برگی از درخت المپیاد نجوم

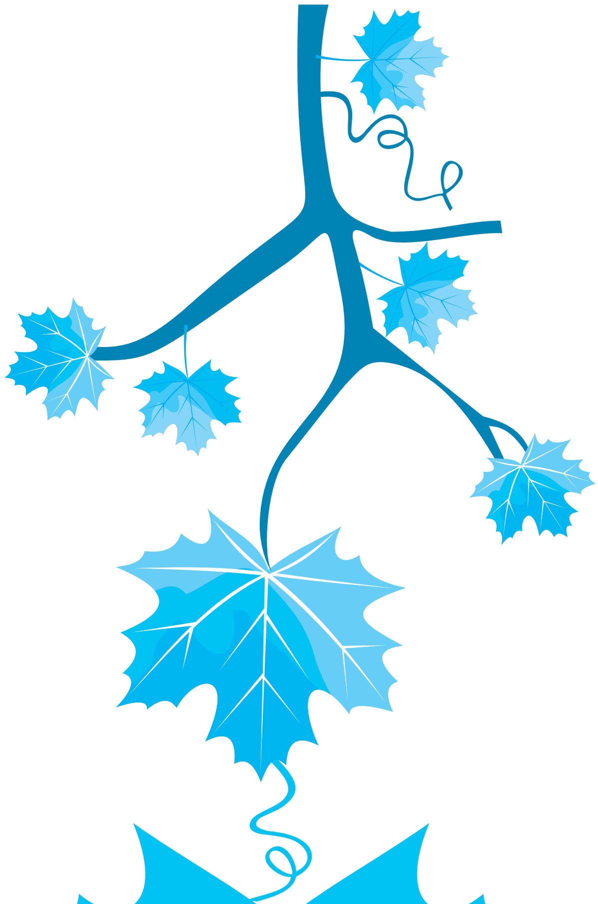
مکانیک سماوی

مؤلفین

محمدجواد شریعت‌زاده

دکتر مهدی خاکیان قمی

انتشارات خوشخوان



درخت المپیاد درختی است که توسط
انتشارات خوشخوان کاشته شده و هریک
از کتاب های این پروژه برگی از آن است.
وظیفه ما نگهداری وآبیاری این درخت است. امیدواریم
باعنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده
وبه بار واقعی بنشیند. فراموش نکنید که بار ومیوه ی
این درخت شما
عزیزان می باشید.
التماس دعا

پروژه‌ی درخت المپیاد

- اعتقاد بر این است که شروع فعالیت‌های المپیاد به صورت حرفه‌ای، باید از ابتدای دوره‌ی دبیرستان شروع شود. اکثر المپیادهای علمی در زمستان سال سوم دبیرستان تعیین تکلیف می‌شوند. بنابراین از شروع دبیرستان تا اواسط سال سوم حدوداً ۸ ترم تحصیلی می‌شود (با احتساب فصل و ترم تابستان) که لازم است برنامه‌ریزی دقیقی برای این چند ترم انجام شود.
- انتشارات خوشخوان این برنامه‌ریزی را در قالب پروژه‌ی درخت المپیاد انجام داده است که هر شاخه از درخت، مبحثی از آن المپیاد و هر برگ از آن شاخه شماره‌ای از آن مبحث می‌باشد.

به عنوان مثال اپتیک (۱) کتابی است که در یک ترم تحصیلی در یک کلاس ممتاز می‌توان برای داوطلبان المپیاد فیزیک تدریس کرد.

با عنایات حضرت حق و با کمک تنی چند از همکاران گرامی کتب مربوط به این درخت در هر رشته‌ای از المپیاد معرفی خواهد شد.

- منتظر پیشنهادات و نظرات شما سروران هستیم.

گروه المپیاد

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

مسابقه ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش هایی هستند که کم وبیش در سرتاسر دنیای پهناور به صورت داخلی وبین المللی برگزارمی شود وسال به سال به تنوع، جذبه وعظمت آن ها افزوده می‌شود. یکی ازاین همایش های باشکوه که هرسال درچندین رشته درسطح دانش آموزان سنوات آخر دوره متوسطه برگزارمی‌شود المپیادهای علمی‌می باشد که قدیمی ترین آن المپیاد ریاضی بوده و ازسال ۱۹۵۹ آغاز و تا به حال ادامه داشته است.

در حال حاضر نتیجه ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص های قدرت علمی آن کشورمحسوب شده و نفرات ممتاز این المپیادها به راحتی جذب دانشگاه ها وآکادمی های ممتاز جهان شده وپس ازگذشت سنواتی چند به موفقیت های چشم‌گیری نایل می شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال های نه چندان دور از مدال آوران این المپیادها بوده اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین باردر سال ۱۳۶۶ در المپیاد ریاضی جهان که در کشورکوبا برگزار می شد شرکت کرده و باکسب یک مدال برنز به مقام ۲۶ جهان نائل آمد که تعجب همگان را برانگیخت چراکه درآن سال ایران درگیرجنگ تحمیلی بوده و جهانیان به غیر از جنگ و درگیری چیزی از ایران سراغ نداشتند و درخشش دانش آموزان ایران در آن سال و سنوات بعد نگاه ها را به سمت ایران معطوف کرده وچشم خفته آن ها را تا حدود زیادی بیدارکرد. همانطورکه از رسانه های گروهی مطلع شده اید درتمام المپیادهای علمی تیم اعزامی کشورعزیزمان درسنوات گذشته جزء کشورهای برتر بوده وضمن کسب مدال های رنگارنگ رتبه های بسیار درخشانی ازجمله رتبه اول را حائز شده اند.

نحوه گزینش نفرات اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگرند به این صورت که درابتدا درمسابقه ای سراسری تحت عنوان مرحله اول که معمولاً به صورت پرسش های چندگزینه ای مطرح می شود حدوداً هزارنفر پذیرفته شده و در رقابتی معمولاً تشریحی که مرحله ی دوم نامیده می شود شرکت می کنند. دراین مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و دردوره ی تابستانی درباشگاه دانش پژوهان جوان که متولی برگزاری تمام المپیاد های علمی می باشد شرکت کرده و پس ازگذراندن این دوره مرحله ی سوم آزمون برگزار شده و عده ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عده ای مدال نقره و عده ای دیگر مدال برنز

کسب می کنند (در این مرحله معمولاً همه‌ی افراد شرکت کننده در دوره مدال کسب می کنند) دارندگان مدال طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضاء تیم اعزامی شناسایی می شوند. دارندگان مدال طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه ی تحصیل می دهند اما دارندگان مدال های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان در کنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه خود درقابت می کنند با این تفاوت که این افراد سهمیه‌ی ویژه ای در پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش پژوهان جوان تشریح شده است.

متأسفانه در سال های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت های المپیاد جبهه می گیرند و ادعا می کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت در کنکور سراسری بوده و هرچه دانش آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند از کنکور فاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدال طلا (که بسیار محتمل است) آینده ی خود را تباه کرده است در حالی که با تحقیقی که در سال های گذشته انجام شده است فعالیت در زمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکور نیست بلکه مسیر فعالیت برای کسب رتبه مناسب در کنکور را بسیار هموارتر می سازد به عنوان مثال می توانید تمام مدال آوران نقره و برنز و یا حتی آن هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ولی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را در یک رشته شناسایی کرده و موفقیت های تحصیلی آن ها را در دانشگاه ها جویا شوید که نگارنده ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

به هرحال ادعا این است که فعالیت دانش آموز در یک رشته از رشته های المپیاد فواید بسیاری دارد که به تعدادی از آن ها به صورت گذرا اشاره می شود:

۱. همان طور که خداوند به بشر تن سالم داده و انتظار می رود با ورزش ها و نرمش های مناسب از این نعمت خدادادی محافظت شود به هر دانش آموزی نیز استعدادی داده است که باید شکوفا و بهره ور شود. اغلب باشگاه های کشور اعم از خصوصی و دولتی داوطلب زیادی در رشته های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت در یکی از رشته های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدن سازی و ... می باشند که وقتی از آن افراد راجع به اهدافشان از این فعالیت سوٌال می شود سالم نگه داشتن بدن را عنوان داشته و انتخاب شدن در تیم ملی را در نهایت عنوان می کنند. چه بسا افرادی که در این رشته ها فعالیت می کنند و هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی‌کنند که وقتی ازاین افراد راجع به موفقیت هایشان سوأل می شود هرگزخود را ناموفق معرفی نمی کنند و همین‌که توانسته اند از بدن سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می‌دانند بنابرین فعالیت دریکی اززمینه های المپیاد چه در نهایت به‌کسب مدال منجر شود و یا نشود همین‌که استعداد خدادادی پرورش می یابد موفقیتی است بس بزرگ.

۲. کتب درسی به اذعان اکثرکارشناس ها و اساتید سال به سال ساده تر شده و برای عموم دانش آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ عنوان اغنا کننده نمی باشند لذا لازم است این سری ازدانش آموزان فعالیت ویژه ای را در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود داشته باشند تا احساس کنند این فعالیت ها برای آن ها اغنا کننده است.

۳. فعالیت های المپیادی‌که درنهایت به حل سوألات پیچیده و عمیق در رشته ی مربوطه می شود باعث می شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش آمده درزندگی به دید یک مسأله ی المپیاد نگاه کرده و درحل آن نسبت به سایر رقبا موفق تر باشند. تحقیقات نشان می دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی ازشاخه های المپیاد را دنبال می‌کنند (نه به نیت‌کسب مدال بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق ترند.

٤. زیربنای اکثر دروس پیش دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می شود بنابرین افرادی‌که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می‌کنند در دوره پیش دانشگاهی با پایه ی بسیار قوی تری با دروس مواجه می شوند و نسبت به رقبای خود راحت تر ازعهده آن ها برمی آیند.

٥. با توجه به مصوبه های موجود، کسب مدال دریکی ازالمپیاد های علمی(حتی مدال برتر) باعث اعطای امتیازهای ویژه ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه های سراسری می شود که جزئیات آن درسایت های معتبرمخصوصاً سایت باشگاه دانش پژوهان جوان موجود است.

٦. همچنین با توجه به مصوبه های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به عضویت نهادهای مختلف ازجمله بنیاد ملی نخبگان درمی آیند که با رجوع به سایت های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق یافته به اعضاء را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مفتخراست از بدو تأسیس به فکر تدوین و تألیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال و با بهره گیری از اساتید مجربی که خود در سنواتی نه چندان دور مدال آور یکی از المپیادهای علمی بوده اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد از کسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین و تألیف شود که در آن هر کتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت المپیاد نام گرفته است و هر کتاب از این پروژه که در اختیار دارید برگی از آن درخت خواهد بود.

بدیهی است انجام چنین پروژه ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می طلبد لذا لازم است از تمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده اند، تشـــکــــر و قدردانی می نمایم و در نهایت نیز از عوامل زحمت کش انتشارات اعم از مشاورین، حروف چین ها، طراحان و کارمندان و کارگران عزیز کمال امتنان را دارم.

با تشکر
رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

يا مَنْ فِی السَّماءِ عَظَمَتُهُ

ای که در آسمان آثار عظمتش هویدا است

دانشمند، طبیعت را به خاطر فایده‌اش مطالعه نمی‌کند؛ آن را برای این مطالعه می‌کند که از آن لذت می‌برد و از آن لذت می‌برد چون که زیباست. اگر طبیعت زیبا نبود، ارزش شناختن نداشت و اگر طبیعت ارزش شناختن نداشت، زندگی هم ارزش زیستن نداشت. [1]

هانری پوانکاره

پیش‌گفتار

هدف این کتاب ترسیم فضای مکانیک سماوی برای داوطلبان شرکت در المپیاد نجوم و علاقه‌مندان به این شاخه از علم نجوم و مکانیک است. نبود یک منبع جامع مکانیک سماوی به زبان فارسی، یکی از مشکلات دانش‌پژوهانی است که به نجوم علاقه‌مند هستند و می‌خواهند مکانیک سماوی را بیش از آن چه که در کتب نجوم مقدماتی نوشته شده است، فراگیرند. البته این مشکل را تا حدی می‌توان به جوان بودن المپیاد نجوم مرتبط ساخت.

مکانیک نیوتونی سنگ بنای علوم تجربی و مهندسی است و اصول آن در قسمت‌های مختلفی از سیستم‌های فیزیکی اعمال می‌شود. مطالب بیان‌شده در این کتاب کاربرد مکانیک را در فضایی فراتر از فضایی که به‌صورت روزمره با آن سروکار داریم نشان می‌دهد. ازاین‌رو پیشنهاد می‌کنیم قبل از مطالعه این کتاب، مطالعه‌ای بر مکانیک پایه داشته باشید. در فصل اول مروری بر مفاهیم پایه مکانیک تحلیلی آورده شده است. البته این مطالب خلاصه ممکن است برای کسانی که شناخت کافی از مفاهیم مکانیک نیوتونی ندارند مشکل‌آفرین باشد. در فصل اول هدف از بیان مفاهیم، آوردن مثال‌هایی است که نشان می‌دهد برخی از مسائل مکانیک سماوی نیاز به ریاضیات یا فیزیک پیشرفته‌ای ندارد.

