t = ۲\mathrm{s}$ بر حسب بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.

حل. الف) معادله‌ی مسیر حرکت معادله‌ای است که x و y را بر حسب یکدیگر بیان می‌کند:

$$x = ۶t \ \Rightarrow \ t = \frac{x}{۶} \ \Rightarrow \ y = ۲(\frac{x}{۶})^۲ + ۱ \ \Rightarrow \ y = \frac{x^۲}{۱۸} + ۱$$

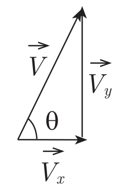
ب)

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = ۶\vec{i} + (۴t)\vec{j}$$
$$t = ۲\mathrm{s} \ \Rightarrow \ \vec{v} = ۶\vec{i} + ۸\vec{j} \ \Rightarrow \ |v| = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰\,\mathrm{m/s}$$

ج)

$$\overrightarrow{\overline{v}} = \overline{v_x}\vec{i} + \overline{v_y}\vec{j}$$
$$\overline{v_x} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۱۲ - ۶}{۲ - ۱} = ۶\,\mathrm{m/s}$$
$$\overline{v_y} = \frac{y_۲ - y_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۹ - ۳}{۲ - ۱} = ۶\,\mathrm{m/s}$$
$$\Rightarrow \ \overrightarrow{\overline{v}} = ۶\vec{i} + ۶\vec{j}$$

مثال ۱۳ معادله‌ی حرکت جسمی به صورت $y = ۳x^۳ + ۵x$ می‌باشد اگر در مکان $x = ۱\mathrm{m}$ سرعت جسم در راستای محور x برابر با $۲\mathrm{m/s}$ باشد سرعت جسم در این مکان را به صورت برداری نمایش دهید.



شکل ۱-۲۷

$$x = ۱\mathrm{m} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = ۹x^۲ + ۵ = ۹ + ۵ = ۱۴ = \tan\theta$$ (شیب خط مماس)

از آنجایی که سرعت لحظه‌ای مماس بر مسیر است داریم: (شکل ۱ـ۲۷)

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = ۱۴ \;\Rightarrow\; v_y = ۱۴v_x = ۲۸\mathrm{m/s}$$
$$\Rightarrow\; \vec{v} = ۲\vec{i} + ۲۸\vec{j}$$

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

در حرکت دوبعدی در صفحه شتاب متوسط بین دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$ برداریست هم جهت با بردار تغییر سرعت بین این دو لحظه و شتاب لحظه‌ای در لحظه‌ی $t_۱$ برداریست هم جهت با بردار تغییر سرعت بین لحظه‌ی $t_۱$ و یک لحظه‌ی بی‌نهایت نزدیک به آن. هنگامی که یک جسم روی یک منحنی حرکت می‌کند به دلیل اینکه سرعت همواره مماس بر مسیر حرکت می‌باشد، جهت آن همواره در حال تغییر می‌باشد و حتی اگر سرعت جسم از نظر اندازه ثابت بماند جهت آن در حال تغییر خواهد بود و در نتیجه بردار سرعت همواره در حال تغییر می‌باشد بنابراین حرکت روی یک مسیر منحنی شکل همواره یک حرکت شتابدار خواهد بود.

برای شتاب متوسط بین دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$ می‌توان نوشت:

$$\vec{\overline{a}} = \frac{\vec{v_۲} - \vec{v_۱}}{t_۲ - t_۱} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \quad , \quad \overrightarrow{\Delta v} = \Delta v_x \vec{i} + \Delta v_y \vec{j}$$
$$\vec{\overline{a}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} \quad , \quad \vec{\overline{a}} = \overline{a}_x \vec{i} + \overline{a}_y \vec{j}$$

و برای شتاب لحظه‌ای در لحظه‌ی $t_۱$ می‌توان نوشت:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}\Big)_{\Delta \to ۰} \;\Rightarrow\; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \;,\; \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$\vec{a} = \frac{d^۲\vec{r}}{dt^۲} \;,\; \vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = \frac{d^۲x}{dt^۲}\vec{i} + \frac{d^۲y}{dt^۲}\vec{j}$$
$$\frac{dv_x}{dt} = a_x \;,\; \frac{dv_y}{dt} = a_y \Rightarrow \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

همان‌طور که از روابط استنباط می‌شود بردار شتاب متوسط بین دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$ با بردار تغییر سرعت بین این دو لحظه هم جهت می‌باشد اما هیچ لزومی ندارد که این بردار با بردارهای $\vec{v}_۱$ یا $\vec{v}_۲$ هم جهت باشد. در حرکت بر روی خط راست به دلیل توازی دو بردار $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ تفاضل آنها نیز موازی با خودشان بود ولی در حرکت صفحه‌ای و حرکت بر روی مسیر منحنی شکل این امر تنها بین نقاطی از مسیر امکان‌پذیر است که مماس بر مسیر در آن نقاط با یکدیگر موازی باشند.

حرکت پرتابی

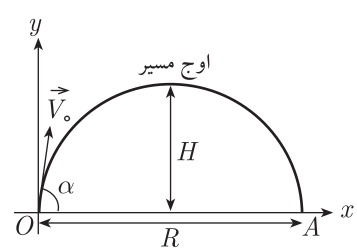
در این قسمت به تحلیل و بررسی حرکت در فضای دوبعدی با شتاب ثابت می‌پردازیم. در حرکت با شتاب ثابت مقدار و جهت بردار شتاب در تمام طول مدت حرکت ثابت می‌ماند. در این نوع حرکت برای سادگی حل مسأله دستگاه مختصات را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که یکی از محورهای دستگاه موازی با بردار شتاب باشد و مقدار شتاب در راستای محور دیگر برابر با صفر شود. ساده‌ترین نوع حرکت با شتاب ثابت در صفحه حرکت پرتابی است. هنگامی که شما پاک‌کن خود را به سمت دوستتان پرتاب می‌کنید در صورت صرف‌نظر کردن از مقاومت هوا، پاک‌کن یک حرکت پرتابی را انجام خواهد داد. در حالت کلی اگر جسمی را به گونه‌ای پرتاب کنیم که امتداد سرعت اولیه‌ی جسم با امتداد قائم، زاویه‌ای به غیر از صفر درجه بسازد این جسم یک حرکت پرتابی را طی می‌کند و به آن یک **پرتابه** می‌گوییم. در حرکت پرتابی اندازه‌ی شتاب برابر با g و جهت آن رو به پایین خواهد بود.

محاسبات برای یک پرتابه که با سرعت $v_\circ$ و زاویه‌ی α پرتاب می‌شود مانند شکل ۱ـ۲۸ به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{a}_x = \circ \quad , \quad \vec{a}_y = -g\vec{j}$$
$$\vec{v}_{\circ x} = v_\circ \cos\alpha \vec{i} \quad , \quad \vec{v}_{\circ y} = v_\circ \sin\alpha \vec{j}$$

سرعت افقی در طول مسیر ثابت می‌ماند.

$$\vec{a}_x = \circ \;\Rightarrow\; \vec{v}_{\circ x} = \text{cte}$$
$$x_\circ = \circ \;\Rightarrow\; \vec{x} = (v_\circ \cos\alpha \vec{i})t$$
$$\vec{a}_y = -g\vec{j} \quad , \quad \vec{v}_{\circ y} = v_\circ \sin\alpha \vec{j}$$
$$y_\circ = \circ \;\Rightarrow\; \vec{y} = \frac{۱}{۲}(-g\vec{j})t^۲ + (v_\circ \sin\alpha \vec{j})t$$
$$\Rightarrow\; \vec{y} = \left(-\frac{۱}{۲}gt^۲ + (v_\circ \sin\alpha)t\right)\vec{j}$$
$$\vec{v}_y = (-g\vec{j})t + \vec{v}_{\circ y} \;\Rightarrow\; \vec{v}_y = (-gt + v_\circ \sin\alpha)\vec{j}$$



شکل ۱-۲۸

به وسیله‌ی این معادلات می‌توانیم بردارهای مکان، سرعت و شتاب پرتابه را در هر لحظه مشخص کنیم. اکنون به وسیله‌ی معادلات زیر مسیر حرکت یک پرتابه را مشخص می‌کنیم:

$$x\vec{i} = (v_\circ \cos\alpha \vec{i})t \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{v_\circ \cos\alpha}$$
$$y\vec{j} = \left(-\frac{۱}{۲}gt^۲ + (v_\circ \sin\alpha)t\right)\vec{j}$$
$$\Rightarrow\; y = -\frac{۱}{۲}g\left(\frac{x}{v_\circ \cos\alpha}\right)^۲ + v_\circ \sin\alpha\left(\frac{x}{v_\circ \cos\alpha}\right)$$
$$\Rightarrow\; y = -\frac{gx^۲}{۲v_\circ^۲ \cos^۲\alpha} + x\tan\alpha$$

از معادله‌ی مسیر حرکت مشخص است که حرکت پرتابی یک مسیر سهمی شکل را طی می‌کند.

در حرکت پرتابی فاصله‌ی افقی را که پرتابه طی می‌کند تا دوباره به ارتفاع اولیه برگردد، برد پرتابه و ارتفاع بالاترین نقطه‌ای را که پرتابه به آن می‌رسد ارتفاع اوج می‌نامیم. برای محاسبه‌ی برد و ارتفاع اوج یک پرتابه با سرعت اولیه $\vec{v}_\circ$ و زاویه‌ی α می‌توان به روش زیر عمل کرد:

نقطه‌ی اوج نقطه‌ای است که سرعت پرتابه در راستای محور y در آن نقطه برابر با صفر شود زیرا از این لحظه به بعد بردار سرعت v_y تغییر جهت خواهد داد و ارتفاع پرتابه کاهش می‌یابد:

$$\vec{v}_y = \circ \ \Rightarrow \ \circ = (-gt)\vec{j} + v_\circ \sin\alpha \vec{j}$$

$$\Rightarrow \ gt = v_\circ \sin\alpha \ \Rightarrow \ t = \frac{v_\circ \sin\alpha}{g}$$

$$y_\circ = \circ \ \Rightarrow \ \vec{H} = \left(-\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_\circ \sin\alpha t\right)\vec{j}$$

$$= \left(-\frac{۱}{۲}g\left(\frac{v_\circ \sin\alpha}{g}\right)^۲ + (v_\circ \sin\alpha)\left(\frac{v_\circ \sin\alpha}{g}\right)\right)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \ \vec{H} = \frac{v_\circ^۲ \sin^۲\alpha}{۲g}\vec{j}$$

زمان رسیدن پرتابه تا نقطه‌ی اوج برابر با نصف کل زمان حرکت پرتابه می‌باشد تا به ارتفاع نقطه‌ی پرتاب بازگردد:

$$\vec{x} = (v_\circ \cos\alpha \vec{i})t$$

$$\vec{R} = v_\circ \cos\alpha\left(\frac{۲v_\circ \sin\alpha}{g}\right)\vec{i} = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\alpha}{g}\vec{i}$$

به روش دیگر: هنگامی که پرتابه به ارتفاع نقطه‌ی پرتاب باز می‌گردد با استفاده از معادله‌ی مسیر حرکت می‌توان نوشت:

$$y = \circ \ \Rightarrow \ \circ = \frac{-g(R^۲)}{۲v_\circ^۲ \cos^۲\alpha} + R\tan\alpha \Rightarrow \ R = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\alpha}{g}$$

مثال ۱۴ نشان دهید در چه زاویه‌ای از پرتاب، برد حرکت پرتابی بیشینه خواهد شد و سپس ثابت کنید برای زاویه‌هایی که به یک اندازه از آن زاویه بیشتر و یا کمترند، بردها مساوی خواهند بود.

حل.

$$R = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\alpha}{g} \ \ , \ \ R_{\max} \ \Rightarrow \ \frac{dR}{d\alpha} = \circ$$

$$\Rightarrow \ \frac{dR}{d\alpha} = \frac{v_\circ^۲}{g} \times ۲ \times \cos ۲\alpha = \circ$$

$$\Rightarrow \ \cos ۲\alpha = \circ \ \Rightarrow \ ۲\alpha = \frac{\pi}{۲} \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{\pi}{۴}$$

در زاویه‌ی ۴۵° برد حرکت پرتابی بیشینه خواهد بود.

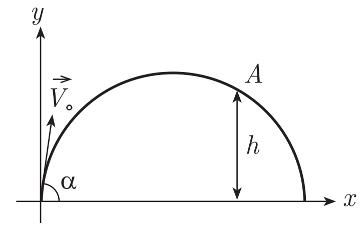
$$\theta = \left(\frac{\pi}{۴} + \alpha\right) \ \ , \ \ \beta = \left(\frac{\pi}{۴} - \alpha\right)$$

$$\Rightarrow \ R_\theta = \frac{v_\circ^۲}{g}\sin ۲\theta = \frac{v_\circ^۲}{g}\sin\left(\frac{\pi}{۲} + ۲\alpha\right) = \frac{v_\circ^۲}{g}\cos ۲\alpha$$

$$R_\beta = \frac{v_\circ^۲}{g}\sin ۲\beta = \frac{v_\circ^۲}{g}\sin\left(\frac{\pi}{۲} - ۲\alpha\right) = \frac{v_\circ^۲}{g}\cos ۲\alpha = R_\theta$$

مثال ۱۵

مطابق (شکل ۱ـ۲۹) جسمی را با سرعت اولیه‌ی $\vec{v}_0$ و با زاویه‌ی α نسبت به افق پرتاب می‌کنیم. با صرف‌نظر کردن از نیروی مقاومت هوا بزرگی سرعت عمودی جسم را در نقطه‌ی A به‌دست آورید.



شکل ۱-۲۹

حل. $\vec{y} = h\vec{j}$

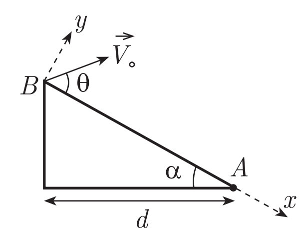
در این مسأله هیچ اطلاعاتی راجع به زمان مطرح نشده است پس بهتر است از معادله‌ای استفاده کنیم که زمان در آن حذف شده است.

$$\begin{aligned}
v_y^2 - v_{0y}^2 = 2(a_y)(y - y_0) &\Rightarrow v_y^2 - v_{0y}^2 = 2(-g)(y - y_0)\\
&\Rightarrow v_h^2 - (v_0 \sin\alpha)^2 = -2g(h - 0)\\
&\Rightarrow v_h^2 = v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh\\
&\Rightarrow v_h = \pm\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh}
\end{aligned}$$

اکنون طبق معادله‌ی روبه‌رو دو جواب قرینه برای سرعت در نقطه‌ی A به‌دست آمد که جواب مثبت غیرقابل قبول می‌باشد زیرا در نقطه‌ی A حرکت رو به پایین است و سرعت منفی می‌باشد. جواب مثبت برای نقطه‌ای در ارتفاع h قبل از رسیدن به نقطه اوج می‌باشد.

مثال ۱۶

مطابق (شکل ۱ـ۳۰) سرعت اولیه‌ی پرتابه را طوری تعیین کنید که مسیر حرکت پرتابه از نقطه‌ی A عبور کند.



شکل ۱-۳۰

حل. در این مسأله برای سادگی دستگاه مختصات را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که محور x منطبق بر خط BA باشد و نقطه‌ی B را مبدأ دستگاه قرار می‌دهیم در این حالت داریم:

$$\vec{a}_x = g\sin\alpha\vec{i} \qquad , \qquad \vec{a}_y = -g\cos\alpha\vec{j}$$

t را زمان حرکت تا نقطه‌ی A در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&y_A = y_B = 0 \;\Rightarrow\; \vec{y}_A = 0 = \frac{1}{2}\vec{a}_y t^2 + \vec{v}_{0y} t\\
&\quad\Rightarrow\; 0 = \frac{1}{2}(-g\cos\alpha\vec{j})t^2 + (v_0 \sin\theta\vec{j})t\\
&\quad\Rightarrow\; (v_0\sin\theta)t = (\frac{1}{2}g\cos\alpha)t^2 \;\Rightarrow\; t = \frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\alpha}\\
&\vec{x}_A = |AB|\vec{i} = \frac{d}{\cos\alpha}\vec{i}\\
&\vec{x}_A = \frac{1}{2}\vec{a}_x t^2 + \vec{v}_{0x} t = (\frac{1}{2}g\sin\alpha\vec{i})t^2 + (v_0\cos\theta\vec{i})t\\
&\quad\Rightarrow\; \frac{d}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}g\sin\alpha(\frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\alpha})^2 + v_0\cos\theta(\frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\alpha})\\
&\quad\Rightarrow\; d = \frac{2v_0^2\sin^2\theta\sin\alpha}{g\cos\alpha} + \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}\\
&\quad\Rightarrow\; d = v_0^2\left(\frac{2\sin^2\theta\tan\alpha + \sin 2\theta}{g}\right) \;\Rightarrow\; v_0 = \sqrt{\frac{dg}{2\sin^2\theta\tan\alpha + \sin 2\theta}}
\end{aligned}$$