توجه داشته باشید که حساب دیفرانسیل و انتگرال وسیله پی‌ریزی مکانیک است و بدون استفاده از آن نمی‌توان مکانیک را مطالعه کرد. اصول مکانیک سه قانون اصلی نیوتون است که قانون دوم آن یک معادله دیفرانسیل درجه دو است. شاید این نکته که تأثیرگذارترین افراد در پیشرفت مکانیک و به‌خصوص مکانیک سماوی ریاضی‌دان‌ها بودند گواهی بر این واقعیت باشد. در تکمیل این صحبت به جمله‌ای معروف از لئونهارت اویلر اشاره می‌کنیم: «مکانیک بهشت ریاضیات است». درنتیجه به خواننده پیشنهاد می‌کنیم قبل از مطالعه کتاب با مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال و همچنین با روش‌های مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری

1) The Sceintist does not study nature because it is useful; he studies it because he delights in it, and he delights in it because it is beautiful. If nature were not beautiful, it would not be worth knowing, and if nature were not worth knowing, life would not be worth living. Henri Poincare

که در این کتاب بارها و بارها از آن‌ها استفاده‌شده است، آشنایی پیدا کند.

در فصل دوم کتاب به بررسی نیرو و پتانسیل گرانش پرداخته‌ایم. مهم‌ترین نیرویی که در مکانیک سماوی با آن سروکار داریم گرانش یا نیروی جاذبه است و درک مفاهیم گرانش از اهمیت زیادی برخوردار است چرا که تا انتهای فصل پنج حرکت در میدان گرانش را بررسی می‌کنیم. در این فصل با معرفی مفاهیم نیرو و پتانسیل سعی می‌کنیم فهم صحیحی از میدان نیروی گرانش در خواننده ایجاد کنیم. روش محاسبه نیرو و پتانسیل اجسام با هندسه‌های مختلف را نشان می‌دهیم و به بررسی مثال هایی همچون حرکت ستارگان در قرص کهکشان، پدیده جزر و مد و مطالعه نقاط لاگرانژ می‌پردازیم.

فصل سوم به بررسی مسئله دو جسم اختصاص دارد. بررسی حرکت دو جسم در میدان گرانش نسبت به یکدیگر و محاسبه ویژگی‌های هندسی مدارها مهم‌ترین و مفصل‌ترین بحث در این کتاب و همچنین در المپیاد نجوم است.

در پیوست این فصل به بررسی حالت کلی مسئله سه جسم و ارائه دو حل خاص از این مسئله پرداخته شده است.

در فصل چهارم به بررسی پارامتر زمان در مدارها می‌پردازیم. در این فصل نحوه ارتباط زمان و پارامترهای زاویه‌ای مدارها را می‌یابیم و روش‌های عددی حل معادلات پیچیده تر از معادلاتی که تاکنون با آن ها سروکار داشتیم را معرفی می‌کنیم.

در فصل پنجم نحوه بررسی حرکت دو جسم در فضای سه‌بعدی بیان شده است. پارامترهای یک مدار در فضا را معرفی کرده و روش پیش‌بینی مکان ماهواره‌ها و سیارات را نشان خواهیم داد.

تفاوتی که بین این کتاب و کتاب‌های دانشگاهی در این زمینه وجود دارد این است که آوردن روشی پیچیده برای محاسبه درکتابی دانشگاهی معمولاً مشکلی ایجاد نمی‌کند. اما برای دانش‌پژوهی که تنها ابزار محاسباتش یک ماشین‌حساب علمی است و خود را برای آزمونی آماده می‌کند که سرعت عمل نقش مؤثری در آن دارد استفاده از روش‌های ساده محاسباتی بسیار مهم است. در بیان تمام مباحث این کتاب سعی شده است ساده‌ترین روش محاسباتی به کار گرفته شود. این تفاوت به‌خصوص در فصل پنجم کتاب قابل‌مشاهده است. در این فصل با استفاده از روش‌های برداری و هندسه کروی محاسبات مداری بسیار کوتاه می‌شوند.

فصل ششم کتاب به بررسی کلی‌تر حرکت دو ذره نسبت به هم اختصاص داده شده است. در این فصل نیروی مرکزگرا را معرفی کرده‌ایم و روش‌های به دست آوردن معادله مسیر ذرات را بیان نموده‌ایم. همچنین پایداری مدارها و مدارهای دایروی مختل شده در این فصل بررسی شده است.

تجربه نشان داده است که مفاهیم مکانیک و مکانیک سماوی را می‌توان نسبتاً راحت یاد گرفت اما به‌دست آوردن مهارت کافی برای حل مسائل آن نیاز به تلاش زیادی دارد. به همین دلیل در این کتاب مثال‌های گوناگونی آورده شده است. اغلب مثال‌ها با این هدف ارائه شده‌اند که کاربرد مبحث بیان شده را

نمایش دهند یا روش روبه‌رو شدن با یک مسئله جدید را نشان دهند.

برای دانش‌پژوهانی که می‌خواهند در المپیاد شرکت کنند، مهم‌ترین نکته، یادگیری روش روبه‌رو شدن با مسئله‌ای جدید است. برای حل مسئله به روش حمله کارآمدی نیاز است. در این روش، در حل هر مسئله باید با ترتیبی منطقی مراحل مختلفی از فرضیه تا نتیجه‌گیری را طی کرد. پاکیزه و منظم نوشتن به فرآیند تفکر کمک می‌کند، فرض را نظم می‌دهد و به دیگران اجازه می‌دهد از کار شما سردر بیاورند. مسئله‌هایی که ابتدا پیچیده به نظر می‌رسند، وقتی به شیوه منطقی و منظم با آن‌ها برخورد می شود غالباً ساده و واضح می‌شوند. یکی از نکات کلیدی در حل مسائل ترسیم شکل است. ترسیم درست شکل می‌تواند یک مسئله بسیار سخت را به یک مسئله بدیهی تبدیل کند. بنابراین پیشنهاد می شود قبل از هرکاری دریافت ذهنی خود را از مسئله ترسیم کنید. هدف ما در حل مثال‌ها آموزش روش حمله کارآمد و نشان دادن روند منطقی رسیدن از فرض به خواسته مسئله است.

در پایان هر فصل مسائل بیشتری با هدف تسلط دانش پژوهان بر مطالب عنوان شده در فصل آورده شده‌اند. در اینجاست که باید روش حمله کارآمد را پیاده کرد و از یادگیری مطالب فصل مطمئن شد.

در ابتدای هر فصل یادداشتی تاریخی درباره یکی از چهره‌های تأثیرگذار در مکانیک سماوی آورده شده است. نجوم یکی از کهن‌ترین علومی است که بشر به آن پرداخته است و بیان اندکی از تلاش‌های انسان‌های شگفت‌انگیزی که باعث پیشرفت آن شدند، درکنار بیان یک سری روابط ریاضی، لازم است.

در پایان از تمام کسانی که مرا در نوشتن این کتاب یاری کردند سپاس‌گزاری می‌کنم. از دوست خوبم آرش گل‌محمدی‌نقشه که پیش نویس این کتاب را خواندند متشکرم. از تمام اساتیدم به‌خصوص آقای محسن ایرجی و آقای علیرضا وفا که داشته‌های اندک خود در نجوم و مکانیک سماوی را مدیون آن‌ها هستم تشکر می‌کنم. بالاخره از خانواده‌ام که در تمام مراحل پشتیبانم بودند سپاسگزاری می‌کنم.

فهرست مطالب

۱

مروری بر قوانین نیرو و حرکت

۱-۱ دستگاه‌های مختصات

برای توصیف مکان و حرکت یک جسم در فضا به یک دستگاه مختصات نیاز داریم. ترکیبی از بردارهای مستقل از هم که بتوانیم هر بردار دلخواهی را به صورت جمع این بردارهای مستقل تعریف کنیم را یک دستگاه مختصات می‌نامیم. معمولا دستگاه هایی که این بردارهای مستقل در آنها عمود برهم باشند بسیار ساده تر هستند و به دستگاه‌های مختصات متعامد معروفند. باز هم برای سادگی این بردارها، بدون بعد و با طول یک در نظر گرفته می‌شوند و آنها را بردار یکه می‌نامیم.

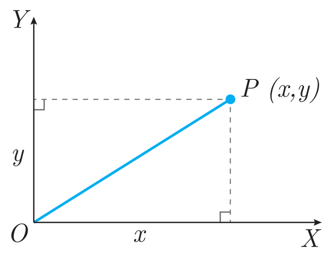
هر بردار دلخواهی در این دستگاه مختصات را به صورت ضرایبی از این بردارهای یکه‌ی مستقل تعریف می‌کنیم و ضرایب مربوطه را مؤلفه‌های بردار فوق در هر یک از راستاهای مستقل دستگاه تعریف می‌کنیم. طول بردارهای یکه همواره ثابت بوده و برابر یک است ولی در برخی از دستگاه‌ها جهت آنها تغییر می‌کند.

هر دستگاه مختصات بر اساس تقارن‌های موجود در مسأله تعریف می‌شود. البته انتخاب دستگاه مختصات کاملا اختیاری و بر عهده‌ی استفاده‌کننده است؛ ولی انتخاب دستگاهی که تقارن‌های مسأله را حفظ کند می‌تواند حل مسأله را بسیار ساده کند؛ مثلا حرکت دایره‌ای در دستگاه مختصات قطبی بسیار ساده‌تر توصیف می‌شود چرا که یکی از مؤلفه‌ها که شعاع حرکت است همواره ثابت است و حل مسأله به تحلیل و بررسی فقط یک بعد تقلیل پیدا می‌کند.

در این بخش برخی از معروف ترین دستگاه‌های مختصات متعامد را معرفی کرده و به چگونگی توصیف حرکت در آن ها می‌پردازیم.

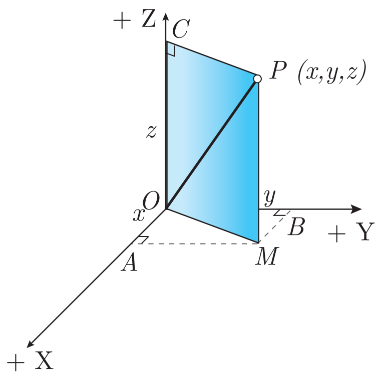
۱. دستگاه مختصات دکارتی

شکل (۱ـ۱) یک دستگاه مختصات دو بعدی را نشان می‌دهد. دستگاه مختصات دکارتی بردارهای یکه عمود برهم و ساکن دارد و معمولا بهترین دستگاه برای تحلیل سیستم‌های ساکن است. این دستگاه از دو محور عمود بر هم که یکدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند تشکیل شده است. مکان هر نقطه در این دستگاه به وسیله مختصات (x, y) توصیف می‌شود که با رسم خطوطی موازی محورهای مختصات از نقطه مورد نظر به محورهای X و Y به دست می‌آیند.



شکل ۱-۱

شکل (۱ـ۲) یک دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی را نشان می‌دهد. محورهای X و Y در یک صفحه و عمود بر هم هستند و محور Z عمود بر این صفحه است. مکان هر نقطه دراین دستگاه به وسیله مختصات (x, y, z) توصیف می‌شود. برای نمایش مختصات نقطه دلخواه P، به موازات محور Z خطی رسم می‌کنیم تا صفحه XY را در نقطه M قطع کند. سپس از نقطه M به موازات محورهای X و Y نیز خطوطی رسم می‌کنیم تا این دو محور را قطع کرده و مؤلفه‌های x و y نقطه P را مشخص کنند. با ترسیم خطی به موازات خط OM و مشخص کردن محل برخورد آن با محور Z مؤلفه z نقطه P به‌دست می‌آید.



شکل ۱-۲

در دستگاه مختصات دکارتی می‌توانیم اندازه OP را به‌دست آوریم:

$$OP^{۲} = OM^{۲} + OC^{۲} = (OA^{۲} + OB^{۲}) + OC^{۲} \qquad (۱\text{-}۱)$$
$$OP^{۲} = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}$$

در این دستگاه مؤلفه‌ها همگی بعد طول دارند.

شکل (۱ـ۲) یک دستگاه مختصات راستگرد را نشان می‌دهد، یعنی اگر دست راست خود را در امتداد محور X قرار دهید و انگشتان خود را به سمت محور Y جمع کنید، انگشت شست جهت محور Z را نشان می‌دهد.

مکان ذره P را می‌توان به وسیله بردار مکان r مشخص کرد. ابتدای این بردار مبدأ مختصات و انتهای آن روی ذره P قرار دارد. می‌توانیم بردار مکان $\mathbf{r}$ را بر حسب بردارهای یکه به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱-۲)$$

مؤلفه‌های بردار مکان ($\mathbf{r}$) می‌توانند هر کدام تابعی از یک کمیت مستقل باشند. در رابطه بالا t یک پارامتر مستقل است که مؤلفه‌های بردار بر حسب آن بیان می‌شوند.