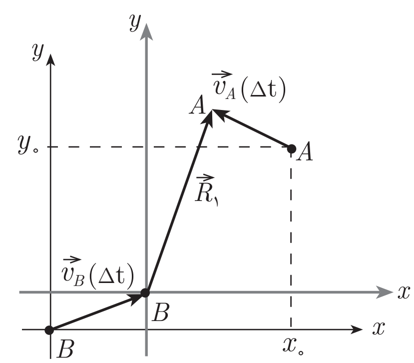
یکی از راه‌های ارزیابی نهایی جواب در فیزیک تحلیل دیمانسیونی جواب است یعنی اگر جواب را به صورت پارامتری به‌دست آوریم در این جواب هر پارامتر نشان دهنده‌ی یک کمیت فیزیکی می‌باشد و واحد خاص خود را دارد و در یک عبارت پارامتری اعدادی که نشان دهنده‌ی کمیت‌های فیزیکی نیستند بدون واحد هستند و در اثر محاسبات ریاضی ایجاد می‌شوند. برای مثال در مسأله‌ی بالا واحد جواب نهایی باید به صورت m/s باشد:

$$\mathrm{m/s} = \sqrt{\frac{(\mathrm{m})(\mathrm{m/s^۲})}{(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}})^۲(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}})^۲ + (\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}})}} = \sqrt{\frac{\mathrm{m^۲}}{\mathrm{s^۲}}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

سرعت و شتاب نسبی

حتماً تا به حال به وسیله قطار سفر کرده‌اید. هنگامی که شما در واگن قطار هستید و قطاری در مجاورت شما به حرکت درمی‌آید شما احساس خواهید کرد که قطار شما به حرکت درآمده است اما هنگامی که به زمین یا دیوارهای ایستگاه نگاه می‌کنید متوجه می‌شوید که سرعت شما صفر است و ساکن هستید. در این فرآیند شما دو سرعت متفاوت را برای خود قائل شده‌اید و دلیل این امر تفاوت دستگاه ناظر بر شما در این دو حالت می‌باشد. در حالت اول شما از دید ناظری در قطار مجاورتان سرعت خود را اندازه گرفته‌اید یعنی این سرعت در دستگاهی که متصل به قطار مجاور می‌باشد اندازه‌گیری شده است. به این سرعت، سرعت نسبی شما نسبت به قطار مجاورتان گفته می‌شود اما در حالت دوم دستگاه ناظر بر شما زمین می‌باشد که همان دستگاه ساکن یا اینرسی است و ناظر متصل به این دستگاه سرعت حقیقی شما را اندازه خواهد گرفت.

برای محاسبه سرعت جسم A نسبت به جسم B کافی است یک دستگاه مختصات به جسم B بچسبانیم و سرعت جسم A را در آن دستگاه اندازه‌گیری کنیم:



شکل ۱-۳۱

با توجه به شکل (۱ـ۳۱) مکان جسم A در دستگاه مختصات چسبیده به جسم B در لحظه $t_۰$ به‌صورت $\vec{R}_۰ = x_۰\vec{i} + y_۰\vec{j}$ می‌باشد. پس از گذشت زمان (Δt) علاوه بر این‌که جسم A به‌طور جداگانه به میزان $\Delta\vec{R}_A = \vec{V}_A(\Delta t)$ تغییر مکان می‌دهد دستگاه متصل به جسم B نیز همراه جسم B به میزان $\vec{R}_B = \vec{V}_B(\Delta t)$ جابه‌جا می‌شود و مکان جدید جسم A در دستگاه متصل به جسم B در لحظه $t_۰ + \Delta t$ به شکل زیر خواهد بود:

$$\vec{R}_۱ = \vec{R}_۰ + \Delta\vec{R}_A - \Delta\vec{R}_B = \vec{R}_۰ + \Delta t(\vec{V}_A - \vec{V}_B)$$

حال اگر مقدار Δt را به سمت صفر میل دهیم می‌توانیم در هر لحظه سرعت نسبی جسم A نسبت به جسم B را بیابیم:

$$\vec{R}_۱ - \vec{R}_۰ = \Delta t(\vec{V}_A - \vec{V}_B)$$

$$\text{سرعت } A \text{ نسبت به } B = \frac{\text{جابه‌جایی جسم } A \text{ در این دستگاه}}{\text{تغییر زمان}} = \text{سرعت جسم } A \text{ در دستگاه چسبیده به جسم } B$$

$$\vec{V}_{A/B} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta\vec{R}_{A/B}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\vec{R}_{(t_۰+\Delta t)} - \vec{R}_{(t_۰)}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{A/B} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\vec{R}_۱ - \vec{R}_۰}{\Delta t} = \vec{V}_A - \vec{V}_B \Rightarrow \frac{d\vec{R}_{A/B}}{dt} = \vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

در رابطه به‌دست آمده $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$ سرعت‌های دو متحرک A و B نسبت به یک دستگاه مرجع مانند زمین می‌باشند. به همین صورت می‌توان نشان داد که سرعت جسم B نسبت به جسم A برابر است با:

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

این روابط در مورد شتاب نسبی نیز صدق می‌کند:

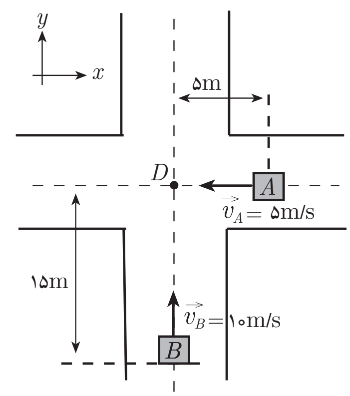
$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

برای اثبات رابطه شتاب نسبی کافی است محورهای x و y را به v_x و v_y تبدیل کنیم.

مثال ۱۷

در یک چهارراه خودروهای A و B مانند شکل (۱ـ۳۲) در حرکت می‌باشند. اگر این خودروها در لحظه $t_\circ$ در مکان‌های نشان داده شده باشند، حداقل فاصله بین این دو خودرو را بیابید.

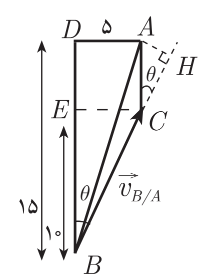


شکل ۱-۳۲

حل. برای حل این مسأله جسم A را ساکن در نظر می‌گیریم و سرعت جسم B را نسبت به جسم A محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = (۱۰)\vec{j} - (-۵)\vec{i} = ۱۰\vec{j} + ۵\vec{i}$$

همان‌طور که شکل (۱ـ۳۳) نشان می‌دهد اگر جسم A را ساکن در نظر بگیریم جسم B با سرعت $\vec{V}_{B/A}$ حرکت خواهد کرد و از کنار جسم A عبور خواهد کرد اما کمترین فاصله جسم A از امتداد سرعت $\vec{V}_{B/A}$ یعنی مسیر حرکت جسم B همان عمود AH خواهد بود که جواب مسأله می‌باشد: (شکل ۱ـ۳۴)



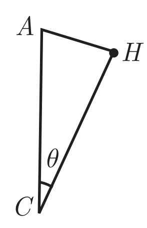
شکل ۱-۳۳

$$AH = AC\sin\theta\ ,\ AC = DE = BD - BE = ۵\text{m}$$

$$\sin\theta = \frac{EC}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{۵}{\sqrt{۱۰^۲ + ۵^۲}} = ۰/۴۵ \rightarrow\ AH = ۲/۲\text{m}$$

مثال ۱۸

آب رودخانه‌ای با سرعت $V_w = ۴\text{m/s}$ از شمال به جنوب در حال حرکت است. می‌خواهیم به وسیله یک قایق موتوری عرض این رودخانه را طی کنیم اگر سرعت قایق موتوری در آب ساکن برابر با $V_b = ۵\text{m/s}$ باشد: ($L = ۱۰\text{m}$ عرض رودخانه)



شکل ۱-۳۴

الف) مسافت طی شده توسط قایق درکمترین زمان لازم برای عبور از عرض رودخانه را بیابید.

ب) زمان لازم برای عبور از عرض رودخانه از طریق کمترین مسافت ممکن را بیابید.

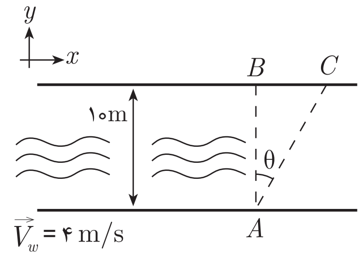
حل. الف) هنگامی که می‌گوییم سرعت قایق در آب ساکن برابر با ۵m/s می‌باشد، یعنی سرعت قایق نسبت به آب در هر شرایطی ۵m/s خواهد بود، زیرا اگر آب رودخانه با سرعت فرضی v در حال حرکت باشد، قایق نیز این سرعت را علاوه بر سرعت ایجاد شده توسط موتور خود به‌دست خواهد آورد و به‌طور خلاصه سرعت آب بر سرعت قایق تأثیرگذار خواهد بود:

سرعت قایق در آب ساکن یا سرعت حاصل توسط موتور: V_b

سرعت آب رودخانه: V_w

$$\vec{V}_B : \text{سرعت کل قایق} = \vec{V}_b + \vec{V}_w$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{\text{قایق , آب}} = \vec{V}_B - \vec{V}_w = \vec{V}_b + \vec{V}_w - \vec{V}_w = \vec{V}_b$$



شکل ۱-۳۵

پس اگر آب رودخانه را ساکن در نظر بگیریم سرعت قایق ۵m/s مشاهده می‌شود. حال اگر این سرعت به‌صورت کامل در راستای عرض رودخانه باشد، زمان حرکت قایق کمینه خواهد بود.

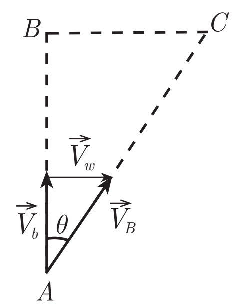
$$\vec{V}_{\text{قایق , آب}} \| \text{عرض رودخانه} \ \rightarrow \ \vec{V}_{\text{قایق , آب}} \| \vec{j}$$

$$\vec{V}_{\text{قایق , آب}} = \vec{V}_b \| \vec{j} \ \rightarrow \ \vec{V}_b = V_b \vec{j} = ۵\vec{j} \ (\text{m/s})$$

پس سرعت حاصل از موتور در راستای $\vec{j}$ خواهد بود و برای سرعت کل قایق داریم:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_b + \vec{V}_w = ۵\vec{j} + ۴\vec{i}$$

و از آنجایی که مسیر حرکت بر راستای سرعت مماس می‌باشد، مسیر حرکت قایق در حالت «الف» بر روی خط AC خواهد بود و طول AC به شکل زیر قابل محاسبه است: (شکل ۱ـ۳۶)



شکل ۱-۳۶

$$\cos\theta = \frac{|\vec{V}_b|}{|\vec{V}_B|} = \frac{۵}{\sqrt{۴^۲ + ۵^۲}} = ۰{,}۷۸$$

$$AB = AC\cos\theta \ , \ AB = L = ۱۰\,\text{m} \ \rightarrow \ AC = \frac{۱۰}{۰{,}۷۸} = ۱۲{,}۸\text{m}$$

$$AB\vec{j} = V_b\vec{j}(\Delta t_۱) \ \rightarrow \ \Delta t_۱ = \frac{۱۰}{۵} = ۲\text{s} \ \text{کمترین زمان لازم}$$

ب) کمترین مسافت ممکن هنگانی اتفاق می‌افتد که قایق مسیر عرض رودخانه یعنی همان مسیر AB را طی کند. برای این امر سرعت کل قایق باید در راستای مسیر AB باشد.

$$\vec{V}_B \| AB \| \vec{j} : \vec{V}_B = \vec{V}_b + \vec{V}_w = \vec{V}_b + ۴\vec{i}$$

$$(\vec{V}_b + ۴\vec{i}) \| \vec{j} \ \rightarrow \ \vec{V}_b = V'_b\vec{j} - ۴\vec{i} \ , \ |\vec{V}_b| = ۵\text{m/s}$$

$$\rightarrow \ ۵^۲ = ۴^۲ + (V'_b)^۲ \rightarrow (V'_b)^۲ = ۹ \ \rightarrow \ V'_b = ۳\text{m/s} \ \rightarrow \ \vec{V}_b = ۳\vec{j} - ۴\vec{i}$$

$$\rightarrow \ \vec{V}_B = ۳\vec{j} - ۴\vec{i} + ۴\vec{i} = ۳\vec{j}(\text{m/s})$$

$$AB\vec{j} = V_B\vec{j}(\Delta t_۲) \ \rightarrow \ ۱۰ = ۳\Delta t_۲ \ \rightarrow \ \Delta t_۲ = ۳.\overline{۳}\text{s}$$

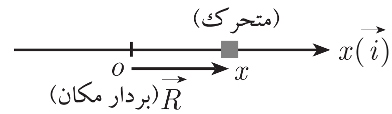
مباحث المپیاد

در قسمت المپیاد به بحث درباره‌ی موضوعات مطرح شده به شکل جامع‌تری می‌پردازیم و همچنین موضوعات جدیدی را مطرح خواهیم کرد که در حل مسائل پیچیده‌تر از آنها بهره خواهیم برد. ابتدا به‌طور کلی مروری بر روابط به‌دست آمده در سینماتیک یک‌بعدی و دوبعدی خواهیم داشت:

$$\text{بردار مکان} \quad \vec{r} = x\vec{i}$$

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_۲} - \vec{r_۱}}{t_۲ - t_۱} = \frac{(x_۲ - x_۱)}{t_۲ - t_۱}\vec{i}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



شکل ۱-۳۷

از این قسمت به بعد مشتق هر تابع دلخواه از زمان مانند f نسبت به زمان را با نماد $\dot{f}$ نشان می‌هیم:

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} \ \ , \ \ \frac{dg}{dt} = \dot{g} \ \ , \ \ \vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{R}}$$

شاید این سؤال برایتان به وجود آید که تفاوت میان دو تابع $f(t)$ و $\vec{R}(t)$ در چیست؟

پاسخ این سؤال بسیار ساده است. تابع $f(t)$ یک تابع اسکالر است یعنی به ازای هر ورودی t، تابع به شما یک عدد تحویل خواهد داد. در صورتی که تابع $\vec{r}(t)$ یک تابع برداری می‌باشد یعنی به ازای هر ورودی t شما یک بردار را به عنوان خروجی تابع خواهید داشت. حال شاید بپرسید مشتق در یک تابع برداری چگونه قابل محاسبه می‌باشد. در اینجا به صورت خلاصه این مطلب را توضیح می‌دهیم اما در قسمت‌های بعدی به‌طور مفصل به شرح این موضوع خواهیم پرداخت.

مشتق یک تابع برداری همانند مشتق یک تابع اسکالر با استفاده از تعریف مشتق محاسبه می‌شود. برای مثال سرعت یک متحرک در دو بعد به وسیله مشتق‌گیری از تابع مکان آن جسم که یک تابع برداری است به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_{(t)} = x_{(t)}\vec{i} + y_{(t)}\vec{j} \\
&\vec{v}_{(t)} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\vec{r}_{(t+\Delta t)} - \vec{r}_{(t)}}{(t+\Delta t) - t} \\
&\quad = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\left[x_{(t+\Delta t)}\vec{i} + y_{(t+\Delta t)}\vec{j}\right] - \left[x_{(t)}\vec{i} + y_{(t)}\vec{j}\right]}{\Delta t} \\
&\quad = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\left[x_{(t+\Delta t)} - x_{(t)}\right]\vec{i} + \left[y_{(t+\Delta t)} - y_{(t)}\right]\vec{j}}{\Delta t} \\
&\quad = \lim_{\Delta t \to ۰} \left(\frac{x_{(t+\Delta t)} - x_{(t)}}{\Delta t}\right)\vec{i} + \lim_{\Delta t \to ۰} \left(\frac{y_{(t+\Delta t)} - y_{(t)}}{\Delta t}\right)\vec{j} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \\
&\rightarrow \ \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = \vec{v}
\end{aligned}$$

همان‌طورکه می‌بینید مشتق یک بردار بر حسب زمان نیز به صورت برداری دیگر ظاهر می‌شود که با توجه به تعریف مشتق قابل توجیه است. مشتق سرعت را نیز می‌توان به همین صورت محاسبه کرد و بردار شتاب را به‌دست آورد.