برای مثال ممکن است x, y, z را بر حسب پارامتر زمان گزارش دهیم.

از آنجایی که سرعت و شتاب یک ذره به ترتیب مشتق اول و دوم مکان آن هستند، بنابراین :

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{k}} = v_x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + v_z(t)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱-۳)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{k}} = a_x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + a_y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + a_z(t)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱-۴)$$

معادلات بالا چگونگی حرکت یک ذره در سه بعد را در دستگاه مختصات دکارتی بیان می‌کند.

مثال ۱-۱ بررسی حرکت دایروی

فرض کنید بردار موقعیت یک ذره با رابطه زیر نشان داده شده باشد:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}b\sin\omega t + \mathbf{j}b\cos\omega t$$

که ω مقداری ثابت است. حرکت ذره را تحلیل کنید.

پاسخ: بردار مکان مؤلفه z ندارد، پس حرکت محدود به صفحه $x-y$ و به صورت دوبعدی است.

فاصله ذره از مبدأ در هر زمان دلخواه t عبارتست از:

$$|\mathbf{r}| = r = (b^۲\sin^۲\omega t + b^۲\cos^۲\omega t)^{۱/۲} = b$$

همان‌طورکه مشاهده می‌کنید فاصله ذره از مبدأ ثابت است، پس مسیر حرکت دایره‌ای است به شعاع b که مرکز آن روی مرکز مختصات قرار دارد. اگر از بردار مکان بر حسب زمان مشتق بگیریم، بردار سرعت به‌دست می‌آید.

$$\mathbf{v} = \frac{d\,\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}b\omega\cos\omega t - \mathbf{j}b\omega\sin\omega t$$

اندازه بردار سرعت عبارت است از:

$$v = |\mathbf{v}| = (b^2\omega^2\cos^2\omega t + b^2\omega^2\sin^2\omega t)^{1/2} = b\omega$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، ذره مسیر خود را با سرعت ثابت می‌پیماید.
شتاب برابر است با:

$$\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{v}}{dt} = -\,\mathbf{i}b\omega^2\sin\omega t - \,\mathbf{j}b\omega^2\cos\omega t$$

اگر بردار سرعت و شتاب را در یکدیگر ضرب داخلی کنیم، حاصل صفر می‌شود، یعنی این دو بردار بر یکدیگر عمودند.

$$\mathbf{v}.\,\mathbf{a} = (b\omega\cos\omega t)(-b\omega^2\sin\omega t) + (-b\omega\sin\omega t)(-b\omega^2\cos\omega t) = 0$$

با مقایسه دو بردار شتاب و مکان به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\mathbf{a} = -\omega^2\,\mathbf{r}$$

علامت منفی نشان‌دهنده این موضوع است که a و r جهت‌های معکوس دارند، یعنی a همیشه به سمت مرکز دایره است و v بر دایره مماس است.

یکی از مزایای دستگاه‌های متعامد این است که تغییرات بردارهایی که طول یکسان دارند همواره عمود بر خود بردار است؛ مثلاً در مثال قبل دیدیم که آهنگ تغییرات بردار مکان (سرعت) که اندازه آن ثابت بود، بر بردار مکان عمود بود. این مطلب را می‌توانیم به این صورت نیز نشان دهیم که ضرب داخلی بردار مکان در خودش برابر است با

$$\vec{r}.\vec{r} = (r_x\,\hat{\mathbf{i}} + r_y\,\hat{\mathbf{j}} + r_z\,\hat{\mathbf{k}}).(r_x\,\hat{\mathbf{i}} + r_y\,\hat{\mathbf{j}} + r_z\,\hat{\mathbf{k}}) = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = r^2$$

که مقداری ثابت است و در نتیجه مشتق آن برابر صفر است.

$$\frac{d}{dt}(r^2) = 0$$

از طرفی می‌توانیم مشتق کمیت بالا را به‌صورت زیر حساب کنیم

$$\frac{d}{dt}(r^2) = \frac{d}{dt}(\,\vec{\mathbf{r}}.\,\vec{\mathbf{r}}) = 2\vec{r}.\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

از آنجا که ضرب داخلی دو بردار فقط هنگامی برابر صفر است که دو بردار بر هم عمود باشند، بنابراین

$$\vec{r} \perp \frac{d\vec{r}}{dt}$$

۲. دستگاه مختصات قطبی

انتخاب دستگاه مختصات مناسب در حل مسأله بسیار مهم است. برای توصیف حرکت جسمی بر روی مسیرهای دایره‌ای یا شبه دایره ای کار با دستگاه مختصات دکارتی مشکل است.

به شکل (۱ـ۳) توجه کنید. مختصات دکارتی نقطه P عبارتست از x, y. نقطه P در فاصله r از مبدأ قرار دارد و خط OP با محور X زاویه θ می‌سازد. مکان نقطه P را می‌توان به صورت (r, θ) نمایش داد که مختصات قطبی نامیده می‌شود؛ که در آن r طول بردار و θ زاویه آن از محور x است.

رابطه بین (x, y) و (r, θ) عبارتست از:

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$

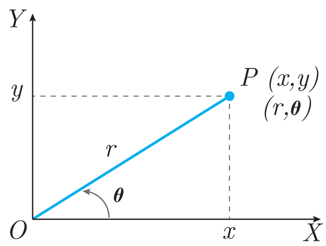
همچنین برای تبدیل مختصات (r, θ) به (x, y) می‌توان مانند زیر نوشت:

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$

یا برعکس

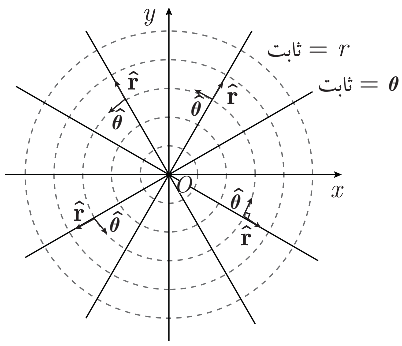
$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} \qquad , \qquad \theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x}$$

مقادیر r و θ می‌توانند هر مقداری بین صفر تا بی نهایت را اختیار کنند. ولی مقدار θ را می‌توان همواره به صورت مضرب صحیحی از ۲π به علاوه مقداری بین صفر و ۲π نوشت. در بسیاری از موارد که خود زاویه اهمیتی نداشته و ما از تصویر بردار r در جهات مختلف استفاده می‌کنیم، از جمله مضرب صحیحی از ۲π صرف‌نظر می‌کنیم.



شکل ۱-۳

در شکل (۱ـ۴) نمودارهای r ثابت که دایره هایی با شعاع r و مرکز دستگاه مختصات هستند و همچنین نمودارهای θ ثابت که خطوط مستقیمی هستند که از مرکز مختصات می‌گذرند، نمایش داده شده است.



شکل ۱-۴

اکنون دو بردار یکه $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ را در مختصات قطبی تعریف می‌کنیم که بر یکدیگر عمودند و در جهت افزایش r و θ هستند. بنابر این $\hat{r}$ از نقطه P به طرف افزایش فاصله شعاعی و $\hat{\theta}$ در جهتی است که اگر θ افزایش یابد P به آن سمت حرکت می‌کند. با توجه به شکل (۱ـ۵) و (۱ـ۶) می‌توان نوشت:

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}\cos\theta + \hat{\mathbf{j}}\sin\theta \tag{۱-۵}$$

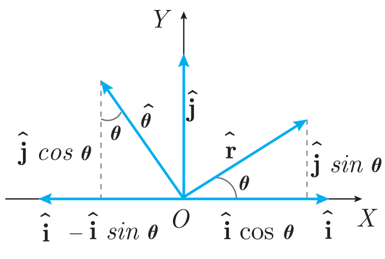
$$\hat{\theta} = -\hat{\mathbf{i}}\sin\theta + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta \tag{۱-۶}$$

با مشتق‌گیری از معادلات بالا بر حسب θ داریم:

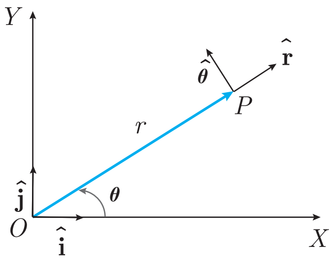
$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{i}}\sin\theta + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta = \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{i}}\cos\theta - \hat{\mathbf{j}}\sin\theta = -\hat{\mathbf{r}}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \hat{\theta} \quad , \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{r}} \tag{۱-۷}$$



شکل ۱-۶



شکل ۱-۵

بردار مکان r در مختصات قطبی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{r} = r\hat{r} \tag{۱-۸}$$

بدین ترتیب سرعت عبارتست از

$$\mathbf{v} = \frac{d\,\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{\mathbf{r}}) = \frac{dr}{dt}\,\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{dt}$$

با استفاده از معادله (۱ـ۷) می‌توان نوشت:

$$\frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \hat{\theta}\dot{\theta}$$

و در نتیجه

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{۱-۹}$$

سرعت در امتداد $\hat{r}$ را سرعت شعاعی نامیده و با v_r نمایش می‌دهیم و همچنین سرعت در امتداد $\hat{\theta}$ را سرعت مماسی نامیده و با v_θ نمایش می‌دهیم:

$$v_r = \dot{r} \quad , \quad v_\theta = r\dot{\theta} \tag{۱-۱۰}$$

شتاب ذره برابر است با

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d\,\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{d\dot{r}}{dt}\,\hat{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}}\frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} \\
&= \ddot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}(-\,\hat{\mathbf{r}})\dot{\theta} \\
\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲})\,\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned} \tag{۱-۱۱}$$

دو مؤلفه شتاب عبارتند از شتاب شعاعی و شتاب مماسی که عبارتند از

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲} \tag{۱-۱۲}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta} \tag{۱-۱۳}$$

مثال ۱-۲ حرکت دایره‌ای تحت تأثیر نیروی گرانش

ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی گرانش جرم مرکزی M در حال حرکت در مسیری به شعاع r است. سرعت و دوره تناوب این ذره چقدر است؟

پاسخ: نیروی گرانش فقط در راستای شعاعی به ذره وارد می‌شود و در راستای مماسی نیرویی ندارد. هم‌چنین توجه داشته باشید که اگر r ثابت باشد، آنگاه $\dot{r} = \ddot{r} = ۰$ (طبق معادله (۱ـ۱۲)). در نتیجه شتاب شعاعی برابر با

$$a_r = -r\dot{\theta}^۲ = -r(\frac{v_\theta}{r})^۲ = -\frac{v_\theta^۲}{r}$$

چون سرعت به مسیر مماس است (طبق مثال ۱ـ۱)، پس در راستای شعاعی مؤلفه‌ای ندارد در نتیجه $v = v_\theta$. حال با نوشتن معادله نیرو سرعت را به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{GM}{r^۲} = -\frac{v^۲}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

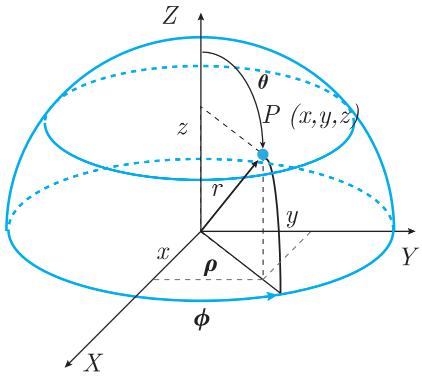
برای محاسبه دوره تناوب، با توجه به این‌که سرعت ذره ثابت است، پس طول مسیر برابر با حاصل‌ضرب دوره تناوب در سرعت ذره است

$$T = \frac{۲\pi r}{v} = \sqrt{\frac{۴\pi^۲ r^۳}{GM}}$$

که این همان قانون سوم کپلر برای مسیرهای دایره‌ای است.

۳. دستگاه مختصات کروی

نقطه P را طبق شکل (۱ـ۷) در فاصله r از مبدأ مختصات در نظر بگیرید. مختصات دکارتی این نقطه (x, y, z) و مختصات کروی آن (r, θ, φ) است.



شکل ۱-۷

همان‌طورکه در شکل ملاحظه می‌کنید θ زاویه ای است که بردار مکان ذره با محور Z می‌سازد و از صفر تا π تغییر می‌کند. زاویه φ زاویه‌ای است که تصویر بردار r در صفحه $X - Y$ یعنی بردار ρ با محور X می‌سازد. این زاویه از صفر تا ۲π تغییر می‌کند و به صورت پادساعتگرد افزایش می‌یابد.

برای پیدا کردن رابطه بین دستگاه مختصات دکارتی و کروی، ابتدا بردار ρ را که تصویر بردار مکان در صفحه $X-Y$ است می‌یابیم و سپس مؤلفه x و y را بر حسب این بردار می‌نویسیم.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho} &= r\sin\theta \\
x &= \rho\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi \\
y &= \rho\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned} \tag{۱-۱۴}$$

رابطه‌های تبدیل دستگاه مختصات دکارتی به قطبی نیز از روی شکل و یا روابط بالا قابل استخراج است.

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} \\
\tan\theta &= \frac{\rho}{z} = \frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{z} \\
\tan\varphi &= \frac{y}{x}
\end{aligned} \tag{۱-۱۵}$$

برای محاسبه روابط مربوط به سرعت و شتاب در مختصات کروی مانند مختصات قطبی ابتدا بردارهای یکه دستگاه مختصات کروی را بر حسب بردارهای یکه دستگاه مختصات دکارتی می‌نویسیم و سپس مشتق‌های آن ها را محاسبه می‌کنیم و در روابط اصلی قرار می‌دهیم. (به تمرین ۳ مراجعه کنید.)

مثال ۱-۳ فاصله نقاط روی کره زمین

مختصات جغرافیایی شهر بندرعباس $(۲۷^\circ \mathrm{N}, ۵۶^\circ \mathrm{E})$ و مختصات جغرافیایی شهر جاکارتا $(۶^\circ \mathrm{S}, ۱۰۷^\circ \mathrm{E})$ است. در صورتیکه که یک کشتی بتواند از بندرعباس به سمت جاکارتا یک مسیر مستقیم را طی کند، باید چه مسافتی را بپیماید؟ شعاع زمین را $۶۴۰۰\ \mathrm{km}$ در نظر بگیرید.

پاسخ: ابتدا باید طول و عرض‌های جغرافیایی فوق را به زوایای θ و φ تبدیل کنیم. چون مبدأ عرض جغرافیایی استوا است پس θ بندرعباس و θ جاکارتا عبارتند از:

$$\begin{aligned}
\theta_b &= ۹۰^\circ - ۲۷^\circ = ۶۳^\circ \\
\theta_j &= ۹۰^\circ + ۶^\circ = ۹۶^\circ
\end{aligned}$$

و طول‌های جغرافیایی احتیاج به تبدیل ندارند.

بردارهای مکان این دو شهر عبارتند از:

$$\vec{r}_b = R\cos\theta_b\cos\varphi_b\,\hat{\mathbf{i}} + R\cos\theta_b\sin\varphi_b\,\hat{\mathbf{j}} + R\sin\theta_b\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{r}_j = R\cos\theta_j\cos\varphi_j\,\hat{\mathbf{i}} + R\cos\theta_j\sin\varphi_j\,\hat{\mathbf{j}} + R\sin\theta_j\,\hat{\mathbf{k}}$$

برای به‌دست آوردن زاویه بین این دو شهر از مرکز زمین می‌توانیم بردارهایشان را در هم ضرب داخلی کنیم.

$$\begin{aligned}\vec{r}_b.\vec{r}_j &= |\vec{r}_b||\vec{r}_j|\cos(\vec{r}_b,\vec{r}_j)\\ &= R^{۲}(\cos\theta_b\cos\varphi_b\cos\theta_j\cos\varphi_j + \cos\theta_b\sin\varphi_b\cos\theta_j\sin\varphi_j\\ &\quad + \sin\theta_b\sin\theta_j) = R^{۲}(\cos\theta_b\cos\theta_j\cos(\varphi_b-\varphi_j) + \sin\theta_b\sin\theta_j)\\ (\vec{r}_b,\vec{r}_j) &= \gamma = \cos^{-۱}(\cos\theta_b\cos\theta_j\cos(\varphi_b-\varphi_j) + \sin\theta_b\sin\theta_j)\\ &= ۳۱/۱^\circ = ۰/۵۴\,\text{rad}\\ s &= R\gamma = ۶۴۰۰\times ۰/۵۴ = ۳۴۷۴\,\text{km}\end{aligned}$$

۱-۲ کار، انرژی پتانسیل، قانون پایستگی انرژی

در بسیاری از موارد نیروی وارد به ذره تابعی از مکان ذره یا فاصله بین ذرات است.
مانند نیروی گرانش، نیروی کولنی، نیروی فنر، نیروهای بین مولکولی و بسیاری دیگر از برهم‌کنش‌های موجود در طبیعت.

دینامیک دانشی است که می‌تواند بر اساس داشتن نیروهای وارد بر ذرات و شرایط اولیه آن وضعیت آینده ذرات را محاسبه کند. قانون دوم نیوتون شتاب را به ما می‌دهد و با انتگرال‌گیری از آن می‌توان سرعت و سپس مکان را به‌دست آورد. اما این امر وقتی ساده‌تر می‌شود که نیرو تابعی از زمان باشد. در اینجا صرفاً با حل یک معادله دیفرانسیل روبه‌رو هستیم که البته گاهی ممکن است بسیار پیچیده شود. از این رو به معرفی کمیت هایی می‌پردازیم تا حل مسأله را ساده‌تر کنند.

برای سادگی حرکت را یک بعدی و در راستای x در نظر می‌گیریم. برای حرکت در سه بعد کافی است معادلات حرکت را در هر یک از بعد ها به صورت جداگانه بنویسیم و یا در مواردی که نیرو فقط به صورت شعاعی است (مانند نیروی گرانش) کافی است از مختصات قطبی استفاده کرده و معادلات را فقط در راستای شعاعی بنویسیم.

سرعت برابر است با مشتق مکان بر حسب زمان

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (۱-۱۶)$$

هم‌چنین شتاب عبارتست از مشتق سرعت بر حسب زمان و یا مشتق دوم مکان بر حسب زمان .

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (۱-۱۷)$$

با تقسیم دو معادله بالا بر هم و حذف dt معادله مستقل از زمان به‌دست می‌آید:

$$vdv = adx \qquad (۱-۱۸)$$

معادله دیفرانسیلی که حرکت مستقیم‌الخط یک جسم تحت اثر نیروی وابسته مکان را توصیف می‌کند عبارتست از

$$F(x) = ma = m\frac{d^۲x}{dt^۲} \qquad (۱-۱۹)$$

با جایگذاری a از معادله (۱ـ۱۸) داریم:

$$F(x) = mv\frac{dv}{dx} \qquad (۱-۲۰)$$

سمت راست معادله بالا را می‌توانیم به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$F(x) = \frac{d}{dx}(\frac{۱}{۲}mv^۲) \qquad (۱-۲۱)$$

اگر عبارت داخل پرانتز را انرژی جنبشی بنامیم و آن را با K نمایش دهیم، داریم

$$F(x) = \frac{dK}{dx} \;\Rightarrow\; K(x_b) - K(x_a) = \int_{x_a}^{x_b} F(x)dx \qquad (۱-۲۲)$$

انتگرال سمت راست معادله بالا طبق تعریف کار انجام شده توسط نیروی F بر روی ذره است، وقتی که ذره از x_a تا x_b حرکت کند که آن را با W نشان می‌دهیم.

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F(x)dx = K_b - K_a = \frac{۱}{۲}mv_b^۲ - \frac{۱}{۲}mv_a^۲ \qquad (۱-۲۳)$$

رابطه بالا را قضیه کار ـ انرژی می‌نامند. توجه داشته باشید که مسیر حرکت ذره از x_a تا x_b در مقدار W تأثیری ندارد و این کمیت فقط به فاصله نقاط اولیه و انتهایی مسیر وابسته است.

انرژی پتانسیل را به عنوان کاری که توسط نیروی پایستار در جابه جایی ذره از نقطه x_b تا یک نقطه مرجع مانند x_c تعریف می‌کنیم.

$$U(x_b) - U(x_c) = \int_{x_b}^{x_c} F(x)dx = -\int_{x_c}^{x_b} F(x)dx \qquad (۱-۲۴)$$

مقدار انرژی پتانسیل در نقطه مرجع C کاملا دلخواه است. برای مثال در معادله بالا $U(x_c)$ را می‌توانیم هر عدد دلخواهی بگیریم. ولی برای سادگی می‌توانیم این نقطه را جایی بگیریم که مقدار $U(x_c)$ صفر باشد.

در حد $\Delta x \to ۰$ می‌توانیم معادله (۱ـ۲۴) را به شکل زیر بنویسیم

$$dU = -F(x)dx \;\Rightarrow\; F(x) = -\frac{dU}{dx} \tag{۱-۲۵}$$

باید به این نکته توجه کرد که تعریف تابعی به عنوان تابع انرژی پتانسیل مانند آنچه در معادله (۱ـ۲۵) وجود دارد، فقط برای نیروهای پایستار امکان پذیر است. طبق تعریف نیروی پایستار نیرویی است که کار انجام شده توسط آن از نقطه A به نقطه B مستقل ازمسیر حرکت ذره باشد. البته نیرو هایی که تابعی از مسیر هستند و فقط به یک بعد محدود می‌شوند (مانند نیروی فنر که فقط در راستای x است) همگی پایستارند.

با توجه به معادله (۱ـ۲۴) کار انجام شده در رفتن از x_a تا x_b برابر است با

$$\begin{aligned} W = \int_{x_a}^{x_b} F(x)dx &= \int_{x_a}^{x_c} F(x)dx - \int_{x_b}^{x_c} F(x)dx \\ &= \Big(U(x_a) - U(x_c)\Big) - \Big(U(x_b) - U(x_c)\Big) \\ &= -U(x_b) + U(x_a) \end{aligned} \tag{۱-۲۶}$$

با مساوی قرار دادن معادله (۱ـ۲۶) و (۱ـ۲۳) به قانون پایستگی انرژی دست می‌یابیم

$$K_a + U(x_a) = K_b + U(x_b) = E = \text{ثابت} \tag{۱-۲۷}$$

این معادله بیان می‌کند که اگر ذره‌ای تحت اثر یک نیروی پایستار حرکت کند، مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل آن که طبق تعریف آن را انرژی مکانیکی می‌نامیم، ثابت می‌ماند.

با قرار دادن $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$ در معادله (۱ـ۲۷) می‌توانیم سرعت لحظه ای ذره را بر حسب انرژی مکانیکی و انرژی پتانسیل آن به‌دست آوریم

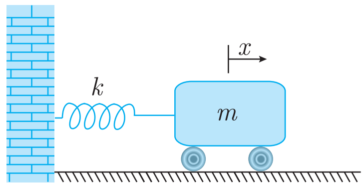
$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{۲}{m}[E - U(x)]} \tag{۱-۲۸}$$

حال با انتگرال‌گیری از معادله اخیر می‌توانیم زمان را به صورت تابعی از مکان به‌دست آوریم

$$t - t_۰ = \int \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{۲}{m}[E - U(x)]}} \tag{۱-۲۹}$$

با توجه به معادله بالا حرکت فقط به بازه ای از x محدود است که در آن $E - U(x)$ مثبت باشد. در فصل ۶ از این موضوع استفاده زیادی خواهد شد.

مثال ۱-٤ معادله حرکت هماهنگ ساده



وزنه‌ای به جرم m در حالت افقی به یک سر فنری متصل شده و سر دیگر فنر ثابت است. این وزنه روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد. معادله مکان وزنه را به‌دست آورید.

پاسخ: نیروی وارد به ذره یک نیروی بازگرداننده خطی و تابعی از مکان است

$$F(x) = -kx \tag{۱-۳۰}$$

ابتدا انرژی پتانسیل ذره را به‌دست می‌آوریم، نقطه مرجع را در مبدأ یعنی $x = 0$ فرض می‌کنیم و مقدار انرژی پتانسیل در این نقطه را صفر میگیریم

$$U(x) - 0 = -\int_0^x F(x)dx = -\int_0^x (-kx)dx$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

در اینجا می‌توانیم از ثابت بودن انرژی مکانیکی ذره به روش زیر مطمئن شویم، از معادله (۱ـ۲۰) داریم

$$mvdv = -kxdx$$

که با انتگرال‌گیری از دو طرف داریم

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + \text{ثابت}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \text{انرژی مکانیکی}$$

حال با استفاده از معادله (۱ـ۲۹) تابعیت مکان بر حسب زمان را به‌دست می‌آوریم

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(2/m)(E - \frac{1}{2}kx^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m}(1 - \frac{k}{2E}x^2)}} \tag{۱-۳۱}$$

برای حل انتگرال بالا از جایگذاری زیر استفاده می‌کنیم

$$\sqrt{\frac{k}{2E}}x = \sin\theta \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{k}{2E}}dx = \cos\theta d\theta \tag{۱-۳۲}$$

در نتیجه معادله (۱ـ۳۱) به شکل زیر درمی‌آید

$$t = \int_{\theta_\circ}^{\theta} \frac{\sqrt{\frac{۲E}{k}}\cos\theta d\theta}{\sqrt{\frac{۲E}{m}(۱-\sin^۲\theta)}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\int_{\theta_\circ}^{\theta} d\theta = \sqrt{\frac{m}{k}}(\theta-\theta_\circ)$$

از معادله بالا نتیجه می‌گیریم

$$\theta = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_\circ$$

حال عبارت بالا را در (۱ـ۳۲) قرار می‌دهیم

$$\sqrt{\frac{k}{۲E}}x = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_\circ\right)$$

می‌توانیم معادله بالا را به شکل ساده تر زیر خلاصه کنیم

$$x = A\sin(\omega t + \theta_\circ) \qquad (۱\text{-}۳۳)$$

که در آن $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ است.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، عبارت بالا به شکل سینوسی است و نشان می‌دهد که ذره حول نقطه تعادل در نوسان است. بیشترین انحراف ذره از نقطه تعادل را دامنه نوسان می‌نامند و با A نشان می‌دهند. هم‌چنین دوره تناوب نوسان ها با توجه به این‌که دوره تناوب تابع سینوس برابر ۲π است به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\omega t + \theta_\circ = \omega(t+T) + \theta_\circ = \omega t + \theta_\circ + ۲\pi \qquad (۱\text{-}۳۴)$$

$$\Rightarrow\ T = \frac{۲\pi}{\omega}$$

از این رو ω را سرعت زاویه‌ای می‌نامند.