مروری بر روابط سینماتیکی در یک بعد

$$\vec{r} = x\vec{i}$$
$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} \rightarrow \overrightarrow{\Delta r} = \vec{\bar{v}}\Delta t$$
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{d(x\vec{i})}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d(\vec{i})}{dt}$$

از آنجایی که بردار یکه‌ی $\vec{i}$ ثابت و مستقل از زمان است، جمله‌ی $\frac{d(\vec{i})}{dt}$ برابر با صفر خواهد بود.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i}$$
$$\vec{\bar{a}} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \rightarrow \overrightarrow{\Delta v} = \vec{\bar{a}}\Delta t$$
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\frac{d\vec{r}}{dt})}{dt}$$
$$= \frac{d^۲\vec{r}}{dt^۲} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i}$$
$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱ = \int_{\vec{r}_۱}^{\vec{r}_۲}\overrightarrow{dr} = \int_{t_۱}^{t_۲}\vec{v}dt = \int_{t_۱}^{t_۲}\dot{x}dt(\vec{i})$$
$$\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_۲ - \vec{v}_۱ = \int_{\vec{v}_۱}^{\vec{v}_۲}\overrightarrow{dv} = \int_{t_۱}^{t_۲}\vec{a}dt = \int_{t_۱}^{t_۲}\ddot{x}dt(\vec{i})$$

در دو تساوی فوق از مفهوم انتگرال استفاده شده است که آن را توضیح خواهیم داد.

در قسمت قبل روابط سینماتیکی خود را بدون استفاده از مفهوم انتگرال و در سطح دروس پیش‌دانشگاهی بیان نمودیم اما در واقعیت کمتر مسأله‌ای بدون استفاده از مفاهیم مشتق و انتگرال قابل حل است. برای درک کاربرد انتگرال در مسائل فیزیکی مسأله‌ی زیر را حل خواهیم کرد.

مثال ۱۹ متحرکی با سرعت متغیر $\vec{v}(t)$ بر یک جاده‌ی مستقیم در حال حرکت می‌باشد.

الف) مقدار جابه‌جایی این متحرک را بین لحظات $t = ۲\text{s}$ و $t = ۵\text{s}$ بیابید.

ب) سرعت متوسط متحرک را در بازه‌ی زمانی $۲\text{s} < \Delta t < ۵\text{s}$ بیابید.

ج) تابع مکان این متحرک را بیابید. $(\vec{r}_{(t=۰)} = ۱۵\vec{i})$

$$\vec{v}_{(t)} = (at^۲ + bt + c\sin t)\vec{i}\ (\text{m/s})\ \ ,\ \ a = b = ۲\ ,\ c = ۵۵$$

حل. الف) با توجه به صورت مسأله تنها اطلاعاتی که در اختیار ما قرار داده شده است تابع سرعت جسم بر حسب زمان می‌باشد. برای اینکه مقدار جابه‌جایی متحرک در بازه‌ی زمانی $۲\text{s} < \Delta t < ۵\text{s}$ را بیابیم، می‌توانیم از سرعت متوسط متحرک در این بازه‌ی زمانی استفاده کنیم اما در این مسأله سرعت متوسط را در اختیار نداریم بلکه سرعت لحظه‌ای متحرک در هر لحظه‌ی دلخواه را در اختیار داریم. اکنون به روش‌های زیر در یافتن میزان جابه‌جایی بین لحظات $t = ۲\text{s}$ و $t = ۵\text{s}$ توجه کنید:

روش اول:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_{t=5} - \vec{r}_{t=2} = \vec{\overline{v}} \times \Delta t = 3\vec{\overline{v}} \ \ , \ \ \vec{\overline{v}} : 2\text{s} < \Delta t < 5\text{s}$$

روش دوم:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_{t=5} - \vec{r}_{t=3/5} + \vec{r}_{t=3/5} - \vec{r}_{t=2} = \vec{\overline{v_1}} \times \Delta t_1 + \vec{\overline{v_2}} \times \Delta t_2$$

$$\begin{cases} \Delta t_1 = (5 - 3/5) = 1/5\text{s} & , \vec{\overline{v_1}} : 3/5\text{s} < \Delta t_1 < 5\text{s} \\ \Delta t_2 = (3/5 - 2) = 1/5\text{s} & , \vec{\overline{v_2}} : 2\text{s} < \Delta t_2 < 3/5\text{s} \end{cases}$$

روش سوم:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta r} &= \vec{r}_{t=5} - \vec{r}_{t=4} + \vec{r}_{t=4} - \vec{r}_{t=3} + \vec{r}_{t=3} - \vec{r}_{t=2} \\ &= \overrightarrow{\Delta r_1} + \overrightarrow{\Delta r_2} + \overrightarrow{\Delta r_3} = \vec{\overline{v_1}}\Delta t_1 + \vec{\overline{v_2}}\Delta t_2 + \vec{\overline{v_3}}\Delta t_3 \end{aligned}$$

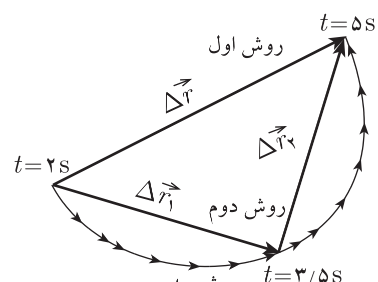
$$\begin{cases} \Delta t_1 = (5 - 4) = 1\text{s} & , \vec{\overline{v_1}} : 4\text{s} < \Delta t_1 < 5\text{s} \\ \Delta t_2 = (4 - 3) = 1\text{s} & , \vec{\overline{v_2}} = 3\text{s} < \Delta t_2 < 4\text{s} \\ \Delta t_3 = (3 - 2) = 1\text{s} & , \vec{\overline{v_3}} : 2\text{s} < \Delta t_3 < 3\text{s} \end{cases}$$

$$\vdots$$

روش nام:

$$n \to \infty \ : \ \overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{\Delta r_1} + \overrightarrow{\Delta r_2} + \overrightarrow{\Delta r_3} + \cdots + \overrightarrow{\Delta r_n}$$

$$n \to \infty \ \Rightarrow \ \underset{1 \le i < n}{\Delta r_i} \ \to \ 0 \ \Rightarrow \ \Delta r_i = dr_i$$



شکل ۱-۳۸

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در روش nام بردار جابه‌جایی کل در بازه‌ی زمانی $2\text{s} < \Delta t < 5\text{s}$ را به وسیله مجموع بردارهای بی‌نهایت کوچک جابه‌جایی به وجود آمده در بازه‌های زمانی بی‌نهایت کوچک نشان داده‌ایم (مانند شکل ۱ـ۳۸). در نتیجه سرعت‌های متوسط نوشته شده در روش nام برابر با سرعت لحظه‌ای در لحظه‌ی متناظر با آن بردار جابه‌جاییِ بی‌نهایت کوچک خواهد بود. انتگرال یک ابزار ریاضی است که به وسیله‌ی آن می‌توان مجموع این مقدارهای بی‌نهایت کوچک را به‌دست آورد. برای درک کامل مفهوم انتگرال می‌توانید کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال از همین مجموعه کتاب‌ها را مطالعه کنید.

مجموع بردارهای جابه‌جایی در روش‌های مختلف حل مسأله را می‌توان به وسیله ابزار $\sum$ نشان داد و در حالتی که این بردارها بی‌نهایت کوچک باشند علامت $\sum$ به انتگرال با نماد $\int$ تبدیل خواهد شد.

$$\overrightarrow{\Delta r} = \sum_{i=1}^{n} \Delta r_i$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta r_i = \int dr_i \ \ : \ \ \text{مجموع بردارهای بی‌نهایت کوچک جابه‌جایی}$$

برای به‌دست آوردن حاصل یک انتگرال قضایایی وجود دارد که در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال به اثبات رسیده است. طبق این قضایا انتگرال به دو نوع انتگرال معین و انتگرال نامعین تفکیک می‌شود.