برای به‌دست آوردن مقادیر $\theta_\circ$ و A در معادله (۱ـ۳۳) باید شرایط اولیه مسأله را جایگذاری کنیم. برای مثال اگر بدانیم در $t=\circ$ جسم در $x=\circ$ قرار داشته است و در این لحظه با سرعت $v_\circ$ رها شده است، آنگاه

$$x = A\sin(\omega t+\theta_\circ) \xrightarrow{t=\circ} \circ = A\sin(\circ+\theta_\circ)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t+\theta_\circ) \xrightarrow{t=\circ} v_\circ = A\omega\cos(\circ+\theta_\circ)$$

در نتیجه

$$\tan\theta_\circ = \circ \ \Rightarrow\ \theta_\circ = \circ$$

$$A = \frac{v_\circ}{\omega}$$

مثال ۱-۵ سقوط آزاد در میدان نیروی گرانش

دنباله داری به جرم m در فاصله d از خورشید قرار دارد. اگر دنباله دار در یک لحظه به حالت سکون برسد و پس از آن به سمت خورشید سقوط کند، چه مدت طول می‌کشد تا به مرکز خورشید برسد؟

پاسخ: نیروی وارد بر جرم m نیروی گرانش است که فقط به فاصله از مرکز نیرو بستگی دارد. چون ذره بدون سرعت اولیه رها شده، پس مسیر آن یک خط مستقیم در امتداد مرکز نیرو است.

چون نیروی گرانش یک نیروی پایستار است، می‌توانیم برای آن تابع انرژی پتانسیل به‌دست بیاوریم (در فصل بعد به صورت مفصل درباره انرژی پتانسیل گرانشی بحث خواهیم کرد)، نقطه مرجع را در بی‌نهایت فرض می‌کنیم و مقدار انرژی پتانسیل در این نقطه را صفر می‌گیریم

$$U(x) - \circ = -\int_{\infty}^{x} F(x)dx = -\int_{\infty}^{x}\left(-\frac{GMm}{r^{۲}}\right)dx$$

$$U(x) = -\frac{GMx}{r} \qquad (۱\text{-}۳۵)$$

قانون پایستگی انرژی را برای جرم m در لحظه رها شدن در فاصله d و بار دیگر در فاصله دلخواه x از مرکز نیرو می‌توان نوشت

$$-\frac{GMm}{d} = \frac{۱}{۲}mv^{۲} - \frac{GMm}{x}$$

در نتیجه سرعت ذره در فاصله x از مرکز نیرو برابر است با

$$v = \pm\sqrt{۲GM(\frac{۱}{x} - \frac{۱}{d})} = \pm\sqrt{\frac{۲GM}{d}}.\sqrt{\frac{d-x}{x}} \qquad (۱\text{-}۳۶)$$

توجه داشته باشید که ذره در اثر سقوط آزاد، در حال نزدیک شدن به مرکز نیرو است پس تغییرات شعاع نسبت به زمان منفی است و علامت سرعت باید منفی باشد. با جایگذاری صورت دیفرانسیلی سرعت داریم

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{۲GM}{d}}.\sqrt{\frac{d-x}{x}}$$

با مرتب کردن معادله بالا به نحوی که سمت راست فقط متغیر مکان و سمت چپ فقط متغیر زمان وجود داشته باشد، داریم

$$\sqrt{\frac{۲MG}{d}}dt = -\sqrt{\frac{x}{d-x}}dx$$

حال از طرفین معادله بالا انتگرال می‌گیریم، برای قرار دادن حدود انتگرال توجه داشته باشید که در $t=0$ ذره در فاصله d و در $t=T$ که مجهول مسأله است، ذره در فاصله صفر از مبدأ قرار دارد.

$$\sqrt{\frac{2GM}{d}}\int_0^T dt = -\int_d^0 \sqrt{\frac{x}{d-x}}dx = \int_0^d \sqrt{\frac{x}{d-x}}dx \qquad (۱\text{-}۳۷)$$

برای حل انتگرال سمت راست از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم

$$x = d\sin^2\theta \;\Rightarrow\; dx = 2d\sin\theta\cos\theta d\theta$$

برای تغییر حدود انتگرال کافی است از رابطه بالا θ متناظر با $x=0$ و $x=d$ را به‌دست آوریم و در انتگرال قرار دهیم. برای $x=0$، $\theta=0$ و برای $x=d$ ، $\theta=\pi/2$ است. در نتیجه معادله (۱ـ۳۷) به شکل زیر در می‌آید

$$\sqrt{\frac{2GM}{d}}T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{d\sin^2\theta}{d-d\sin^2\theta}} \times 2d\sin\theta\cos\theta d\theta$$
$$\sqrt{\frac{GM}{2d^3}}T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}}.\sin\theta\cos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \qquad (۱\text{-}۳۸)$$

درنهایت انتگرال سمت راست را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی دو برابر زاویه حل می‌کنیم

$$\int \sin^2\theta d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\sin\pi}{4}\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

زمان سقوط آزاد را به‌دست می‌آوریم

$$\sqrt{\frac{GM}{2d^3}}T = \frac{\pi}{4}$$
$$T = \pi\sqrt{\frac{d^3}{8GM}}$$

که این مقدار در حالتی که دنباله دار از فاصله ۱ واحد نجومی (شعاع مدار زمین) رها شود تقریبا برابر است با ۶۴٫۶ روز.

مثال ۱-۶ حرکت ماهواره در جو زمین در حضور مقاومت هوا

ماهواره‌ای به جرم m در مداری دایروی در جو زمین حرکت می‌کند، به دلیل سرعتی که ماهواره دارد، نیروی ضعیف و ثابتی به ماهواره وارد می‌شود و باعث کاهش سرعت ماهواره می‌شود. ماهواره به آهستگی به صورت مارپیچ به طرف زمین حرکت می‌کند. از آنجا که نیروی اصطکاک ضعیف است، تغییر شعاع به آهستگی صورت می‌گیرد. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که در هر لحظه ماهواره عملا در مداری دایروی به شعاع متوسط r قرار دارد. مقدار نیروی اصطکاک را برابر با f فرض کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

(الف) انرژی مکانیکی کل ماهواره را به صورت تابعی از شعاع مدار ماهواره محاسبه کنید.

(ب) تغییر تقریبی شعاع را در هر دوره گردش ماهواره پیدا کنید.

(ج) تغییر تقریبی انرژی جنبشی ماهواره را در هر دوره پیدا کنید.

پاسخ:

محاسبه انرژی مکانیکی:

طبق تعریف انرژی مکانیکی برابر است با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل. تابع انرژی پتانسیل برای نیروی گرانش را در معادله (۱ـ۳۵) به‌دست آوردیم. حال باید تابع انرژی جنبشی را محاسبه کنیم. برای این کار از نتیجه مثال (۱ـ۲) استفاده می‌کنیم. در آن مثال سرعت یک جسم که در مداری دایروی به شعاع r در حال گردش به دور جرم مرکزی M است را به صورت زیر به‌دست آوردیم

$$v^۲ = \frac{GM}{r}$$

در نتیجه انرژی جنبشی ماهواره برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{GMm}{۲r}$$

برای محاسبه انرژی مکانیکی باید انرژی جنبشی و پتانسیل را با هم جمع کنیم

$$E = K + U = \frac{GMm}{۲r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{۲r}$$

طبق رابطه (۱ـ۲۲) و (۱ـ۲۳) کار انجام شده روی جرم m در جابه جایی بین دو نقطه با تغییر انرژی جنبشی آن در حین این حرکت برابر است. همچنین کار انجام شده روی ماهواره را در حین حرکتش به دو قسمت کار نیروی پایستار و کار نیروی ناپایستار تقسیم می‌کنیم.

$$W = \Delta K \;\Rightarrow\; W_{\text{پایستار}} + W_{\text{ناپایستار}} = \Delta K$$

کار نیروی پایستار کاری است که توسط نیروی گرانش در اثر کم شدن شعاع مدار ماهواره روی آن انجام می‌شود و طبق معادله (۱ـ۲۴) برابر با تغییرات انرژی پتانسیل ماهواره است.

$$W_{\text{پایستار}} = \Delta U$$

اما کار نیروی ناپایستار، کاری است که توسط نیروی اصطکاک روی ماهواره انجام می‌شود و برابر است با

$$W_{\text{ناپایستار}} = W_f = \Delta K + \Delta U = \Delta E = E_۲ - E_۱$$

پس اگر بتوانیم کار نیروی اصطکاک را به کمک انتگرال‌گیری به‌دست آوریم می‌توانیم آن را با تغییرات انرژی مکانیکی برابر قرار دهیم و به این ترتیب تغییرات شعاع مدار را به‌دست آوریم.

کار نیروی اصطکاک در یک دوره تناوب برابر است با

$$W_f = \int \vec{F}.d\vec{s} = \int -f\,ds = -f(۲\pi r)$$

توجه داشته باشید که نیروی اصطکاک در جهت خلاف سرعت به ماهواره وارد می‌شود و چون سرعت به مسیر مماس است، در نتیجه نیروی اصطکاک نیز مماس بر مسیر و در جهت خلاف حرکت است. علامت منفی در انتگرال بالا بیانگر خلاف جهت بودن نیرو و جهت حرکت است. اما ds بیانگر مسیر طی شده است و چون ما کار نیروی ناپایستار را در یک دوره تناوب ماهواره به‌دست آوردیم به همین دلیل مسیر طی شده برابر با محیط مدار دایره ای به شعاع r است.

تغییر شعاع در هر دور گردش:

حال کافی است مقدار کار نیروی ناپایستار را برابر با تغییرات انرژی مکانیکی قرار دهیم

$$\begin{aligned} W_f = E_۲ - E_۱ \;\Rightarrow\; -۲\pi r f &= \frac{-GMm}{۲r_۲} - \frac{-GMm}{۲r_۱} \\ &= -\frac{GMm}{۲}\left(\frac{r_۱ - r_۲}{r_۲ r_۱}\right) = \frac{GMm\Delta r}{۲r_۲ r_۱} \\ \Delta r &= -\frac{۴\pi r r_۱ r_۲ f}{GMm} \end{aligned}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید علامت Δr منفی است و نشان دهنده کاهش فاصله ماهواره به مرور زمان است.

اگر r را فاصله میانگین ماهواره در یک دوره تناوب فرض کنیم، شعاع اولیه و ثانویه ماهواره را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$r_۱ = \bar{r} - \frac{\Delta r}{۲} \qquad , \qquad r_۲ = \bar{r} + \frac{\Delta r}{۲}$$

حال اگر تغییرات شعاع را آنقدر کوچک فرض کنیم که بتوان از توان دوم آن صرف‌نظر کرد داریم

$$r r_1 r_2 = r^3 - \frac{r}{4}\Delta r^2 \cong r^3$$

و در نهایت

$$\Delta r = -\frac{4\pi r^3 f}{GMm}$$

تغییر انرژی جنبشی ماهواره:

برای محاسبه تغییرات انرژی جنبشی می‌توانیم از رابطه ای که در بالا به‌دست آوردیم استفاده کنیم

$$\Delta K = W_f - \Delta U = -2\pi r f - \left(\frac{-GMm}{r_2} - \frac{-GMm}{r_1}\right)$$

$$\Delta K = 2\pi r f - GMm\frac{\Delta r}{r_2 r_1}$$

با قرار دادن Δr در رابطه بالا داریم

$$\Delta K = -2\pi r f - \frac{GMm}{r_2 r_1}\left(-\frac{4\pi r r_1 r_2 f}{GMm}\right) = 2\pi r f$$

جالب است که تغییرات انرژی جنبشی ماهواره مثبت است، یعنی ماهواره همچنان که در جو سقوط می‌کند دچار افزایش سرعت می‌شود. یعنی انرژی گرانشی آزاد شده ناشی از نیروی پایستارگرانش بیش از انرژی اتلافی توسط اصطکاک است.

۱-۳ گشتاور، تکانه زاویه‌ای، چرخش

گشتار و تکانه زاویه‌ای

ذره‌ای به جرم m را در صفحه $x - y$ تصور کنید. فرض کنید یک تک نیروی F در این صفحه به این ذره وارد شود و مکان این ذره نسبت به مبدأ مختصات برابر r باشد (شکل (۱ـ۸)). گشتاور τ وارد به ذره نسبت به مبدأ مختصات، کمیتی برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

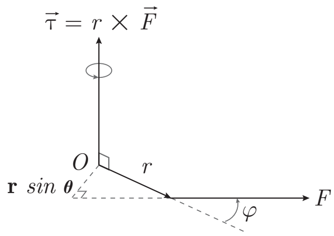
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (۱-۳۹)$$

چون گشتاور حاصل‌ضرب خارجی بردار مکان ذره در نیروی F است، پس اندازه آن را می‌توانیم به صورت زیر به دست آوریم

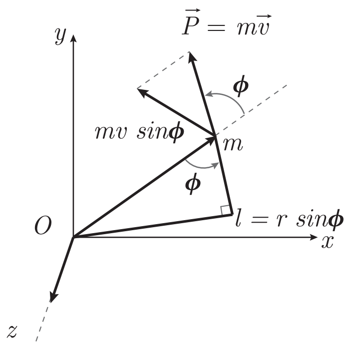
$$\tau = rF_\perp = r_\perp F = rF\sin\varphi \qquad (۱-۴۰)$$

شکل (۱ـ۹) ذره‌ای با تکانه خطی $\vec{p}=m\vec{v}$ را نشان می‌دهد که در صفحه $x-y$ در حال حرکت است. اگر بردار مکان این ذره r باشد، تکانه زاویه‌ای این ذره را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{\ell}=\vec{r}\times\vec{p}=m(\vec{r}\times\vec{v}) \qquad (۴۱-۱)$$



شکل ۱-۸



شکل ۱-۹

هم‌چنین اندازه تکانه زاویه‌ای با توجه به تعریف آن عبارتست از

$$l=rp_{\perp}=r_{\perp}p=mrv_{\perp}=mr_{\perp}v=mrv\sin\varphi \qquad (۴۲-۱)$$

برای رسیدن به یک نتیجه مهم از معادله (۱ـ۴۱) که تعریف تکانه زاویه ای است نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt}=m\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}\right) \qquad (۴۳-۱)$$

در معادله بالا $\frac{d\vec{v}}{dt}$ برابر با شتاب ذره (a) و $\frac{d\vec{r}}{dt}$ برابر با سرعت ذره است. بنابراین می‌توان معادله (۱ـ۴۳) را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt}=m(\vec{r}\times\vec{d}+\vec{v}\times\vec{v})$$

از آنجا که ضرب خارجی هر بردار در خودش صفر است، داریم

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt}=m(\vec{r}\times\vec{d})=\vec{r}\times m\vec{a}$$

که همان معادله (۱ـ۳۹) یا تعریف گشتاور است. در نتیجه آهنگ تغییر تکانه زاویه ای ذره برابر با گشتاور نیروهای وارد بر آن ذره است.

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (۱-۴۴)$$

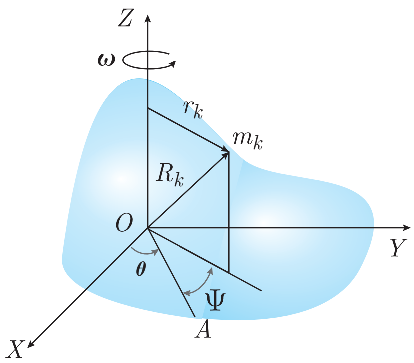
از معادله بالا استفاده‌های زیادی خواهیم کرد. به عنوان اولین نتیجه، اگر برآیند نیروهای وارد بر ذره‌ای صفر باشد، تکانه زاویه‌ای ذره ثابت خواهد ماند.

چرخش حول یک محور ثابت

ساده‌ترین حرکت جسم صلب بعد از حرکت انتقالی، حرکت چرخشی آن حول یک محور ثابت است. فرض کنید که جسم در حال دوران به دور محور Z است. موقعیت جسم در هر لحظه می‌تواند به وسیله زاویه θ که زاویه بین یک خط مرجع مانند OA و محور X است مشخص شود (شکل (۱ـ۱۰)).

اگر یک جسم صلب با سرعت زاویه‌ای ω دوران کند، تمام ذراتش با همین سرعت زاویه ای دوران می‌کنند. ذره‌ای به جرم m_k از این جسم که در فاصله $R_k(X_k, Y_k, Z_k)$ از مبدأ قرار دارد را به عنوان نماینده انتخاب می‌کنیم. این ذره در مسیری دایروی شکل به دور محور Z در حال حرکت است و شعاع مسیر دایره شکل $r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$ است، که مرکزش روی محور Z قرار دارد. سرعت این ذره برابر است با

$$v_k = r_k \omega$$



شکل ۱-۱۰

همچنین تکانه زاویه‌ای این ذره حول محور Z برابر است با

$$L_k = r_k(m_k v_k) = m_k r_k^2 \omega \qquad (۱-۴۵)$$

تکانه زاویه‌ای کل جسم حول محور Z برابر است با مجموع تکانه زاویه ای تک تک ذرات آن. یعنی

$$L = \sum_k r_k (m_k v_k) = \left(\sum_k m_k r_k^۲ \right) \omega$$

یا

$$L = I\omega \qquad (۱-۴۶)$$

که در آن

$$I = \sum_k m_k r_k^۲ = \sum_k m_k (x_k^۲ + y_k^۲) \qquad (۱-۴۷)$$

کمیت I برای یک جسم صلب که حول محور معینی می‌چرخد ثابت است و فقط به ساختار هندسی شکل وابسته است و لختی دورانی (ممان اینرسی) حول آن محور نامیده می‌شود. این کمیت چگونگی توزیع جرم جسم چرخان حول محور چرخش را مشخص می‌کند. چون جسم پیوسته است می‌توانیم به جای جمع زدن‌های گسسته، انتگرال بگیریم و I را به صورت زیر بنویسیم

$$I = \int r^۲ dm = \int r^۲ \rho dV \qquad (۱-۴۸)$$

توجه داشته باشید که r در انتگرال بالا فاصله عمودی هر المان جرمی dm از محور چرخش است.

هم‌چنین برای محاسبه انرژی جنبشی چرخشی جسم، انرژی‌های جنبشی تک تک ذره‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$K = \sum_k \frac{۱}{۲} m_k v_k^۲ = \frac{۱}{۲} \left[\sum_k m_k r_k^۲ \right] \omega^۲$$

$$K = \frac{۱}{۲} I\omega^۲ \qquad (۱-۴۹)$$

چون ممان اینرسی I به صورت خطی با جرم dm متناسب است، بنابراین برای محاسبه ممان اینرسی اجرام بزرگ می‌توانیم آنها را به جرم‌های بسیار کوچک dm تبدیل کنیم و مرحله به مرحله جمع زده یا انتگرال بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

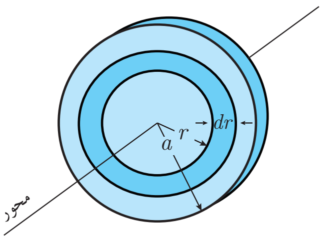
مثال ۱-۷ ممان اینرسی دیسک یکنواخت

ممان اینرسی یک دیسک یکنواخت به جرم M و شعاع a را حول محوری که از مرکز دیسک می‌گذرد، محاسبه کنید.

پاسخ: ابتدا چگالی سطحی دیسک را محاسبه می‌کنیم.

$$\sigma = M/\pi a^2$$

برای محاسبه ممان اینرسی یک دیسک دایره ای ابتدا مانند شکل (۱ـ۱۱) آن را به حلقه‌های هم مرکز تقسیم می‌کنیم. به این ترتیب گشتاور لختی هر یک از حلقه‌ها حول محور موردنظر عبارتست از



شکل ۱-۱۱

$$I_{\text{حلقه}} = \int r^2 dm = r^2 \int dm = r^2 (dm)_{\text{حلقه}}$$

$$(dm)_{\text{حلقه}} = 2\pi r dr \times \sigma$$

حال ممان اینرسی دیسک را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

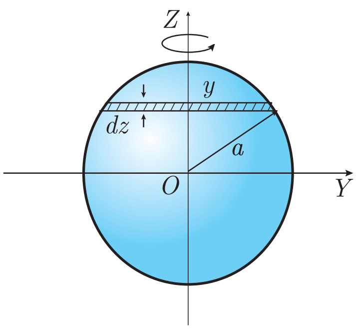
$$I = \int_0^M r^2 dm = \int_0^a r^2 2\pi r dr \sigma = 2\pi\sigma \int_0^a r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{a^4}{4} = \pi\sigma \frac{a^4}{2} = \frac{1}{2} M a^2 \qquad (۱-۵۰)$$

پس ممان اینرسی یک دیسک به شعاع a و جرم M برابر $\frac{1}{2}Ma^2$ است.

مثال ۱-۸ ممان اینرسی کره تو پر

ممان اینرسی یک کره یکنواخت به جرم M و شعاع a را حول محوری که از مرکز کره می‌گذرد، محاسبه کنید.

پاسخ: کره را به صورت دیسک‌هایی به ضخامت dz برش می‌دهیم به طوری که از تغییر شعاع بالا و پایین آن بتوان صرف نظرکرد و آن را به صورت یک دیسک ساده در نظر بگیریم.



شکل ۱-۱۲

$$dI = \frac{1}{2}y^2 dm = \frac{1}{2}y^2(\rho\pi y^2 dz)$$
$$I = \int dI = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\pi\rho y^4 dz = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\pi\rho(a^2 - z^2)dz = \frac{8}{15}\pi\rho a^5 = \frac{2}{5}Ma^2 \tag{۱-۵۱}$$

تساوی آخر از جایگذاری چگالی از معادله زیر به‌دست آمده است

$$\rho = \frac{M}{4\pi a^3/3}$$

در نتیجه ممان اینرسی یک کره یکنواخت با جرم M و شعاع a برابر $\frac{2}{5}Ma^2$ است.

مثال ۱-۹ بررسی سیستم زمین ـ ماه

پرتوهای لیزر توسط تلسکوپ به سمت ماه تابیده می‌شود و به وسیله آینه هایی که روی ماه نصب گردیده بازتاب می‌گردند. با اندازه گیری زمان رفت و برگشت پرتوهای لیزر، فاصله بین زمین و ماه با دقت بسیار بالایی اندازه گیری می‌شود. به وسیله این اندازه گیری ها دیده می‌شود که ماه به آرامی‌در حال دور شدن از زمین است. در این مثال این مسأله را گام به گام مورد بررسی قرار می‌دهیم .

به شکل (۱ـ۱۳) توجه کنید. نیروی گرانش ماه باعث پدیده جزر و مد می‌شود. در اثر این پدیده آب اقیانوس‌ها در راستایی که به سمت ماه است، کشیده می‌شوند. اما در اثر حرکت وضعی زمین ،زمین یک نیروی اصطکاک به آب‌ها وارد می‌کند و باعث می‌شود راستای این کشیدگی از راستای ماه منحرف شود، این انحراف باعث اعمال یک گشتاور توسط ماه بر زمین می‌شود و تکانه زاویه‌ای زمین را دچار تغییر می‌کند. چون نیروی بین زمین و ماه کاملا گرانشی و مرکزی است بنابراین اندازه حرکت سیستم ثابت می‌ماند.

شکل ۱-۱۳

کاهش تکانه زاویه‌ای زمین باعث افزایش تکانه زاویه‌ای ماه به همان اندازه خواهد شد و ماه از زمین دور می‌شود. تغییر در تکانه زاویه‌ای سیستم، باعث تغییر در فاصله زمین و ماه و هم‌چنین تغییر در دوره تناوب حرکت وضعی زمین و حرکت انتقالی ماه می‌شود. این تغییرات تا زمانی که دوره تناوب همه اجزا با هم برابر شود ادامه خواهد داشت. در واقع این گشتاور باعث می‌شود رفته رفته ماه و زمین به یکدیگر قفل

گرانشی شوند. هنگامی‌که این دو جسم به هم قفل شدند، تمام نیروها از مرکز دو جرم عبور می‌کند و هیچ گشتاوری به دو جسم وارد نمی‌شود و سامانه به حالت پایدار می‌رسد.

برای سادگی از شعاع ماه صرف‌نظر می‌کنیم و آن را ذره‌ای با جرم $M_{M'}$ فرض می‌کنیم.

هم‌چنین از نیروی گرانش خورشید در تمام قسمت‌ها صرف‌نظر می‌کنیم. در نتیجه چون برآیند نیروهای خارجی وارد به سیستم صفر است طبق معادله (۱ـ۴۴) تکانه زاویه‌ای سیستم ثابت می‌ماند.

تکانه زاویه‌ای در لحظه کنونی را با $L_۱$ نشان می‌دهیم که برابر است با

$$K_۱ = I_E\omega_{E۱} + I_{M۱}\omega_{M۱}$$

که در آن $\omega_{E۱}$ و $\omega_{M۱}$ به ترتیب سرعت زاویه ای وضعی زمین و سرعت زاویه‌ای انتقالی ماه است. چون از شعاع ماه صرف‌نظر کردیم، بنابراین از ممان اینرسی وضعی ماه هم صرف‌نظر می‌کنیم. این تقریب خوبی است چرا که تکانه زاویه ای وضعی ماه نسبت به تکانه زاویه ای مداری آن تقریبا ۲۵۰۰۰ بار کوچکتر است. اندیس ۱ نشان دهنده زمان حال است. هم‌چنین I_E و I_M ممان اینرسی زمین و ماه حول محور وضعی زمین است. برای سادگی مدار ماه را دایروی و محور وضعی زمین را عمود بر صفحه مداری ماه در نظر می‌گیریم.

فاصله و دوره تناوب اجزا تا وقتی که دوره تناوب یا سرعت زاویه‌ای همگی برابر شود تغییر می‌کند. فرض می‌کنیم در حالتی که ماه و زمین به هم قفل شده باشند، سرعت زاویه‌ای آنها $\omega_۲$ و تکانه زاویه‌ای سیستم $L_۲$ خواهد شد. در نتیجه

$$L_۲ = I_E\omega_۲ + I_{M۲}\omega_۲$$

چون تکانه زاویه ای سیستم تغییر نمی‌کند $L_۲ = L_۱$. اگر از جمله مربوط به زمین در رابطه بالا صرف نظر کنیم (بعدا مقدار خطای ناشی از این کار را محاسبه خواهیم کرد) خواهیم داشت

$$I_E\omega_{E۱} + I_{M۱}\omega_{M۱} = I_{M۲}\omega_۲$$

اگر فرض کنیم مدار ماه به دور زمین همواره دایروی بماند و سرعت زاویه‌ای را با استفاده از مثال ۱ـ۲ به‌دست آوریم خواهیم داشت

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM_E}{D^۳}} \Rightarrow \omega^۲ D^۳ = GM_E = \text{ثابت} \qquad (۱-۵۲)$$

که در آن D شعاع مدار ماه به دور زمین است.

$L_۲$ را بازنویسی می‌کنیم

$$L_۲ = I_{M۲}\omega_۲ = M_M D_۲^۲ \omega_۲$$

معادله بالا را به توان ۲ می‌رسانیم و با استفاده از معادله (۱ـ۵۲) و این‌که $L_۲ = L_۱$، فاصله نهایی ماه از زمین را محاسبه می‌کنیم

$$D_۲ = \frac{L_۱^۲}{GM_E M_M^۲}$$

با جایگذاری رابطه بالا در معادله (۱ـ۵۲) سرعت زاویه‌ای نهایی سیستم به‌دست می‌آید

$$\omega_۲ = \frac{G^۲ M_E^۲ M_M^۳}{L_۱^۳}$$

در ادامه نتایج بالا را به صورت عددی بررسی می‌کنیم.

برای این کار باید ابتدا ممان اینرسی زمین را محاسبه کنیم. فرض می‌کنیم چگالی زمین از مرکز تا شعاع $r_i = ۳/۵ \times ۱۰^۶\,\mathrm{m}$ برابر با $\rho_i = ۱/۳ \times ۱۰^۴\,\mathrm{kg\,m^{-۳}}$ و از r_i تا $r_\circ = ۶/۴ \times ۱۰^۶\,\mathrm{m}$ برابر با $\rho_\circ = ۴/۰ \times ۱۰^۳\,\mathrm{kg\,m^{-۳}}$ است. در نتیجه با استفاده از معادله (۱ـ۵۱) ممان اینرسی این کره تو پر دو جزئی برابر است با

$$I_E = \frac{۲}{۵}\,\frac{۴\pi}{۳}[r_\circ^۵\rho_\circ + r_i^۵(\rho_i - \rho_\circ)] = ۸/۰ \times ۱۰^{۳۷}\,\mathrm{kg\,m^۲}$$

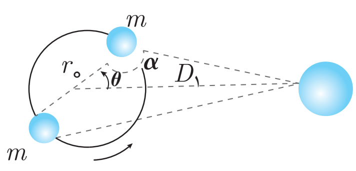
حال اگر جرم زمین و ماه را به ترتیب $M_E = ۶/۰ \times ۱۰^{۲۴}\,\mathrm{kg}$ و $M_M = ۷/۳ \times ۱۰^{۲۲}\,\mathrm{kg}$ و فاصله کنونی ماه تا زمین را $D_۱ = ۳/۸ \times ۱۰^۸\,\mathrm{m}$ و سرعت زاویه‌ای انتقالی ماه به دور زمین را $\omega_{M۱} = ۲/۷ \times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{rad/s}$ و سرعت زاویه ای وضعی زمین را $\omega_E = ۷/۳ \times ۱۰^{-۵}\,\mathrm{rad/s}$ در نظر بگیریم، آنگاه تکانه زاویه‌ای سیستم زمین ماه برابر است با

$$I_۱ = I_E\omega_{E۱} + I_{M۱}\omega_{M۱} = ۳/۴ \times ۱۰^{۳۴}\,\mathrm{kg\,m^۲\,s^{-۱}}$$

و در نتیجه فاصله نهایی ماه از زمین برابر $D_۲ = ۵/۴ \times ۱۰^۸\,\mathrm{m}$ و سرعت زاویه‌ای نهایی آن $\omega_۲ = ۱/۶ \times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{s^{-۱}}$ می‌شود، یعنی دوره تناوب حرکت انتقالی آن تقریبا ۴۶ روز می‌شود.

اگر در محاسبه $L_۲$ سهم زمین را نیز در نظر می‌گرفتیم، فرق چندانی به وجود نمی‌آمد، چون $I_E\omega_۲ = ۱/۳ \times ۱۰^{۳۲}\,\mathrm{kg\,m^۲\,s^{-۱}}$ در حالی که $I_{M۲}\omega_۲ = ۳/۴ \times ۱۰^{۳۴}\,\mathrm{kg\,m^۲\,s^{-۱}}$ است. این محاسبه نشان می‌دهد سهم ماه در تکانه زاویه‌ای سیستم تقریباً ۲۶۰ برابر سهم زمین است. در نتیجه تقریبی که استفاده کردیم باعث خطای زیادی نمی‌شود.

حال می‌خواهیم گشتاوری که ماه بر آب‌های زمین وارد می‌کند را تخمین بزنیم. برای این کار فرض می‌کنیم آب‌های زمین به شکل دو ذره با جرم m در دو طرف زمین و با زاویه θ نسبت به ماه (مانند شکل ۱ـ۱۴) قرار گرفته‌اند.



شکل ۱-۱۴

فاصله هرکدام از جرم‌ها را با استفاده از زاویه θ و قانون کسینوس‌ها می‌توان محاسبه کرد. نیروی گرانشی که ماه بر جرم m نزدیک‌تر وارد می‌کند برابر است با

$$F_c = \frac{GmM_M}{D_1^2 + r_0^2 - 2D_1 r_0 \cos(\theta)}$$

و نیرویی که به جرم m دورتر وارد می‌کند برابر است با

$$F_f = \frac{GmM_M}{D_1^2 + r_0^2 + 2D_1 r_0 \cos(\theta)}$$

برای محاسبه گشتاور نیاز به زاویه بین F و r_0 داریم. این زاویه را با استفاده از رابطه سینوس ها به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\sin\alpha}{D_1} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{D_1^2 + r_0^2 - 2D_1 r_0 \cos\theta}}$$

در نتیجه گشتاور وارد بر جرم m نزدیک تر برابر است با

$$\tau_c = F_c \frac{\sin(\theta) r_0 D_1}{[D_1^2 + r_0^2 - 2D_1 r_0 \cos(\theta)]^{1/2}} = \frac{GmM_M \sin(\theta) r_0 D_1}{[D_1^2 + r_0^2 - 2D_1 r_0 \cos(\theta)]^{3/2}}$$

به همین ترتیب گشتاور وارد بر جرم m دورتر برابر است با

$$\tau_f = F_f \frac{\sin(\theta) r_0 D_1}{[D_1^2 + r_0^2 + 2D_1 r_0 \cos(\theta)]^{1/2}} = \frac{GmM_M \sin(\theta) r_0 D_1}{[D_1^2 + r_0^2 + 2D_1 r_0 \cos(\theta)]^{3/2}}$$

گشتاور نیروی F_c عمود بر صفحه و در جهت داخل صفحه است و گشتاور نیروی F_f نیز عمود بر صفحه ولی به سمت بیرون صفحه است. که مجموع گشتاورها به سمت داخل صفحه خواهد بود. پس گشتاور کل عبارتست از

$$\begin{aligned}
\tau_c - \tau_f &= GmM_M \sin(\theta) r_0 D_1^{-2} \left(1 - \frac{3r_0^2}{2D_1^2} + \frac{3r_0 \cos(\theta)}{D_1} \right. \\
&\qquad \left. -1 + \frac{3r_0^2}{2D_1^2} + \frac{3r_0\cos(\theta)}{D_1}\right) \\
&= \frac{6GmM_M r_0^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{D_1^3}
\end{aligned}$$

در عبارت بالا چون $\frac{r_0}{D_1} \ll 1$ از تقریب $(1+x)^a \simeq 1 + ax$ استفاده کرده‌ایم. در معادله بالا θ تقریبا ۳ درجه و $m = 3.6 \times 10^{16}\ \mathrm{kg}$ در نتیجه $\tau = 4.1 \times 10^{16}\ \mathrm{N\,m}$ است.

توجه داشته باشید که این گشتاوری است که از طرف ماه بر زمین وارد می‌شود و در اثر آن تکانه زاویه ای زمین تغییر می‌کند، از آنجا که تکانه زاویه‌ای زمین برابر است با

$$L_E = I_E \omega_E$$

در نتیجه با استفاده از معادله (۱ـ۴۳) می‌توانیم آهنگ تغییر سرعت زاویه ای حرکت وضعی زمین را بیابیم

$$\tau = \frac{dL_E}{dt} = I_E \frac{d\omega_E}{dt}$$

از طرفی توجه داشته باشید که تکانه زاویه ای سیستم زمین ماه، به دلیل نبود نیروی خارجی پایسته است، یعنی

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I_E\omega_E + I_M\omega_M) = \tau_{sys} = ۰$$

$$\frac{d}{dt} = (I_E\omega_E) = -\frac{d}{dt}(I_M\omega_M)$$

با استفاده از معادله(۱ـ۵۲) داریم

$$I_{M۱}\omega_{M۱} = M_M D_۱^۲ \left[\frac{GM_E}{D_۱^۳}\right]^{۱/۲} = M_M \Big[D_۱ GM_E\Big]^{۱/۲}$$

با استفاده از نتیجه بالا می‌توانیم آهنگ تغییرات فاصله ماه از زمین را محاسبه کنیم.

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(M_M\sqrt{D_۱ GM_E}) = M_M\sqrt{GM_E}\frac{d\sqrt{D_۱}}{dt} = \frac{M_M\sqrt{GM_E}}{۲\sqrt{D_۱}}\ \frac{dD_۱}{dt}$$

برای مثال اگر بخواهیم تغییرات فاصله ماه تا زمین را در یک سال محاسبه کنیم، کافی است dt را در معادله بالا برابر با یک سال قرار دهیم و $dD_۱$ را به‌دست آوریم. به این ترتیب فاصله ماه از زمین سالانه حدود ۳۴ میلی متر افزایش می‌یابد.

۱-٤ تمرین‌های مروری

۱. ذره A، تحت تأثیر نیرویی که مرکز آن در مبدأ مختصات قرار دارد، روی دایره‌ای به شعاع R درصفحه xy حرکت می‌کند. مرکز این دایره در مبدأ مختصات است. ذره B روی یک سهمی‌در همان صفحه و تحت تأثیر همان نیرو حرکت می‌کند. کانون سهمی در مبدأ مختصات و راس آن در نقطه‌ای به مختصات دکارتی $(-a, ۰)$ قرار دارد و a مقداری مثبت است.

(الف) با توجه به تعریف سهمی، معادله مسیر ذره B را در دستگاه قطبی بر حسب پارامتر a، یعنی به شکل $r = r(\theta, a)$ به‌دست آورید.

(ب) اگر $a < R$ باشد، این دو خم در دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. این نقاط را P و Q نامگذاری می‌کنیم. فرض کنید $a = kR$ باشد که $۰ < R < k$. معادله حاکم بر مختصه‌ی θ نقاط P و Q را به دست آورید. به ازای $k = ۰/۲۵$ مختصات این دو نقطه را به‌دست آورید.

(ج) فرض کنید که برای مختصه‌ی θ ذره B داریم $\theta = ct + \frac{\pi}{۳}$. که c مقداری ثابت و مثبت و t زمان است. مدت زمانی را پیدا کنید که در طول آن، ذره B نسبت به ذره A در فاصله کمتری از مرکز نیرو قرار دارد.

۲. نشان دهید که اگر بردار مکان ذره‌ای به صورت زیر باشد

$$\vec{r} = (a \sin \omega t)\hat{i} + (b \cos \omega t)\hat{j}$$

مسیر آن یک بیضی با قطر بزرگ $۲a$ و قطر کوچک $۲b$ است. هم‌چنین بردار سرعت این ذره را محاسبه کنید.

۳. نشان دهید بردارهای یکه مختصات کروی در مختصات دکارتی به شکل زیر در می‌آیند

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \hat{\boldsymbol{\rho}} \sin\theta + \hat{\mathbf{z}} \cos\theta = \hat{\mathbf{i}} \sin\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{j}} \sin\theta \sin\phi + \hat{\mathbf{k}} \cos\theta \\
\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\boldsymbol{\rho}} \cos\theta - \hat{\mathbf{z}} \sin\theta = \hat{\mathbf{i}} \cos\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{j}} \cos\theta \sin\phi - \hat{\mathbf{k}} \cos\theta \\
\hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\hat{\mathbf{i}} \sin\phi + \hat{\mathbf{j}} \cos\phi
\end{aligned}$$

با توجه به قسمت قبل نشان دهید مؤلفه‌های بردار سرعت و شتاب در مختصات کروی به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + (r\dot{\phi}\sin\theta)\hat{\boldsymbol{\phi}} \\
\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲} - r\sin^{۲}\theta\dot{\phi}^{۲})\,\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^{۲})\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&\quad + (r\sin\theta\ddot{\phi} + ۲\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + ۲r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{\boldsymbol{\phi}}
\end{aligned}$$

۴. ذره‌ای با سرعت ثابت v در مسیری سهمی‌شکل به معادله $y^{2} = 4fx$ حرکت می‌کند. در این رابطه f مقداری ثابت است. مؤلفه‌های سرعت و شتاب این ذره را در مختصات قطبی به‌دست آورید.

۵. ماهواره‌ی مثال (۱ـ۶) را در نظر بگیرید، این بار فرض کنید اندازه نیروی اصطکاک جو به صورت زیر است

$$f = \gamma m v$$

که v سرعت ماهواره در مدارش است و جهت نیرو در خلاف سرعت ماهواره است. ثابت کنید تابعیت فاصله ماهواره بر حسب زمان به صورت زیر است

$$r = r_{0} e^{-2\gamma t}$$

که در آن r_{0} شعاع مدار ماهواره در لحظه‌ی $t = 0$ است. فرض کنید مسیر ماهواره در هر لحظه یک دایره است.

۶. وقتی اجرام سنگین مانند خوشه‌های کروی و یا کهکشان‌های کوچک، درون کهکشان های بزرگ در حرکت هستند، به دلیل بر هم کنش‌های گرانشی، نیرویی در خلاف جهت حرکت به آنها وارد می‌شود که باعث کندتر شدن آنها می‌شود. به این نیرو اصطکاک دینامیکی گفته می‌شود.

(الف) فرض کنید رابطه کلی اصطکاک دینامیکی به صورت زیر باشد.

$$f_{d} = C(GM)^{a} v^{b} \rho^{c}$$

به‌طوری که C یک ثابت بی‌بعد و a، bو c ثابت هستند. ρ چگالی جرمی کهکشان میزبان و M جرم شیء در حال حرکت درون کهکشان میزبان و v سرعت آن است. به کمک تحلیل ابعادی ضرایب a، b و c و در نتیجه رابطه‌ای برای نیروی اصطکاک دینامیکی به‌دست آورید. فرض کنید تفاوت کاهش سرعت جسم ناشی از اصطکاک دینامیکی با افزایش سرعت ناشی از تغییرات شعاع مداری جسم نسبت به سرعت جسم، v، قابل صرف‌نظر کردن است.

(ب) یک شی به جرم M در فاصله اولیه r_{0} در حال حرکت دایره‌ای به دور مرکز کهکشان است که در اثر اصطکاک دینامیکی به آهستگی شعاع آن تغییر می‌کند. اگر رابطه چگالی با فاصله از مرکز کهکشان به صورت زیر باشد

$$\rho(r) = \frac{v^{2}}{4\pi G r^{2}}$$

رابطه‌ای برای زمان رسیدن جرم M به مرکز کهکشان به‌دست آورید.

(ج) یکی از کهکشان‌های کوچک که قمر راه شیری است، LMC (ابر ماژلانی بزرگ[1]) نام دارد. جرم آن 2×10^{10} برابر جرم خورشید و فاصله‌اش تا مرکز کهکشان ۵۱ کیلوپارسک است. اگر

1) Large Magellanic Cloud

سرعت LMC برابر با ۳۰۰ کیلومتر بر ثانیه و مقدار $C=۲۳$ باشد، چه مدت طول می‌کشد که LMC در اثر اصطکاک دینامیکی به مرکز راه شیری سقوط کند.

«آزمون انتخابی تیم المپیاد جهانی ۲۰۱۲»

۷. آلبرت انیشتین در مقاله‌های مربوط به نظریه نسبیت به این نتیجه رسید که اگر بخواهیم قانون پایستگی تکانه خطی را حفظ نماییم باید جرم ذره را به صورت زیر تعریف نماییم

$$m=\frac{m_{\circ}}{\sqrt{۱-\frac{v^{۲}}{c^{۲}}}}$$

ذره‌ای را در نظر بگیرید که نیروهای وارد بر آن هم جهت با سرعت آن است. با استفاده از رابطه

$$F=\frac{dP}{dt}$$

اصل هم‌ارزی جرم و انرژی را به صورت زیر اثبات کنید

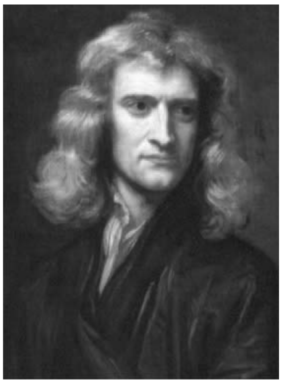
$$\Delta K=c^{۲}\Delta m$$

۸. با توجه به مثال ۱ـ۹، حساب کنید، در هر سال، شبانه روز زمین چند ثانیه بیشتر می‌شود؟

۹. با استفاده از معادله (۱ـ۴۸) عبارتی برای انرژی مکانیکی سیستم زمین ماه به‌دست آورید. آیا انرژی مکانیکی نیز مانند تکانه زاویه ای ثابت است؟

۱۰. فرض کنید تمام سطح زمین توسط اقیانوس‌ها پوشیده شده است و تغییر ارتفاع آب در اثر جزر و مد را ۰٫۵ متر فرض کنید (این مقدار را در فصل بعد محاسبه خواهیم کرد) . هم‌چنین فرض کنید ۱۰ درصد از تغییر انرژی پتانسیل آب صرف گرما می‌شود. چه مقدار انرژی در یک سال از این راه تلف می‌شود؟ این مقدار را با تغییر انرژی سیستم زمین-ماه در یک سال مقایسه کنید.

۱-۵ سرگذشت مشاهیر



آیزاک نیوتن (۱۷۲۷_۱۶۴۲) در یک خانواده کشاورز در ده وولستورپ[۲] انگلستان متولد شد. درباره سال‌های اول زندگیش اطلاع زیادی در دست نیست و زندگی دانشگاهی او در دوره لیسانس در کمبریج به ظاهر چندان ممتاز نبوده است. در سال ۱۶۶۵ میلادی شیوع طاعون باعث تعطیلی دانشگاه‌ها شد و نیوتن به خانه‌اش در ده بازگشت و تا سال ۱۶۶۷ در آنجا ماند.

در این دو سال خلاقیتش به صورت دریایی از اکتشافات بی‌همتا در تاریخ فکر بشر پدیدار شد: سری دو جمله‌ای برای توان‌های منفی و کسری، حساب دیفرانسیل و انتگرال، قانون گرانش عمومی و تجزیه طیف خورشید به وسیله منشور. در سال‌های پیریش خاطرات دوران جوانی معجزه‌آسای خود را چنین بیان کرده است: «آن زمان بهترین دوران عمر من در کشفیات بود و بیش از هر زمان دیگر به ریاضیات و فلسفه توجه داشتم».

نیوتن همواره شخصی درونگرا و راز نگهدار بود و اغلب اکتشافات شگفت‌آورش را نزد خود حفظ می کرد. او تمایلی به انتشار کارهای خود نداشت و اغلب کارهای برجسته خود را به اصرار و پافشاری دوستانش جمع آوری می‌کرد. کشفیات ریاضی او هرگز به طور منظم و منسجم منتشر نشد و به طور محدود و تا حدی به تصادف، از طریق گفتگوها و نامه‌هایی که در پاسخ سؤالات دیگران می نوشت، معلوم گشت.

نورشناسی و ساختن تلسکوپ جزوکارهای مورد علاقه‌اش بوده است. او برای تراشیدن عدسی، روش‌های زیادی را به کمک وسایل ساخت خودش، تجربه کرد و در حدود سال ۱۶۷۰ اولین تلسکوپ بازتابی را ساخت. تجزیه پرتوهای خورشید با استفاده از منشور (که از کارهای اولیه اوست)، همواره این کار را در ردیف یکی از کارهای کلاسیک ابدی در علوم تجربی، مشخص کرده است.

نیوتن در تلاش های علمی اش تقریبا شبیه به یک کوه آتشفشان با دوران خاموشی طولانی بود که گهگاه با فعالیت‌های فوق بشری فروزان می شد. وقتی کتاب اصول ریاضی فلسفه طبیعی (principia) که طی ۱۸ ماه تمرکز کامل و باورنکردنی فکری نوشته شده بود، در سال ۱۶۸۷ منتشر کرد بلافاصله به عنوان یکی از برجسته ترین دستاوردهای فکر بشر شناخته شد. نیوتن در این کتاب اصول اساسی مکانیک نظری و دینامیک سیالات را طرح کرد؛ اولین بیان ریاضی حرکت موج را ارئه کرد؛ قوانین کپلر را از قانون عکس مجذور فاصله گرانش به دست آورد؛ جرم زمین، خورشید و سیارات قمردار را محاسبه کرد؛ پخ

1) Woolsthorpe

شدگی شکل زمین را بیان کرد؛ و از آن برای توضیح تقویم اعتدالین استفاده کرد؛ و نظریه جزر و مد را پایه‌گذاری کرد. این‌ها تنها شمه‌ای از کار پرشکوه او بود. نیوتون در دینامیک و مکانیک سماوی به موفقیتی دست یافت که کپرنیک، کپلر و گالیله راه آن را هموار کرده بودند. این پیروزی چنان کامل بود که در طول دو قرن بعد از آن، کار بزرگ‌ترین دانشمندان این رشته‌ها از پانویس‌هایی بر این کار عظیم نیوتون تجاوز نکرد.

انتشار کتاب او تحت عنوان نورشناسی (optics) در سال ۱۷۰۴ یکی از با ارزش‌ترین کارها در زمینه علوم بود. در این کتاب او کارهای قبلی خود را در مورد نور و رنگ جمع‌آوری کرد و توسعه داد. او نتایج مقدماتی اما بی‌نهایت دقیقی را، بر مبنای تجربه، برای تشریح ماهیت احتمالی ماده به دست آورد؛ و با آنکه بررسی اندیشه‌هایش راجع به اتم و حتی هسته مستلزم آزمایش‌های دقیق تر اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم بود، معلوم شد که ایده‌های اصلیش کاملا درست بوده است. او به عنوان پیوست، سؤالات مشهور خود، یا اندیشه‌هایی در زمینه‌هایی از علوم را که بعدها مجال پرداختن به آنها را نیافت اضافه کرد. دو مطلب حیرت‌انگیز از سؤالات ۱ و ۳۰ را نقل می‌کنیم: «آیا اجسام از راه دور بر نور اثر نمی‌کنند و با تأثیرشان پرتوهای نور را خم نمی‌کنند؟» و «آیا اجسام مادی و نور قابل تبدیل به یکدیگر نیستند؟» از جملات فوق چنین به نظر می رسد که نیوتون در اینجا خمش گرانشی نور و هم‌ارزی جرم و انرژی را بیان می‌کند که نتایج اصلی نظریه نسبیت هستند.

وقتی از او سؤال شد که اکتشافات خود را چگونه انجام داده‌اید، پاسخ داد که «مطلب را به طور دائم در نظر می‌گیرم و منتظر می شوم که نخستین پرتوها اندک اندک تبدیل به روشنایی کامل گردند». اغلب، نیوتون را یک خِردگرای تمام عیار و تجسمی از عصر خرد گرایی توصیف می‌کنند. شاید دقیق تر آن باشد که راجع به او از دید قرون وسطی بیندیشیم: شخصی مقدس، گوشه نشین و دارای قوه شهودی که علوم و ریاضیات را ابزار کشف معمای جهان می‌دانست.