انتگرال معین: انتگرال ابزاری است که به وسیله‌ی آن می‌توان بی‌نهایت مقدار بسیار کوچک را با یکدیگر جمع کرد. حال این مقادیر بسیار کوچک می‌توانند به صورت تابعی از یک متغیر خاص باشند مثلاً در عبارت $\left(\lim\limits_{\Delta t_i \to ۰} v(t_i)\Delta t_i\right)$ کل عبارت تابعی از متغیر t می‌باشد. این امر بسیار مفید می‌باشد زیرا محاسبه‌ی چنین انتگرالی با استفاده از قضایای انتگرال بسیار ساده خواهد بود. در انتگرال معین، متغیر انتگرال بین دو نقطه‌ی مشخص تغییر می‌کند مانند مسأله‌ی فوق ($۲\mathrm{s} < t < ۵\mathrm{s}$). در این نوع انتگرال، حاصل انتگرال یک عدد (در صورت اسکالر بودن تابع داخل انتگرال) و یا یک بردار (در صورت برداری بودن تابع داخل انتگرال) خواهد بود. انتگرال ایجاد شده در روش nام برای حل مسأله‌ی فوق از نوع انتگرال معین است.

$$\overrightarrow{\Delta R} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\overrightarrow{v_i}\,\Delta t_i = \int_{t=۲\mathrm{s}}^{t=۵\mathrm{s}}\vec{v}dt \quad : \quad \text{فرم نمایش انتگرال معین}$$

انتگرال نیز مانند $\sum$ حاصل جمع عبارات مختلف می‌باشد در نتیجه تمامی قوانین حاکم بر $\sum$ بر انتگرال نیز حاکم است.

$$۱)\ \sum_{i=۱}^{n} a_i + b_i = \sum_{i=۱}^{n} a_i + \sum_{i=۱}^{n} b_i \ \rightarrow\ \int_{x_۱}^{x_۲}\big[f(x)+g(x)\big]dx$$
$$= \int_{x_۱}^{x_۲} f(x)dx + \int_{x_۱}^{x_۲} g(x)dx$$

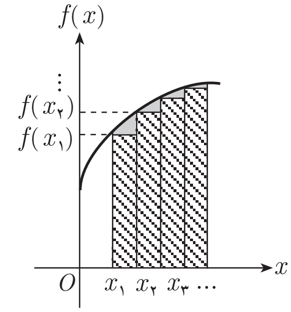
ضرایب ثابت از انتگرال خارج می‌شوند:

$$۲)\ \sum_{i=۱}^{n} k a_i = k\sum_{i=۱}^{n} a_i \ \rightarrow\ \int_{x_۱}^{x_۲} kf(x)dx = k\int_{x_۱}^{x_۲} f(x)dx$$

توجیه هندسی انتگرال

از نظر هندسی می‌توان انتگرال یک تابع را به صورت مساحت زیر منحنی آن تابع رسم کرد. در شکل (۱ـ۳۹) حاصل‌جمع مساحت مستطیل‌های هاشورزده شده برابر است با:

$$S = f(x_۱)\times(x_۲ - x_۱) + f(x_۲)\times(x_۳ - x_۲) + \cdots + f(x_n)\times(x_{n+۱} - x_n)$$
$$= \sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\times(x_{i+۱} - x_i)$$



شکل ۱-۳۹

حاصل عبارت به‌دست آمده برابر با مساحت مستطیل‌های هاشور خورده در زیر منحنی تابع می‌باشد و اما اختلاف کوچکی میان مساحت به‌دست آمده توسط مستطیل‌ها و مساحت زیر منحنی تابع وجود دارد که برابر با مساحت قسمت‌های سیاه شده در نمودار شکل (۱ـ۳۹) می‌باشد. حال اگر جمله‌ی $(x_{i+۱} - x_i)$ را به سمت صفر میل دهیم آنگاه تعداد جملات موجود

در حاصل‌جمع (n) به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و در این حالت مساحت قسمت‌های سیاه شده بین مستطیل‌ها و نمودار تابع به سمت صفر میل خواهد کرد در نتیجه مساحت زیر نمودار تابع با مساحت مستطیل‌ها برابر خواهد شد. از طرفی با میل دادن n به سمت بی‌نهایت عبارت $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \times (x_{i+1} - x_i)$ تبدیل به انتگرال تابع $f(x)$ از x_1 تا x_n خواهد شد در نتیجه انتگرال معین یک تابع از x_i تا x_j برابر با مساحت زیر منحنی تابع در بازه‌ی $x_i < x < x_j$ می‌باشد:

$$(n \to \infty) \ : \ (\Delta x_i \ \to \ 0) \ : \ \Delta x_i = dx$$

$$\to \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \times (\Delta x_i) = \int_{x_1}^{x_n} f(x)dx = f(x) \quad \text{مساحت زیر منحنی نمودار تابع}$$

این نکته در مسائلی که نمودار تابع داخل انتگرال به صورت چندضلعی و یا دایروی باشد بسیار پرکاربرد می‌باشد زیرا محاسبه‌ی مساحت این اشکال هندسی ساده‌تر از محاسبه انتگرال از روش‌های جبری است.

اکنون به حل مسأله‌ی خودمان برمی‌گردیم:

در مسأله‌ی مطرح شده تابع سرعت بر حسب زمان همان تابع داخل انتگرال می‌باشد که با ضابطه‌ی $v(t) = at^2 + bt + c\sin t$ بیان شده است. ضابطه‌ی تابع نشان می‌دهد که شکل منحنی تابع پیچیده خواهد بود و نمی‌توان مساحت زیر نمودار تابع را به راحتی محاسبه نمود پس باید به دنبال روش دیگری برای حل این انتگرال باشیم.

برای حل چنین انتگرالی از روش حل انتگرال نوع دوم یا انتگرال نامعین استفاده می‌کنیم. برای آشنایی با این نوع انتگرال به اختصار به توضیح مفهوم انتگرال نامعین و قضایای مربوط به آن می‌پردازیم.

تفاوت اساسی میان انتگرال معین و انتگرال نامعین در کران‌های بالا و پایین متغیر انتگرال‌گیری در این دو نوع انتگرال می‌باشد. در انتگرال معین دیدیم که حاصل انتگرال یک عدد است که با توجه به کران‌های بالا و پایین انتگرال تعیین می‌شود ولی در انتگرال نامعین حداقل یکی از کران‌های انتگرال به صورت متغیر نوشته می‌شود که به ازای هر مقدار خاص برای کران متغیر انتگرال حاصل انتگرال نیز عددی مشخص خواهد بود و به ازای هر عددی که به جای کران متغیر در انتگرال نامعین قرار گیرد، این انتگرال تبدیل به یک انتگرال معین خواهد شد:

$$\text{شکل انتگرال نامعین با کران بالای متغیر} \ : \ \int_a^x f(x)dx \ , \quad \begin{matrix} x = b \ \to \ \int_a^b f(x)dx = A \\ x = c \ \to \ \int_a^c f(x)dx = B \end{matrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید با تغییر در مقدار کران متغیر انتگرال، حاصل انتگرال نیز تغییر می‌کند در نتیجه انتگرال نامعین خود تابعی از متغیر موجود در کران انتگرال می‌باشد:

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) \ , \ \int_a^t f(x)dx = F(t) \ , \ \int_a^s f(x)dx = F(s)$$

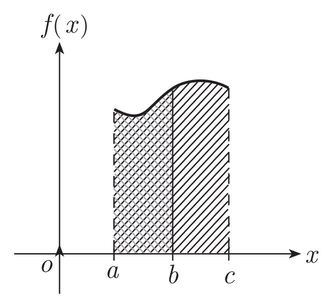
متغیر تابع f و متغیرکران انتگرال مستقل از یکدیگرند و هیچ لزومی ندارد که آنها را به وسیله‌ی نمادهای یکسان نشان دهیم برای مثال می‌توان متغیرکران انتگرال را با نماد t و متغیر تابع را با نماد x نشان داد، ولی باید توجه داشت که تابع جواب انتگرال به صورت تابعی از متغیرکران انتگرال می‌باشد.

اکنون می‌خواهیم به وسیله‌ی تابع F به‌دست آمده از انتگرال نامعین، مقدار انتگرال معین تابع f را در بازه‌ی $b < x < c$ به‌دست آوریم. برای این کار به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) \ \rightarrow \ \begin{cases} F(b) = \int_a^b f(x)dx = A \\ F(c) = \int_a^c f(x)dx = B \end{cases}$$

$$F(c) - F(b) = \int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

در عبارت $F(c) - F(b)$ یک بار انتگرال معین تابع f در محدوده‌ی $a < x < c$ محاسبه می‌شود و سپس انتگرال معین همان تابع از a تا b محاسبه شده و از حاصل انتگرال اول کم می‌شود. شمای هندسی حاصل عبارت $F(c) - F(b)$ بر روی نمودار تابع f در شکل ۱ـ۴۰ نمایش داده شده است.



شکل ۱ـ۴۰

$$F(c) = \int_a^c f(x)dx = \ a < x < c \text{ مساحت قسمت هاشور خورده بین }$$

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx = \ a < x < b \text{ مساحت قسمت هاشور خورده بین }$$

$$\rightarrow \ F(c) - F(b) = \ b < x < c \text{ مساحت قسمت هاشور خورده بین }$$

$$= \int_b^c f(x)dx \ : \ b < x < c \text{ انتگرال معین تابع } f(x) \text{ در بازه‌ی }$$

با آگاهی از برخی خواص انتگرال‌ها نتیجه‌ی فوق را می‌توان به صورت جبری نیز به‌دست آورد:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \qquad (I)$$

اثبات خاصیت (I) بسیار ساده است و می‌توان به وسیله‌ی جمع کردن مساحت زیر نمودار تابع $f(x)$ در بازه‌های $a < x < b$ و $b < x < c$ آن را نشان داد.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (II)$$

خاصیت (II) با توجه به خاصیت (I) قابل اثبات می‌باشد:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\rightarrow \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0 \ \rightarrow \ \int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

با توجه به دو خاصیت (I) و (II) داریم:

$$\begin{aligned} F(c)-F(b) &= \int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_b^a f(x)dx \\ &= \int_b^c f(x)dx \ : \ b<x<c \ \text{انتگرال معین تابع } f \text{ در بازه‌ی} \end{aligned}$$

با توجه به مطالب گفته شده می‌توان با استفاده از تابع F، انتگرال معین تابع f را در هر بازه‌ی دلخواه به‌دست آورد. به تابع F یک تابع اولیه برای تابع f گفته می‌شود. قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال بیان می‌کند که رابطه‌ی میان دو تابع F و f به صورت زیر می‌باشد:

$$F'(x) = f(x) \ \rightarrow \ \int f(x)dx = F(x)$$

قضیه‌ی فوق در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال از همین مجموعه به اثبات رسیده است. این تساوی نشان می‌دهد به ازای یک تابع f یکتا، بی‌نهایت تابع اولیه F می‌توان یافت که در قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال صدق کند. این ادعا را به شکل زیر می‌توان اثبات کرد:

$$F_1(x) = \int f(x)dx \ \rightarrow \ F_1'(x) = f(x)$$

$$F_2(x) = F_1(x) + c$$

c: یک عدد ثابت دلخواه

$$\begin{aligned} \frac{dF_2(x)}{dx} &= \frac{d(F_1(x)+c)}{dx} = \frac{dF_1(x)}{dx} + \frac{dc}{dx} \\ &= \frac{dF_1(x)}{dx} = F_1'(x) = f(x) \\ &\rightarrow \ F_2'(x) = f(x) \ \rightarrow \ F_2(x) = \int f(x)dx \end{aligned}$$

همان‌طور که در اثبات فوق نشان داده شده است برای هر تابع انتگرال‌پذیر دلخواه مانند f بی‌نهایت تابع اولیه وجود دارد که تفاضل هر دو تابع دلخواه از میان این توابع اولیه برابر با عددی ثابت و مستقل از متغیر انتگرال خواهد بود. دلیل تفاوت در ثابت‌های موجود در توابع اولیه، تفاوت در کران‌های ثابت انتگرال نامعین می‌باشد برای مثال انتگرال نامعین تابع $f(x)$ را می‌توان به اشکال مختلفی نشان داد که در هر یک از این انتگرال‌ها کران پایین انتگرال عددی ثابت ولی متفاوت با کران پایین انتگرال‌های دیگر است:

$$\int_{a_1}^x f(x)dx \ , \ \int_{a_2}^x f(x)dx \ , \ \int_{a_3}^x f(x)dx \ , \ \int_{a_4}^x f(x)dx \ , \ \cdots$$

$$a_1, a_2, a_3, \cdots = \text{cte} \qquad , \quad a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq \cdots$$

$$\int_{a_1}^x f(x)dx = F(x) \qquad , \quad \int_{a_2}^x f(x)dx = F(x) + c_1$$

$$\int_{a_3}^x f(x)dx = F(x) + c_2 \quad , \quad \int_{a_4}^x f(x)dx = F(x) + c_3$$

$$\int_{a_۱}^{x} f(x)dx - \int_{a_۲}^{x} f(x)dx = \int_{a_۱}^{x} f(x)dx + \int_{x}^{a_۲} f(x)dx = \int_{a_۱}^{a_۲} f(x)dx \qquad (I)$$

$$\int_{a_۱}^{x} f(x)dx - \int_{a_۲}^{x} f(x)dx = F(x) - \left[F(x) + c_۱\right] = -c_۱ \qquad (II)$$

$$(I),(II) \;\rightarrow\; c_۱ = -\int_{a_۱}^{a_۲} f(x)dx = \int_{a_۲}^{a_۱} f(x)dx$$

تفاوت در ثابت‌های موجود در توابع اولیه، به دلیل تفاوت در کران‌های ثابت انتگرال نامعین می‌باشد.

با توجه به مطالب گفته شده با مفاهیم انتگرال معین و نامعین به صورت کلی آشنا شدیم و روش استفاده از آنها را آموختیم. در واقع مفاهیم مشتق و انتگرال جدا از یکدیگر نیستند و هرگاه بتوانیم مفهوم یکی را به خوبی درک کنیم، فهم دیگری نیز امکان‌پذیر خواهد بود زیرا هر دوی این مفاهیم با مقادیر بی‌نهایت کوچک سروکار دارند و به نوعی می‌توان گفت انتگرال همان معکوس مشتق می‌باشد.

انتگرال نامعین برخی توابع پرکاربرد ریاضی در زیر آورده شده است. (برای اثبات درستی انتگرال‌های زیر تنها کافی است از حاصل انتگرال نامعین مشتق گرفته و برابری آن را با تابع درون انتگرال بررسی کنید.)

$$۱)\ \int x^n dx = \frac{۱}{n+۱}x^{n+۱} + c \quad (n \neq -۱)$$

$$۲)\ \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$۳)\ \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$۴)\ \int (\frac{۱}{x \pm a})dx = \ln|x \pm a| + c \ , \ (\ln a = \log_e a)$$

$$۵)\ \int (\frac{۱}{۱ + x^۲})dx = \mathrm{Arctan} x + c$$

$$۶)\ \int (\frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}})dx = \mathrm{Arcsin} x + c$$

$$۷)\ \int (\frac{۱}{\cos^۲ x})dx = \int (۱ + \tan^۲ x)dx = \tan x + c$$

$$۸)\ \int (\frac{۱}{\sin^۲ x})dx = \int (۱ + \cot^۲ x)dx = -\cot x + c$$

$$۹)\ \int (e^{ax})dx = \frac{۱}{a}e^{ax} + c$$

با استفاده از انتگرال‌های فوق می‌توانیم مسأله‌ی مطرح شده را به‌طور کامل حل نماییم:

الف) بردار جابه‌جایی بین لحظات $۲\mathrm{s} < t < ۵\mathrm{s}$:

$$\vec{v}_{(t)} = (at^۲ + bt + c\sin t)\vec{i}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{R}_{(t_۲)}-\vec{R}_{(t_۱)}=\int_{t_۱}^{t_۲}\vec{v}(t)dt\\ t_۱=۲\text{s}\ ,\ t_۲=۵\text{s}\end{array}\right\}\rightarrow\ \overrightarrow{\Delta R}=\vec{R}_{(۵)}-\vec{R}_{(۲)}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{\Delta R}=\int_۲^۵(at^۲+bt+c\sin t)\vec{i}dt$$

$\vec{i}$: بردار یکه‌ی مستقل از زمان $\rightarrow\ \overrightarrow{\Delta R}=\vec{i}\int_۲^۵(at^۲+bt+c\sin t)dt$

با استفاده از خواص انتگرال داریم:

$$\overrightarrow{\Delta R}=\vec{i}\Big[a\int_۲^۵t^۲dt+b\int_۲^۵tdt+c\int_۲^۵\sin tdt\Big]$$

$$\rightarrow\overrightarrow{\Delta R}=\vec{i}\left[\frac{a}{۳}(۵^۳-۲^۳)+\frac{b}{۲}(۵^۲-۲^۲)+c\Big(-\cos(۵)-(-\cos(۲))\Big)\right]$$

بردار جابه‌جایی بین لحظات $۲\text{s}<t<۵\text{s}$: $(a=b=۲\ ,\ c=۵۵)$

$$\overrightarrow{\Delta R}=\vec{i}[۷۸+۲۱-۳۸/۵]=۶۰/۵\vec{i}\ (\text{m})$$

ب) سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی $۲\text{s}<t<۵\text{s}$:

$$\vec{\overline{v}}=\frac{\vec{R}_{(۵)}-\vec{R}_{(۲)}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{\Delta R}}{\Delta t}=\frac{۶۰/۵}{(۵-۲)}\vec{i}=۲۰/۲\vec{i}\ (\frac{\text{m}}{\text{s}})$$

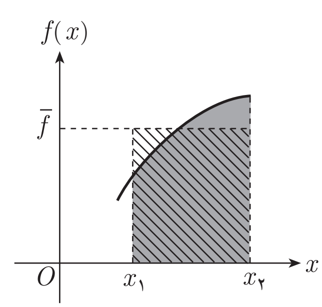
$\vec{\overline{v}}$ نشان دهنده‌ی مقدار متوسط تابع $\vec{v}(t)$ در بین لحظات $t=۲\text{s}$ و $t=۵\text{s}$ است. در حالت کلی برای تابع دلخواه $f(x)$ مقدار متوسط این تابع در بازه‌ی دلخواه $x_۱<x<x_۲$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{f}=\frac{\int_{x_۱}^{x_۲}f(x)dx}{(x_۲-x_۱)}\ \rightarrow\ \overline{f}(x_۲-x_۱)=\int_{x_۱}^{x_۲}f(x)dx$$

توجیه هندسی مقدار متوسط تابع $f(x)$ در شکل نمودار (۱ـ۴۱) نشان می‌دهد که مساحت مستطیل هاشور خورده در شکل برابر با مساحت زیر نمودار در بازه‌ی $x_۱<x<x_۲$ است:

$\overline{f}(x_۲-x_۱)$: مساحت مستطیل هاشور خورده

$\int_{x_۱}^{x_۲}f(x)dx$: مساحت زیر نمودار



شکل ۱-۴۱

ج) تابع مکان متحرک: برای حل این قسمت از مسأله باید از روش حل انتگرال نامعین استفاده کنیم:

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt}=\vec{v}(t)\ \rightarrow\ \vec{R}(t)=\int\vec{v}(t)dt$$

$$\rightarrow\vec{R}(t)=\int(at^۲+bt+c\sin t)\vec{i}dt$$

$$\rightarrow\vec{R}(t)=\vec{i}\Big[a\int t^۲dt+b\int tdt+c\int\sin tdt\Big]$$

$$\rightarrow \vec{R}(t) = \vec{i}\left(\left(a\frac{t^{۳}}{۳} + c_{۱}\right) + \left(b\frac{t^{۲}}{۲} + c_{۲}\right) + (-c\cos t + c_{۳})\right]$$

$$\rightarrow \vec{R}(t) = \left(\frac{at^{۳}}{۳} + \frac{bt^{۲}}{۲} - c\cos t + (\underbrace{c_{۱} + c_{۲} + c_{۳}}_{c'})\right)\vec{i}$$

$$= \left(\frac{at^{۳}}{۳} + \frac{bt^{۲}}{۲} - c\cos t + c'\right)\vec{i}$$

نتیجه‌ی حاصل از انتگرال نامعین نشان می‌دهد که بی‌نهایت تابع برداری به ازای مقدار ثابت‌های مختلف برای c' وجود دارد که از نظر ریاضی همگی آنها می‌توانند نشان دهنده‌ی تابع مکان این متحرک باشند اما در دنیای واقعی تنها یکی از این توابع است که نشان دهنده‌ی تابع مکان این متحرک است در نتیجه برای مشخص نمودن این تابع باید اطلاعاتی در اختیار داشته باشیم تا بتوانیم ثابت c' متناظر با این تابع را به‌دست آوریم. این اطلاعات از روی شرایط اولیه‌ی مسأله در اختیار ما قرار می‌گیرد که در این مسأله به صورت $\vec{R}_{(\circ)} = ۱۵\vec{i}\ (\mathrm{m})$ بیان شده است یعنی از میان تمامی توابع مکان به‌دست آمده از انتگرال نامعین تنها در یکی از توابع با یک ثابت c' مشخص است که متحرک در لحظه‌ی $t = \circ\,\mathrm{s}$ در مکان $\vec{R} = ۱۵\vec{i}$ قرار دارد و این تابع جواب قطعی مسأله‌ی ما می‌باشد. این احتمال وجود دارد که در برخی از مسائل تعداد ثابت‌های انتگرال‌گیری دو و یا چند ثابت باشد که در این حالت شرایط اولیه‌ی مسأله نیز به همین میزان افزایش پیدا می‌کند و به ازای هر یک ثابت انتگرال‌گیری، یک شرط اولیه خواهیم داشت. اگر تعداد ثوابت از تعداد شرایط اولیه‌ی مسأله بیشتر باشد نمی‌توانیم به جواب قطعی مسأله دست پیدا کنیم:

$$\vec{R}(t) = \left(\frac{at^{۳}}{۳} + \frac{bt^{۲}}{۲} - c\cos t + c'\right)\vec{i}\ ,\quad a = b = ۲\ ,\ c = ۵۵$$

$$\vec{R}(\circ) = (\circ + \circ - c + c')\vec{i} = ۱۵\vec{i} \ \rightarrow\ c' - c = ۱۵ \ \rightarrow\ c' = ۷\circ$$

تابع مکان متحرک بر حسب زمان:

$$\vec{R}(t) = (\frac{۲}{۳}t^{۳} + t^{۲} - ۵۵\cos t + ۷\circ)\vec{i}$$

مثال ۲۰

ذره‌ی شماره‌ی (۱) تحت شتاب $a = -kv$ و ذره‌ی شماره‌ی (۲) تحت شتاب $a = -kt$ و ذره‌ی شماره‌ی (۳) تحت شتاب $a = -ks$ بر روی محور مستقیم S حرکت می‌کنند. هر سه ذره حرکت خود را از مبدأ مختصات در $S = \circ$ و با سرعت اولیه‌ی $v_{\circ} = ۱\circ\,\mathrm{m/s}$ در زمان $t = \circ$ آغاز کرده‌اند و مقدار ضریب k برای هر سه ذره برابر با ۰٫۱ است. (دقت کنید که واحد k برای سه ذره متفاوت می‌باشد). تابع موقعیت، سرعت و شتاب هر سه ذره را بر حسب زمان به‌دست آورید.

حل. برای به‌دست آوردن توابع سرعت و مکان یک متحرک می‌توانیم از تابع شتاب آن متحرک انتگرال‌گیری کنیم و سپس به وسیله‌ی اعمال شرایط مرزی ثابت‌های حاصل از انتگرال را تعیین نماییم. اما در صورت این مسأله تابع شتاب ذرات (۱) و (۳) به‌صورت توابعی از زمان بیان نشده‌اند و در نتیجه نمی‌توان از آنها بر حسب متغیر زمان انتگرال‌گیری کرد. برای این‌که بتوانیم توابع شتاب، سرعت و مکان این دو ذره را بر حسب زمان بیان نماییم به‌صورت زیر عمل می‌کنیم: