



آموزش و کتاب کار  
ریاضی (۱) پایه دهم تجربی  
(ویرزشی دکترها)

مؤلفین:

محمد سمیع زاده نیکوبی، علی شهروی



انتستیتیوت خوتوت خوان

تَعْدِيمُهُ

## ساحت مقدس

حضرت صدیقه طاهرہ فاطمہ زہرا سلام اللہ علیہا  
ی



# مقدمه ناشر

سلام به دوستای عزیز

گاهی بعضی از اتفاقات ساده تو زندگی روزمره آدم رو به فکر فرو می بره.

اتفاقها می تونن خیلی ساده و کوچک باشن ولی نتیجه جالبی (حداقل برای خودمون) داشته باشن.

شما نسل امروز، شاید خیلی چیزها رو از نزدیک ندیده باشید. مثلاً همین وسایل گرمایشی که تو خونه، محل کار، مدرسه و ... پیدا می شه. تو این دوره زمونه مخصوصاً تو شهرهای بزرگ ساختهونها پکیج دارن، یا از انرژی خورشیدی استفاده می کنن و جدیداً شونه های برقی (که زیبای خاصی دارن راجع به تجمل و مصرفشم که ... !!!)

 قدیم ترها، که شاید بعضی هاتون دیده باشید (ابته تو فیلمها و سریالها گهگداری دیده می شه). علاوه‌الدین، کرسی و بخاری نتی اتفاده می شد ابته هنوزم اینا در بعضی از مناطق دورافتاده و شاید در همین تهران هم استفاده می شن و کاملاً منسخ نشدن (گاهی بخاری بضاعت کم که واقعاً آدم رو به فکر فرو می بره). که هر کدو مشون گرمی خاص و کارایی جالبی رو با خودشون داشتن! ابته رفاه وسایل الان بیشتره.

امیدوارم هر کسی که تو آرامش باشه و بقیه با عنایت خدا و تلاش خودشون هر چه زودتر از رفاه برخوردار بشن.

وای بگذریم! چقدر مقدمه‌ای مقدمه‌ام زیاد شد.

داشتم می گفتم گاهی یه اتفاق ساده ...

بریم سر اون اتفاق ساده برای من

یه روز از روزای سرد زمستون، از همون روزایی که سرما استخوان آدم رو می ترکونه رفتم سرکار.

از خوبی روزگار چند وقتی بود فندک بخاری خراب بود و هر کسی که اوین نفر وارد دفتر می شد، بعد از باز کردن شیر گاز (برای رعایت اینمی موقع خروج شیر گاز رو می بستیم) با کبریت مشعل و بعد بخاری رو روشن می کرد. تا سرما رو از قن بیرون کنه.

اون روز از بخت روزگار اوین نفر من بودم. از شدت سرما به سمت بخاری رفتم، سریع کبریت رو برداشتم و روشن کردم (وای می خواید بگید چه اتفاقی افتاد مثلاً من سوختم یا منفجر شدم نه خیلی ساده‌تر از این حرفاست ). فندک گاز رو که باز کردم. کبریت رو گرفتم جلوی مشعل ولی مشعل روشن نشد، صدای گاز نیومد یادم افتاد شیر گاز رو باز نکردم. چند لحظه موندم کبریت رو خاموش کنم یا نه؟! پیش خودم گفتم تا بلندشم شیرگاز رو باز کنم کبریت به اتها می رسه دستم می سوزه یا بین بلند شدن و نشستن خاموش میشه.

 یه تقسیم ساده تو لحظه!

با احتیاط بلند شم، تا کبریت خاموش نشه، شیر گاز رو باز کنم، فندک رو بگیرم و مشعل گاز رو روشن کنم و هر جا احساس کردم انگشتم می خود بسوze کبریت رو خاموش کنم. (هنوز تو فکر بودم اینجا

بگذریم! بعد از یک عملیات پیچیده با همون کبریت و تو لحظه های آخر که شعله کبریت نزدیک انگشتام بود موفق شدم بخاری رو روشن کنم.

چرا این موضوع و این اتفاق ساده و بی مزه این قدر برام جاذب بود که بخواه وقت شما رو بگیرم این همه

براش صغیری و کبری بیافم! ازتون می خوام چند لحظه به این موضوع فکر کنید. (لطفاً بنویسید قبل از اینکه بقیه‌ی مقدمه رو بخونید. نظراتون و فکراتونو برامون بفرستید. خوشحال می شیم 😊). آدرس‌های ارتباطی رو اول کتاب نوشتیم. اسم، آدرس و شماره تماس یادتون نره.

یه چند سطری خالی می ذارم که بدون دیدن نوشتنهای من راحت‌تر فکر کنید. حتماً نظرات شما قشنگ تره!! 😊

زندگی مجموعه‌ای از این اتفاقات و تصمیمات کوچیک و گاهی بزرگ؛ اتفاق خراب شدن ماشین سرویس مدرسه و پیاده برگشتن، دیدن یه دوست قدیمی سر آزمون مدارس، شنیدن یه موسیقی خاطره انگیز، پیدا کردن یه کتاب خوب خاک گرفته توی قفسه کتاب و ... .

این‌ها اتفاقاتی هستن که هر روز ممکنه برامون پیش یاد و به دنبالش یه تصمیم یه فکر یه خاطره و ... به همراه داشته باشه. تصمیم: مشخص کردن هدف، سنجیلن مسیر و شرایط و رسیدن به نقطه انتهایها.

هدفمون رو انتخاب می‌کنیم و برای انجامش تصمیم می‌گیریم. نقطه‌ی انتهای مسیر بُرده، بُرد!!!

اگر کبریت خاموش می‌شد یا خودم مجبور به خاموش کردنش می‌شدم شکست بود؛ از ظفر من نه. یه تجربه بود. لذت تصمیم گرفتن، انجامش و افکار بعدش قشنگتره. تو اون لحظه نامید نشدم، تصمیم گرفتم و انجام دادم. کبریت رو که بی‌ارزشترین چیز می‌تونه باشه (به غیر از داستان دخترک کبریت فروش 😱) رو فدا نکردم. و تا آخرین لحظه از تصمیم و کار خودم نامید نشدم.

از آن روزی هم که تصمیم گرفتم جزوای خودم و دوستانم را به صورت کتاب درآورم و در اختیار دانشآموزان مستعد این مرز و بوم قرار بدم راه سختی در پیش داشتم. ولی تصمیم گرفتم، هدفم رو مشخص کردم، تلاش کردم و نامید نشدم. تو این راه گاهی سختی‌های کار، نه تنها انگشتانم را که گاه دلم را سوزاند. نامید نشدم اول و آخر کار را به خدا سپردم و به او تکیه کردم.

\*امروز با تمام سختی‌ها و مشکلات هنوز راه ادامه دارد.\*

کتاب حاضر از مجموعه کتاب‌های جدید انتشارات خوشخوان است، که به همت دو دوست عزیز و جوان آقایان سمیع‌زاده و شهریوی تألیف شده است. این کتاب با نگاه ویژه‌ای به درس ریاضی برای دوستای تجربی تألیف شده (کتاب آسونی نیست و با تمرکز به مباحث آینده و سوالات کنکور تجربی تهیه شده)، البته این کتاب برای دوستای ریاضی هم کتاب آسونی نیست و برای اونا هم مناسبه. امیدوارم کتاب مورد توجه دوستان (دیستان و دانشآموزان) قرار بگیره. ما رو از نظرات خود جهت بهبود کیفیت کتاب بی‌پره نگذارید.

لازم می‌دانم از تمامی کسانی که در توانید این اثر نقش داشتند کمال تشکر را داشته باشم و از شما دوست عزیز نیز به خاطر نواقص و کمبودهای احتمالی طلب غفو دارم.

رسول حاجی‌زاده

مدیر انتشارات خوشخوان



## سلام! خوش آمدید به کتاب ریاضی دهم تجربی!

آن زمانها که هنوز تکنولوژی تا این حد پیشرفت نکرده بود، دیگران مقدمه می‌نوشتند، ما می‌خواندیم؛  
ما مقدمه می‌نوشتم، دیگران می‌خوانند! خلاصه شیر تو شیری بود!! ونی الان که دیگر دارد  
نسل پنجم موبایل هم می‌آید، تصمیم گرفتیم یک کم خودمان را جمع جور کنیم و مقدمه‌نویسی را  
کمی تا قسمتی فاکتور بگیریم!

با وضعیت الان کنکور تجربی، دکتر شدن دارد روز به روز سخت‌تر می‌شود؛ برای همین آمدیم  
یک کتاب توب‌نوشتم مخصوص رفقاء که می‌خواهند با خیال راحت، دکتر بشوند. این کتاب  
هم آموزش دارد، هم تمرین حل شده برای درک بهتر مفاهیم و هم تعداد زیادی تمرین حل نشده که  
خودتان پایک زحمتش را بکشید!

- در بخش آموزش، آمدیم موضوعات را قلمه کردیم تا مباحث را عمیقتر یاد بگیرید.
- علاوه بر تمرین‌های حین درس، یک سری سوالات «دنده ۲» داریم. این‌ها را اول خودتان حل کنید، بعد بروید سراغ جواب‌های تشریحی ما!
- آخر هر فصل، به تعداد لازم (و حتی کمی بیشتر!) تمرین قراردادیم تا مهارت‌تان را محک بزنید. برای این تمرین‌ها، جای حل گذاشته‌ایم. این تمرین‌ها، پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ندارند؛ البته جواب آخر تمرین‌ها را نوشته‌ایم تا از درستی راه حل‌تان مطمئن شویم.
- حرف‌های خیلی مهم و تتابع خفن را داخل کادرهای «در یک کلام» می‌ینید!
- و اما قسمت جذاب تشکرات!
- سپاس از جناب آقای رسول حاجی‌زاده به خاطر اعتماد و ایده‌های سازنده‌شان. بدون دقت نظر ایشان، این کتاب به هیچ وجه شکل کنونی را نداشت.

- تشکر از جناب آقای بوربور، مسئول تأییف انتشارات که تلاش دنسوزانه‌شان، سبب ارتقاء سطح کیفی کتاب شد.
- سپاس بسیار از معلم درجه یک، سرکار خانم اسلام پسند، بخاطر ایندها و نظرات عالی شان در مراحل اولیه کار.
- قدردانی ویژه از دوستان و همکاران گرامی، آقایان جانی، دیلمقانیان، صدری، صدرآبادی، غریب‌زاده، لطیف دماوندی و دانشآموزان دیبرستان مفید ۱ بابت ویراستاری دقیق کتاب.



پیروز و سربلند باشید

علی شهری - محمد سمیع زاده نیکویی

بهار سال یکهزار و سیصد و نود و شش خورشیدی

## فهرست مطالب

۱	مجموعه و دنباله	فصل اول
۶۳	مثلثات	فصل دوم
۹۹	توان‌های گویا و عبارت‌های جبری	فصل سوم
۱۶۳	معادله‌ها و نامعادله‌ها	فصل چهارم
۲۲۹	تابع	فصل پنجم
۲۸۱	ترکیبیات	فصل ششم
۳۲۹	آمار و احتمال	فصل هفتم

# فصل اول

## (قسمت اول)

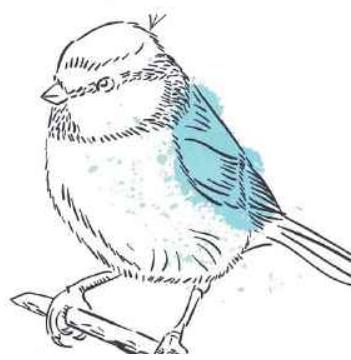
### مجموعه

#### مباحث بخش

- ✓ آن چه گذشت ...
- ✓ جبر مجموعه‌ها
- ✓ متمم یک مجموعه
- ✓ تعداد اعضای مجموعه
- ✓ بازه‌ها

سلام! به اولین فصل کتاب خوش اومدین. این فصل از دو بخش مجموعه‌ها و دنباله‌ها تشکیل شده. تفاوت‌های این دو مبحث، از شباهت‌هایشون بیشتره! این شد که تصمیم گرفتیم توی دو بخش جداگونه بهشون پردازیم. مجموعه‌ها رو پارسال خوندین، امسال تکمیل می‌کنین و بعد ازشون استفاده‌های زیادی می‌کنین. بنابراین با حواس جمع و چشم باز حرکت کنین.

توی قسمت اول (آن چه گذشت...) و تا حدی قسمت دوم (جبر مجموعه‌ها) چیزهایی که سال پیش خوندین و الان ممکنه یادتون رفته باشه رو مرور می‌کنیم. توی قسمت سوم، متمم مجموعه رو برآتون معرفی می‌کنیم. علی‌رغم آسون بودنش، کلی کاربرد داره. «تعداد اعضای مجموعه» و حواشی اون رو توی قسمت چهارم بررسی می‌کنیم؛ توی این قسمت، کلی حرف مهم داریم که با هم بزنیم و کلی سوالهای باحال داریم که با هم حل کنیم. آخرین قسمت این بخش رو به «بازه‌ها» اختصاص دادیم که یه جوابی دنیاشون با دنیای مجموعه‌ها فرق می‌کنه ولی بدونین که امسال کلی باهشون کار دارین و از اون‌ها استفاده می‌کنین.



مبحث «مجموعه» از پایه‌ای ترین مباحث ریاضی محسوب می‌شود که البته در سال گذشته باهاش آشنا شدیم. قراره توی این بخش، مباحث پارسال رو دوره کنیم و کلی مسائلی خوب حل کنیم!

### «مفاهیم اولیه»

به هر دسته‌ی مشخص از اشیاء، مجموعه گفته می‌شود. یه مجموعه می‌توانه شامل اعداد، حروف یا ... باشد. اعضای مجموعه رو داخل  $\{ \}$  قرار می‌دهیم. معمولاً مجموعه‌ها رو با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنیم. مثلاً  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $C = \{a, 5, -\sqrt{2}\}$  دو نکته‌ی مهم در مورد مجموعه وجود دارد:

نکته ۱: ترتیب نوشتن اعضای مجموعه هیچ اهمیتی ندارد. یعنی مثلاً فرقی نمی‌کند  $b, c, a$  یا  $a, b, c$  باشند.

نکته ۲: با تکرار کردن یک عضو مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی به دست نمی‌آید! مثلاً مجموعه‌ی  $\{a, a, a, b, b, b\}$  هیچ فرقی با مجموعه‌ی  $\{a, b\}$  ندارد! با نکات زیر هم از قبل آشنا هستین و فقط اینجا یادآوری می‌کنیم ...

نکته ۳: مجموعه‌های  $A$  و  $B$  مساوی هستن، اگه دقیقاً عین هم باشن! یعنی هر عضو  $A$  در  $B$  و هر عضو  $B$  در  $A$  باشد. البته باید به نکته ۱ و نکته ۲ توجه ویژه‌ای داشته باشین. به عنوان مثال:

$$\{a, b, c\} = \{a, b, c\}, \quad \{1, 5\} = \{5, 1\} = \{1, 1, 1, 5, 5\}, \quad \{1, 2\} \neq \{1, 4\}$$

نکته ۴: برای این که نشون بدیم یک عضو، متعلق به یه مجموعه هست، از نماد  $\in$  استفاده می‌کنیم. مثلاً برای مجموعه‌ی  $A = \{a, b, c\}$  می‌شه گفت  $a \in A$ . اگر هم یک عضو، متعلق به یه مجموعه نبود، می‌تونیم از نماد  $\notin$  استفاده کنیم. مثلاً برای همون مجموعه‌ی  $A = \{a, b, c\}$  می‌شه گفت  $d \notin A$ .

**تمرین ۱** اگر مجموعه‌های  $\{2, 4, 3x + 5\}$  و  $B = \{y + 3, 2, 5\}$  با هم برابر باشند، مقادیر مجھولات را بیابید.

**حل:** عضو «۲» توی هر دو مجموعه هست پس کاری بهش نداریم و باید بقیه‌ی اعضا رو جور کنیم:

$$\{y + 3, 2, 5\} = \{2, 4, 3x + 5\} \Rightarrow \begin{cases} y + 3 = 4 \\ 3x + 5 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B = C = \{2, 4, 5\}$$

**تمرین ۲** اگر مجموعه‌های  $\{x - 1, y\}$  و  $X = \{1, 5, 2x\}$  با هم برابر باشند، مقادیر مجھولات را بیابید.

**حل:** مجموعه‌ی  $X$  در ظاهر سه عضو داره! ولی توجه کین که این سه عضو نمی‌تونن متمایز باشن چون مجموعه‌ی  $Y$  دو عضو داره و یه مجموعه‌ی سه عضوی با یه مجموعه‌ی دو عضوی نمی‌تونه برابر باشد. بنابراین عضو  $x - 1$  از مجموعه‌ی  $X$  باید تکراری باشد، یعنی یا باید «۱» باشد یا «۵»! پس دو حالت داریم:

$$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \begin{cases} X = \{1, 5\} \\ Y = \{1, y\} \end{cases} \Rightarrow y = 5$$

در این حالت، دو مجموعه نمی‌تونن مساوی بشن!  $x - 1 = 5 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \begin{cases} X = \{1, 5\} \\ Y = \{3, y\} \end{cases} \Rightarrow y = 5$

بنابراین فقط توی حالت اول به جواب رسیدیم و این یعنی باید  $x = 2$  و  $y = 5$  باشد.

**تمرین ۳** برای مجموعه‌ی  $\{2, \{3\}, \{4, 5\}\}$  صحیح یا غلط بودن (الف)  $2 \in A$  (ب)  $\{3\} \in A$  (ج)  $\{3\} \in A$  و (د)  $\{4\} \in A$  را تعیین کنید.

**حل:** (الف) درسته! ۲ عضوی از مجموعه‌ی  $A$  هست.

(ب) درست نیست! توجه کین که  $\{3\}$  عضو مجموعه‌ی  $A$  هست نه  $3$ ! یعنی  $\{3\} \in A$  ولی  $3 \notin A$ .



د) درست نیست!  $\{4, 5\}$  عضو مجموعه‌ی  $A$  هست نه  $\{4\}$ . بنابراین  $\{4, 5\} \in A$  و  $\{4\} \notin A$ .

### «زیرمجموعه»

مجموعه‌های  $C = \{4, 5\}$  و  $B = \{1, 2, 3\}$ ،  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  را در نظر بگیریم. تمام اعضای مجموعه‌ی  $B$ ، داخل مجموعه‌ی  $A$  وجود داره، بنابراین می‌گیم:

مجموعه‌ی  $B$ ، زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی  $A$  است. به زبان ریاضی می‌نویسیم:  $B \subseteq A$

اما چنین اتفاقی برای مجموعه‌ی  $C$  نمی‌افته. یعنی نمی‌شه گفت که تمام اعضای مجموعه‌ی  $C$ ، داخل مجموعه‌ی  $A$  قرار داره (عضو ۵). بنابراین می‌گیم:

مجموعه‌ی  $C$ ، زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی  $B$  نیست. به زبان ریاضی می‌نویسیم:  $C \not\subseteq B$

برای مثال، تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی  $S = \{a, b, c\}$  عبارتست از:

$\{a, b, c\}$  ،  $\{a, b\}$  ،  $\{a, c\}$  ،  $\{b, c\}$  ،  $\{a\}$  ،  $\{b\}$  ،  $\{c\}$  ،  $\{\}$

بذراید چندتا نکته بگم که یه جورایی مربوط به مثال بالا هم می‌شن ...

نکته ۱: هر مجموعه‌ای، زیرمجموعه‌ی خودش محسوب می‌شه! یعنی مثلاً  $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$

نکته ۲: مجموعه‌ی تهی، زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌های است! اگه یادتون رفته بگم که:

تهی، یک مجموعه است که هیچ عضوی ندارد. مجموعه‌ی تهی را با نماد  $\emptyset$  یا  $\{\}$  نمایش می‌دهند. توجه کنید که مجموعه‌ی  $\{\emptyset\}$ ، مجموعه‌ی تهی نیست! بلکه مجموعه‌ای است که یک عضو دارد و آن عضو هم مجموعه‌ی  $\emptyset$  است!

نکته ۳: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی  $n$  عضوی برابر است با  $2^n$ . مثلاً تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی  $S = \{a, b, c\}$  برابر شد با  $2^3 = 8$ .

**تمرين ۴** مجموعه‌ی  $A = \{1, 2, 3\}$  را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های  $A$  را تعیین کنید.

**حل:** مجموعه‌ی زیرمجموعه‌ها، یعنی مجموعه‌ای که شامل تمام زیرمجموعه‌های یه مجموعه است! پس باید تمام زیرمجموعه‌های  $A$  را بریزیم توی یه مجموعه:

$$P = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$$

با توجه به مجموعه‌ی  $A = \{\{2, 3\}, 2, 3, \{5\}\}$  درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین نمایید.

(الف)  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$       (ب)  $\{\{5\}\} \subseteq A$       (ج)  $\{5\} \in A$       (د)  $\{5\} \subseteq A$       (ه)  $\{2, 3\} \subseteq A$

**تمرين ۵**

**حل:** (الف) درسته! مجموعه‌ی  $\{2, 3\}$  شامل دو عضو ۲ و ۳ هست و هر دوی این اعضا هم داخل مجموعه‌ی  $A$  هستن:

(ب) درسته! عضو  $\{2, 3\}$  هم داخل مجموعه‌ی  $A$  هست:

(ج) غلطه! مجموعه‌ی  $\{5\}$  دارای عضو ۵ هست، اما مجموعه‌ی  $A$  دارای این عضو نیست! پس:  $\{5\} \not\subseteq \{\{2, 3\}, 2, 3, \{5\}\}$

(د) درسته! عضو  $\{5\}$  داخل مجموعه‌ی  $A$  قرار داره پس:

(ه) درسته! مجموعه‌ی  $\{\{5\}\}$  دارای یک عضو  $\{5\}$  هست و این عضو هم درون مجموعه‌ی  $A$  قرار داره، بنابراین:

(و) غلطه! مجموعه‌ی  $\{\{2\}\}$  دارای دو عضو ۲ و  $\{2\}$  هست. اما مجموعه‌ی  $A$  فاقد عضو  $\{2\}$  هست.



## تمرين ۶ می‌دانيم مجموعه‌ی $\{1, 3, 6, 7, x, 2x\}$ داراي ۱۶ زيرمجموعه است. مقدار $x$ را بباید.

**حل:** تعداد زيرمجموعه‌های يه مجموعه‌ی ۴ عضوي برابر با ۱۶ تاست، چراکه  $2^4 = 16$ . بنابراین مجموعه‌ی  $R$  باید ۴ عضوي باشه تا تونه ۱۶تا زيرمجموعه داشته باشه. پس مجموعه‌ی  $R$  حتماً ۲تا عضو تكراري داره. يعني  $x$  و  $2x$  بايد تكراري باشن. از طرفی با توجه به اين که  $2x$ ، دو برابر  $x$  هست، تنها حالت ممکن اينه که  $x = 3$  باشد!

## «مجموعه‌های اعداد»

چندتا مجموعه‌ی خيلي خيلي مهم هستن که اين‌ها خيلي خيلي مهم هستن. منظورم رو که متوجه شدين؟ منظورم اين بود که خيلي خيلي مهم هستن!

عنوان	نماد	معرفی
مجموعه‌ی اعداد طبيعی	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
مجموعه‌ی اعداد حسابي	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
مجموعه‌ی اعداد صحيح	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
مجموعه‌ی اعداد گويا	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$
مجموعه‌ی اعداد گنك	$\mathbb{Q}'$	مجموعه‌ی تمام اعدادي که نشه اون‌ها رو به صورت تقسيم دو عدد صحيح نوشته.
مجموعه‌ی اعداد حقيقي	$\mathbb{R}$	مجموعه‌ی شامل تمام اعدادي که می‌شناسين! چه گويا چه گنك.

نکته: يكبار دیگه به تعریف مجموعه‌ی اعداد گويا نگاه کنین. این تعریف داره می‌گه که مجموعه‌ی  $\mathbb{Q}$ ، شامل تمام اعداد کسری به فرم  $\frac{a}{b}$  هست که صورت و مخرج‌شون صحیح باشه ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ) و ضمناً مخرج نباید صفر باشه ( $b \neq 0$ ).

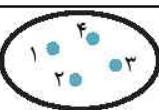
## تمرين ۷ برای مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, x+2, x-2\}$ می‌دانيم $A \subseteq \mathbb{W}$ و $A \not\subseteq \mathbb{N}$ . مجموع اعضای اين مجموعه را بباید.

**حل:** چه موقع ممکنه يه مجموعه، زير مجموعه‌ی اعداد حسابي باشه ولی زيرمجموعه‌ی اعداد طبيعی نباشه؟! بله! زمانی که عضو «صفر» داشته باشه. چون عضو «صفر»، فقط توی مجموعه‌ی حسابي هست. پس یا باید  $x+2=0$  یا  $x-2=0$  اما حالت  $x+2=0$  ممکن نیست چون اون موقع  $x$  منفي در میاد و دیگه مجموعه‌مون حتی زير مجموعه‌ی اعداد حسابي هم نیست! پس باید داشته باشیم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow A=\{1, 2, 3, 4, 0\} \Rightarrow A=\{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow 0+1+2+3+4=10 = \text{مجموع اعضا}$$

## «نمایش مجموعه‌ها»

برای معرفی کردن يه مجموعه، آتا راه وجود داره که توی جدول زير در موردشون صحبت می‌کنیم ...

مثال	توضیحات	عنوان
$A = \{1, 2, 3, 4\}$	توی اين روش باید تمام اعضای مجموعه رو بنویسیم؛ واسه همين هم اسمش رو بیان گسترده می‌ذاریم.	بيان گسترده
$A = \{m \mid m \in \mathbb{N}, m \leq 4\}$	توی اين روش باید ویژگی مشترک اعضا رو بیان کييم.	بيان فشرده (بيان رياضي)
	به نمايش گرافيكی مجموعه، نمودار ین گفته می‌شه.	نمودار ین



### تمرین ۸

مجموعه‌های زیر را به صورت گسترده نمایش دهید.

$$(الف) A = \left\{ \frac{a}{a+1} \mid a \in \mathbb{N}, a < 6 \right\}$$

$$(ب) B = \left\{ \sqrt[2+k]{k} \mid k \in \mathbb{Z}, k^2 \leq 4 \right\}$$

$$(ج) C = \left\{ 2^{-x} \mid x \in \mathbb{N}, x < 5 \right\}$$

**حل:** (الف)  $a \in \mathbb{N}, a < 6$ , یعنی  $a$  های طبیعی و کوچک‌تر از ۶ به عبارت دیگه  $a = 1, 2, 3, 4, 5$  هست. حالا باید بینیم به ازای این مقادیر  $a$ , حاصل  $\frac{a}{a+1}$

$$A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \right\}$$

چه قدر می‌شه. مثلاً اگه  $a = 1$  باشد،  $\frac{a}{a+1} = \frac{1}{2}$  می‌شه و به همین ترتیب ... در نهایت، داریم:

(ب)  $k \in \mathbb{Z}, k^2 \leq 4$ , یعنی  $k$  های صحیح که مربع اون‌ها از ۴ کوچک‌تر یا مساوی هست. به عبارت دیگه  $k = -2, -1, 0, 1, 2$  می‌شه. با جای‌گذاری این  $k$ ‌ها

$$B = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$$

در رابطه‌ی  $\sqrt{2+k}$  اعضای مجموعه رو پیدا می‌کنیم:

$$C = \{2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \right\}$$

(ج) ایده‌ی این یکی هم مثل دو تای قبلی هست. فقط جوابش رو می‌گیریم:

مجموعه‌های زیر را به صورت فشرده نمایش دهید.

### تمرین ۹

$$(الف) A = \{3, 6, 9, 12\}$$

$$(ب) B = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{6}, \frac{3}{8}, \dots, \frac{3}{100} \right\}$$

$$(ج) C = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$$

**حل:** برای تبدیل نمایش گسترده به نمایش فشرده، باید دقیق و بیشتر از خاصیت مشترک اعضای مجموعه داشته باشیم.

(الف) اعضای مجموعه‌ی  $A$ , همه‌شون مضرب ۳ هستند. پس فرم کلی‌شون به صورت  $3k$  هست. البته  $k$  باید مقادیر  $1, 2, 3, 4$  را اختیار کنه، پس:

$$A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 4\}$$

(ب) اعضای مجموعه‌ی  $B$ , همه‌شون به فرم  $\frac{3}{2k}$  هستند. توجه کنیم که  $k$  باید مقادیر  $1, 2, 3, \dots, 50$  را اختیار کنه، پس:

(ج) اعضای مجموعه‌ی  $C$ , همه‌شون مربع کامل  $(k^2)$  هستند. این مجموعه برخلاف ۲ تای قبلی، بی‌نهایت عضو داره، از صفر تا ...! پس کافیه بگیریم که  $k$  عضوی

$$B = \{k^2 \mid k \in \mathbb{W}\}$$

از مجموعه‌ی اعداد حسابی هست:

### چالش

سؤال: آیا همیشه می‌توان برای یک مجموعه، نمایش فشرده پیدا کرد؟

خیر! کافیه مجموعه‌ی اعداد اول  $P = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$  رو در نظر بگیریم. هیچ فرمولی وجود نداره که بتوانه این اعداد رو تولید کنه. فقط برای مجموعه‌هایی می‌شه نمایش فشرده پیدا کرد که اعضاشون به نظم و ترتیب خاصی داشته باشن.

سؤال: آیا نمایش فشرده برای یک مجموعه، یکتاست؟

باز هم خیر! اول این توضیح رو بدم که یکتا، یعنی «یه دونه!» به عبارت دیگه، سؤال داره می‌گه آیا فقط یه دونه نمایش فشرده می‌شه برای یه مجموعه

پیدا کرد یا نه! به عنوان مثال، مجموعه‌ی  $A$  توی مثال قبل رو در نظر بگیریم. می‌شد این مجموعه رو به صورت زیر هم بیان کرد. پس نمایش

فشرده‌ی یه مجموعه همیشه وجود نداره و اگر هم وجود داشته باشد، لزوماً یکتا نیست.

$$A = \{3k + 3 \mid k \in \mathbb{W}, k \leq 3\}$$

## دندان ۲۵

- مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

$$(الف) A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 10\}$$

$$(ب) B = \{2^x \times 3^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 4\}$$



ج)  $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 5 \leq x^r \leq 7\}$

د)  $D = \{x^r + x \mid x \in \mathbb{Z}, \sqrt{-x} \in \mathbb{Z}, x \geq -12\}$

-۲- مجموعه‌های زیر را به صورت فشرده نمایش دهید.

$$A = \{0, 1, 3, 7, \dots\}$$

$$B = \{\dots, -15, -5, 5, 15, 25, \dots\}$$

$$C = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{17}, -\frac{1}{82}, \frac{1}{257}, -\frac{1}{626}, \dots\right\}$$

-۳- درستی یا نادرستی هر یک عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف)  $\{a, \{a\}\} \subseteq \{a, \{\{a\}\}\}$

ب)  $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$

ج)  $A \subseteq B, B \in C \rightarrow A \in C$

د)  $x \in A, A \in B \rightarrow x \in B$

-۴- اگر  $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  و  $A = \{\{\emptyset\}\}$  باشند و مجموعه‌ی  $C$  نیز، «مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های  $B$ » باشد، درستی یا نادرستی روابط داده شده را تعیین نمایید.

$$B \subseteq C$$
 (ج)

$$B \in C$$
 (ج)

$$A \subseteq C$$
 (ب)

$$A \in C$$
 (الف)

-۵- به ازای چه مقادیری از  $a$  و  $b$  رابطه‌ی  $\{a, a^r\} = \{1, b, b^r\}$  برقرار است؟



در دوران کودکی، وقتی با «اعداد» آشنا شدیم، یادگرفتیم که چه جویی می‌شه یک سری عملیاتی جبری بین اعداد انجام داد. مثلاً می‌شه دو تا عدد رو با هم جمع کرد یا یک عدد را از یک عدد دیگه کم کرد یا ... . عملیات‌جبری، بین «مجموعه‌ها» هم قابل تعریف کردن هست که توی این بخش راجب بهشون صحبت می‌کنیم. راستی تا یادم نرفته این رو هم بگم که این فصل هم مطالب جدید داره و هم مطالب مرسوری!

### «اجتماع دو مجموعه»

اجتماع دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  یعنی مجموعه‌ای که شامل تمام اعضای  $A$  و  $B$  باشد. اجتماع مجموعه‌های  $A$  و  $B$  رو با نماد  $A \cup B$  نشون می‌ديم.

$$\{1, 2, 3, 4\} \cup \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

مثال:

$$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

اجتماع سه‌تا مجموعه هم دقیقاً همین‌جوری تعریف می‌شه:

بعضی از ویژگی‌های اجتماع، از این قراره:

ویژگی	توضیح	مثال
$A \cup B = B \cup A$	توی اجتماع دو مجموعه، هیچ فرقی نمی‌کنه کدوم رو اول بنویسیم. به این ویژگی اجتماع، ویژگی جایه‌جایی گفته می‌شه.	$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ $\{2, 3\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\}$
$A \cup A = A$	اگه یه مجموعه رو با خودش اجتماع بگیریم، به خودش می‌رسیم!	$\{1, 2\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\}$
$A \cup \emptyset = A$	از اون‌جا که مجموعه‌ی تهی هیچ عضوی نداره، وقتی یه مجموعه رو با تهی اجتماع می‌گیریم، هیچی بهش اضافه نمی‌شه!	$\{1, 2\} \cup \emptyset = \{1, 2\}$
$A \subseteq (A \cup B)$ $B \subseteq (A \cup B)$	انتظار داریم که مجموعه‌ی $A$ نسبت به مجموعه‌ی $A \cup B$ اعضای بیشتر و با برابری داشته باشد، پس $A$ زیرمجموعه‌ای از $A \cup B$ هست. راستی توجه کنیم که این داشتن برای $B$ هم هست: $B \subseteq (A \cup B)$	$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ $\Rightarrow \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
$A \subseteq B$ $A \cup B = B$	اگر $A \subseteq B$ باشد آن‌گاه $A \cup B = B$ باشد. اگر $A \subseteq B$ باشد آن‌گاه $A \cup B = B$ باشد. اگر $A \subseteq B$ باشد آن‌گاه $A \cup B = B$ باشد.	$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ $\Rightarrow \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

### «اشتراک دو مجموعه»

اشتراک دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  یعنی مجموعه‌ای که شامل اعضای مشترک  $A$  و  $B$  باشد. اشتراک مجموعه‌های  $A$  و  $B$  رو با نماد  $A \cap B$  نشون می‌ديم.  
مثال:

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{4, 5, 6, 7\} = \{4\}$$

اشتراک سه‌تا مجموعه هم دقیقاً همین‌جوری تعریف می‌شه:

$$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} \cap \{2, 4\} = \{2\}$$

وقتی هم که دو تا مجموعه هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، اشتراکشون تهی می‌شه، مثلاً:

$$\{1, 2, 3\} \cap \{5, 6, 7\} = \emptyset$$

به دو مجموعه‌ای که اشتراکشان تهی باشد، مجموعه‌های جدا از هم گفته می‌شود.



توى جدول زير، يكسرى از ويژگى های اشتراك رو بيان کردیم.

مثال	توضیح	ويژگی
$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$ $\{2, 3\} \cap \{1, 2\} = \{2\}$	توى اشتراك دو مجموعه، هيج فرقى نمى کنه کدوم رو اول بنويسيم. (ويژگى جابه جاي)	$A \cap B = B \cap A$
$\{1, 2\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}$	اگه يه مجموعه رو با خودش اشتراك بگيريم، به خودش مى رسيم!	$A \cap A = A$
$\{1, 2\} \cap \emptyset = \emptyset$	از اون جا که مجموعه‌ی تهی هيج عضوي نداره، بنابراین هيج اشتراكی هم با يه مجموعه‌ی ديگه نمى تونه داشته باشه!	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$ $\Rightarrow \{2\} \subseteq \{1, 2\}$	انتظار داريم که مجموعه‌ی $A \cap B$ نسبت به مجموعه‌ی $A$ اعضای کمتر و يا برابری داشته باشه، پس $A \cap B$ زيرمجموعه‌ای از $A$ هست. راستي توجه کنин که اين داستان برای $B$ هم هست: $(A \cap B) \subseteq B$	$(A \cap B) \subseteq A$ $(A \cap B) \subseteq B$
$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ $\Rightarrow \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$	اگر $A \subseteq B$ باشه يعني $A$ بخشی از $B$ هست. پس وقتی $A$ رو با $A \cap B = A$ اشتراك بگيريم، هيج چيزی ازش کم نمى شه! و اين يعني	اگر $A \subseteq B$ باشد آن گاه $A \cap B = A$

### « تفاضل مجموعه‌ها »

مجموعه‌های  $A$  و  $B$  رو در نظر بگيرين.  $A - B$  يعني مجموعه‌ی تمام اعضاي که داخل  $A$  هستن ولی داخل  $B$  نیستن! مثا:

$$\{1, 2, 3\} - \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$$

حواستون باشه که توى  $A - B$ ، مجموعه‌ی  $B$  فقط زمانی مى تونه مجموعه‌ی  $A$  رو کوچيك کنه که باهاش اشتراك داشته باشه! مثا:

$$\{1, 2\} - \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2\}$$

همون طور که ديديد چون اين دو مجموعه اشتراكی با هم نداشتن در تفاضل کوچيك نشدن!

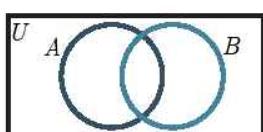
اگر  $B - A = B$  و  $A - B = A$  هم باشنند، آن گاه  $B - A$  است.

حالا برييم سrag يه سري ويژگى ...

مثال	توضیح	ويژگی
$\{1, 2\} - \{2, 3\} = \{\}$ $\{2, 3\} - \{1, 2\} = \{3\}$	تفاضل مجموعه‌ها، ويژگى جابه جاي نداره يعني مهمه کدوم رو اول بنويسيم.	$A - B \neq B - A$
$\{1, 2\} - \{1, 2\} = \{\}$	اگه يه مجموعه رو از خودش کم کنيم، چيزی ازش باقی نمى مونه!	$A - A = \emptyset$
$\{1, 2\} - \{\} = \{1, 2\}$	تهي هيج عضوي نداره! پس نمى تونه هيج عضوي از $A$ رو حذف کنه.	$A - \emptyset = A$
$\{\} - \{1, 2\} = \{\}$	تهي که از اول خودش هيج عضوي نداره چه برسه به اين که بخواي يه چيزی رو ازش کم کني!	$\emptyset - A = \emptyset$
$\{1, 2\} - \{2, 3\} = \{\}$ $\Rightarrow \{\} \subseteq \{1, 2\}$	انتظار داريم که مجموعه‌ی $A - B$ نسبت به مجموعه‌ی $A$ اعضای کمتر با برابری داشته باشه، پس $A - B$ زيرمجموعه‌ای از $A$ هست.	$(A - B) \subseteq A$ $(B - A) \subseteq B$
$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$ $\{1, 2\} - \{2, 3\} = \{\}$ $\{1, 2\} - \{\} = \{\}$	هيج فرقى نمى کنه $B$ رو از $A$ کم کني يا اين که $A \cap B$ رو از $A$ کم کني! جفت‌شون يه چيز مى شه.	$A - B = A - (A \cap B)$
$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ $\Rightarrow \{1, 2\} - \{1, 2, 3\} = \{\}$	اگر $A \subseteq B$ باشه يعني $B$ مجموعه‌ی بزرگ‌تری از $A$ هست. پس وقتی $B$ رو از $A$ کم مى کنيم ديگه هيج چيزی ازش باقی نمى مونه!	اگر $A \subseteq B$ باشد آن گاه $A - B = \emptyset$



## «رسم نمودار ون برای دو مجموعه»



نمودار ون برای دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  در حالت کلی به صورت مقابل رسم می‌شود. تبی این شکل، مجموعه‌های  $A$  و  $B$  رو با دایره‌هایی نشون دادیم که داخل یک مستطیل قرار دارند. به این مستطیل، مجموعه‌ی مرجع گفته می‌شود. هر مسئله‌ای واسه خودش یه مجموعه‌ی مرجع دارد.

### مجموعه‌ی مرجع چیست؟

### در یک کلام

مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ای است که تمام مجموعه‌های یک مسئله، زیر مجموعه‌ی آن باشند. مجموعه‌ی مرجع را معمولاً با یکی از نمادهای  $U$  یا  $M$  نمایش می‌دهند. هر مسئله‌ای می‌تواند برای خودش یک مجموعه‌ی مرجع داشته باشد. مثلاً ممکن است مجموعه‌ی مرجع یک مسئله، مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد و مجموعه‌ی مرجع یک مسئله‌ی دیگر، مجموعه‌ی اعداد حقیقی. در نمودار ون، مجموعه‌ی مرجع را با نماد مستطیل نمایش می‌دهند.

هر کدام از قسمت‌های این نمودار ون، یک دسته‌ی خاص از اعضا رو معرفی می‌کنن. جدول زیر رو دریابین ...

نماد ریاضی	توصیف اعضا	ناحیه‌ی مورد نظر
$A \cup B$	اعضایی که حداقل در یکی از دو مجموعه‌ی $A$ یا $B$ قرار دارن.	
$A \cap B$	اعضایی که در هر دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ قرار دارن.	
$A - B$	اعضایی که فقط در مجموعه‌ی $A$ قرار دارن. (تبی مجموعه‌ی $B$ قرار ندارن)	
$B - A$	اعضایی که فقط در مجموعه‌ی $B$ قرار دارن. (تبی مجموعه‌ی $A$ قرار ندارن)	
$A \Delta B$	اعضایی که دقیقاً در یکی از مجموعه‌های $A$ یا $B$ قرار دارن. به این مجموعه، تفاضل متقارن دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ گفته می‌شود.	

### تفاضل متقارن چیست؟

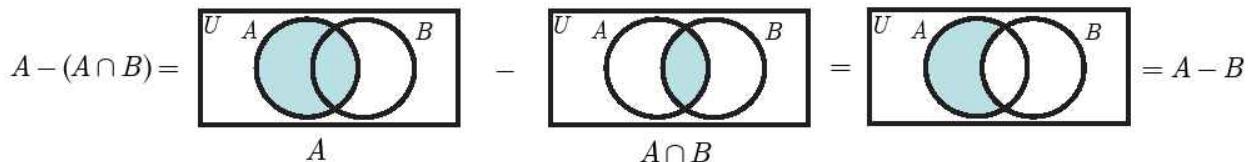
### در یک کلام

تفاضل متقارن دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  شامل اعضای است که فقط عضو یکی از دو مجموعه باشند. تفاضل متقارن مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را با نماد  $A \Delta B$  نمایش می‌دهیم. با دقت کردن به نمودار ون مربوط به تفاضل متقارن، می‌توان فهمید  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$  یا به عبارت دیگر  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ .



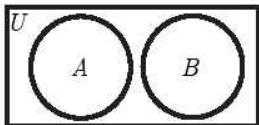
### تمرین ۱ با استفاده از نمودار ون برای دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ نشان دهید $.A - B = A - (A \cap B)$

**حل:** طبق شکل زیر، اول نمودار ون برای دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  رو رسم می‌کنیم؛ بعد  $A \cap B$  رو از  $A$  کم می‌کنیم. چیزی که باقی می‌ماند، همون نمودار ون  $A - B$  هست.



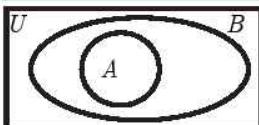
### تمرین ۲ نمودار ون دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ را چنان رسم کنید که $A \cap B = \emptyset$ باشد.

**حل:** اگه دایره‌های مربوط  $A$  و  $B$  رو جدا از هم رسم کنیم، معلوم می‌شه که هیچ اشتراکی ندارن. این جوری:



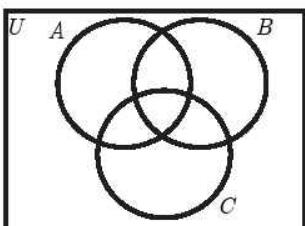
### تمرین ۳ نمودار ون دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ را چنان رسم کنید که $A \subseteq B$ باشد.

**حل:** از اون جا که  $A$  بخشی از  $B$  هست، باید ناحیه‌ی مربوط به  $A$  رو داخل ناحیه‌ی مربوط به  $B$  رسم کنیم:



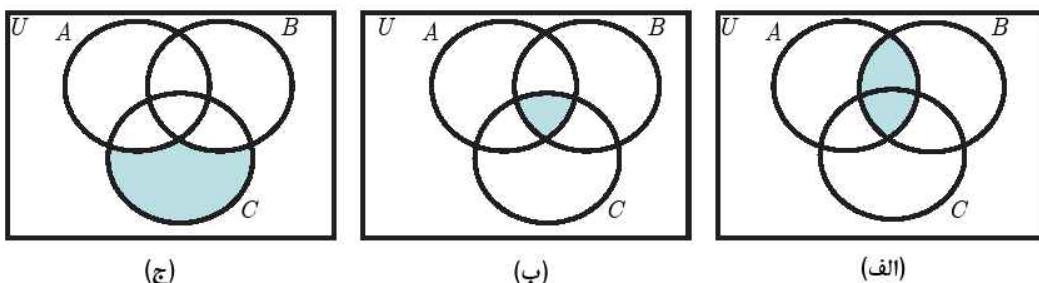
### » رسم نمودار ون برای سه مجموعه

برای سه مجموعه‌ی  $A$ ،  $B$  و  $C$  هم می‌توانیم نمودار ون رسم کنیم. هر چند تویی کتاب درسی ۱۱ام این نمودار رسم نشده، ولی خوبه که یادش بگیریم. تویی تمرین‌های آخر بخش، بیشتر بهش می‌پردازیم. فعلاً شکل‌اش رو یادبگیریم:



### تمرین ۴ روی نمودار ون سه مجموعه‌ی $A$ ، $B$ و $C$ هر یک از نواحی (الف) $A \cap B \cap C$ (ب) $A \cap B$ (ج) $C - (A \cup B)$ را نمایش دهید.

**حل:** کار سختی نیست! نگاه کنیم:



دندان ۲۵

۶- رابطه‌ی بین  $A$ ،  $B$  و  $C$  را بیابید به طوری که  $.A \cup B = B \cap C$



- بررسی کنید: ۷

الف) اگر  $A \cup B = A - B$  آیا می‌توان نتیجه گرفت  $B = \emptyset$ ؟

ب) اگر  $A - B = A - C$  آیا می‌توان نتیجه گرفت  $B = C$ ؟

با استفاده از نمودار ون، حاصل  $(B - A) \cup (A \cap B)$  را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. ۸

به کمک نمودار ون، درستی یا نادرستی روابط زیر را تعیین کنید. ۹

الف)  $(A \cup B) - B = A - B$

ب)  $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

ج)  $(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$

د)  $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$

۱۰- مجموعه‌ی  $B$  دو عضو دارد و می‌دانیم  $A \cap B = \{4, 5\}$  و  $A = \{4, 5, B\}$ ، در این صورت درستی یا نادرستی روابط داده شده را تعیین کنید.

الف)  $\{\{4, 5\}\} \subseteq A$

ب)  $\{\{B\}\} \subseteq A$

ج)  $\{4, 5\} \in B$

د)  $B \subseteq A$

ه)  $\{4, 5\} \subseteq B$

و)  $B \in A$

۱۱- نمودار ون سه مجموعه‌ی  $A$ ،  $B$  و  $C$  را به گونه‌ای رسم کنید که  $A \cap B = A \cap C = \emptyset$  و  $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

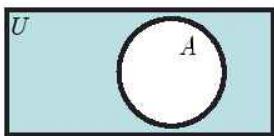


شاید با دیدن نمودارهای ون بخش قل پیش خودتون بگین که

« تعریف کردن و نمایش دادن مجموعه‌ی مرجع به چه دردی می‌خوره؟ »

برای گرفتن جواب این سؤال، توی این بخش، همراه ما باشین. برای شما پاسخ‌های ویژه‌ای داریم!!

« متتم یک مجموعه چیست؟



کار رو با نمودار ون شروع می‌کنیم. توی شکل رو به رو، نمودار ون مجموعه‌ی  $A$  با فرض داشتن مجموعه‌ی مرجع  $U$  رسم شده. شکل رو به رو از دو ناحیه تشکیل شده. ناحیه‌ی داخل دایره، معرف اعضا‌ی هست که متعلق به مجموعه‌ی  $A$  هستن. ناحیه‌ی دوم (ناحیه‌ی رنگی)، ناحیه‌ی خارج دایره است؛ این ناحیه مربوط به اعضا‌ی می‌شه که متعلق به مجموعه‌ی  $A$  نیستن. راستی ناحیه‌ی رنگ شده رو می‌شه به صورت  $U - A$  معرفی کرد.

در یک کلام

متتم یک مجموعه چیست؟

مجموعه‌ی  $A$  را در نظر بگیرید. به مجموعه‌ی تمام اعضای  $U$  که داخل  $A$  نیستند، متتم مجموعه‌ی  $A$  گفته می‌شود. متتم یک مجموعه را نماد «پریم» مشخص می‌کنیم، یعنی مثلاً می‌نویسیم  $A' = U - A$ . در شکل بالا، ناحیه‌ی رنگ شده، معرف  $A'$  است. همواره داریم  $A' = U - A$ .

مثالاً برای مجموعه‌ی  $A = \{1, 2, 3\}$  با فرض مجموعه‌ی مرجع  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  داریم  $A' = \{4, 5, 6, 7\}$ . توجه کنیم که  $A'$  نمی‌توانه چیزی اضافه بر مجموعه‌ی مرجع داشته باشد؛ چون قرار گذاشتیم تمام مجموعه‌های هامون باید زیرمجموعه‌ی  $U$  باشند.

تمرین ۱ با فرض  $U = \mathbb{N}$  باشد، متتم مجموعه‌ی  $B = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$  را معرفی کنید.

**حل:** توی این تمرین، مجموعه‌ی اعداد طبیعی ( $\mathbb{N}$ )، مجموعه‌ی مرجع هست. مجموعه‌ی  $B$ ، مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج هست:

خب حالا ما علاقه‌مند به اعضا‌ی هستیم که توی مجموعه‌ی  $B$  نیستن! این مجموعه، مجموعه‌ی اعداد فرد هستن:

البته می‌تونستیم از نمایش فشرده‌ی  $B' = \{2k - 1 | k \in \mathbb{N}\}$  هم استفاده کنیم. به زیون دیگه می‌شد گفت:

$$B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} - \{2, 4, 6, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}$$

### چالش

سؤال: چرا مجموعه‌ی اعداد گنگ را با نماد  $\mathbb{Q}'$  نمایش می‌دهند؟

حتماً تا به حال، بارها از این نماد استفاده کرده‌اید ولی شاید به چرا بی استفاده از آن فکر نکرده باشید. مجموعه‌ی اعداد گویا را با  $\mathbb{Q}$  نمایش می‌دادیم و می‌گفتیم «هر عدد حقیقی که گویا نباشد، گنگ است». است یعنی اگر مجموعه‌ی اعداد حقیقی ( $\mathbb{R}$ ) را مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، آن وقت، مجموعه‌ی اعداد گنگ برابر می‌شود با متتم مجموعه‌ی اعداد گویا ( $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$ ) بنابراین از نماد «پریم» برای مجموعه‌ی اعداد گنگ استفاده می‌کنیم.

تمرین ۲ با فرض  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $A = \{1, 2, 3\}$ ، مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا‌یشان معرفی نمایید.

(الف)  $A'$  (ب)  $A - A'$  (ج)  $A \cap A'$  (د)  $A \cup A'$  (ه)  $\phi'$  (و)

**حل:** (الف) می‌دونیم که  $A' = U - A$  پس  $A' = \{4, 5\}$ .



ب) با توجه به  $A' = \{4, 5\}$  می‌شه گفت  $A \cup A' = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . توجه کنین که همون مجموعه‌ی مرتع هست،  $A \cup A' = U$  یعنی  $A \cup A' = U$  شد.

ج) مجموعه‌های  $\{1, 2, 3\}$  و  $\{4, 5\}$  هیچ عضو مشترکی ندارن! پس  $A \cap A' = \emptyset$  می‌شه.

د) با توجه به قسمت قبل، مجموعه‌های  $\{4, 5\}$  دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، پس  $A - A' = A$  هست. به زیون دیگه:

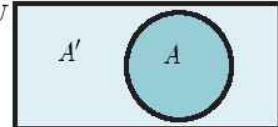
$$A - A' = \{1, 2, 3\} - \{4, 5\} = \{1, 2, 3\} = A$$

ه) با استفاده از تعریف متمم، می‌شه گفت  $U' = U - U$ . به عبارت دیگه،  $U'$  شامل اعضایی از  $U$  هست که داخل  $U$  نیستن!! خب هیچ عضوی با این ویژگی وجود نداره!

و) طبق تعریف داریم  $\phi' = U - \phi = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} = U$ . به عبارت دیگه می‌شه گفت:

ح) اگه قرارداد کنیم  $(A')' = U - K = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{4, 5\} = \{1, 2, 3\}$  اون وقت می‌شه گفت  $(A')' = (K)' = (A)' = K = \{4, 5\}$ ، پس: همون طور که دیدین،  $(A')' = A$  شد!

ویژگی‌های به دست اومده توی این تمرین رو توی جدول زیر، خلاصه کردیم. توی این ویژگی‌ها، از نمودار ون رو به رو استفاده می‌کنیم.



توضیح	ویژگی
به نمودار ون بالا دقت کنین. هر عضوی از $U$ یا داخل دایره‌است یا خارج دایره‌ای یعنی با $A$ قرار داره یا توی $A'$ پس $A \cup A' = U$ می‌شه.	$A \cup A' = U$
باز هم به نمودار ون بالا دقت کنین. مجموعه‌های $A$ و $A'$ دو تا مجموعه‌ی جدا از هم هستن و هیچ اشتراکی با هم ندارن.	$A \cap A' = \emptyset$
قبل‌اً گفته بودیم که اگه $A$ و $B$ دو تا مجموعه‌ی جدا از هم باشن، اون وقت: $A - B = A$ ، $B - A = B$	$A - A' = A$ $A' - A = A'$
با توجه به تعریف متمم، متمم مجموعه‌ی مرتع، مجموعه‌ی مرتع هست.	$U' = \emptyset$
با توجه به تعریف متمم، متمم مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ی تهی مرتع هست.	$\emptyset' = U$
اگه یه مجموعه رو دوبار متمم کنیم، به خودش می‌رسیم.	$(A')' = A$

### «سه ویژگی ترکیبی از متمم»

کار رو با ۲۲ تمرین شروع می‌کنیم.

با فرض  $\{3, 4, 5\} \subset U$ ،  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ، مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا بشان معرفی نمایید.

$$B \cap A' \quad (ا) \quad B - A \quad (ج) \quad A \cap B' \quad (ب) \quad A - B \quad (الف)$$

حل: اولاً داریم  $A' = \{4, 5, 6, 7\}$  و  $B' = \{1, 2, 6, 7\}$  بنابراین:

$$(الف) \quad A - B = \{1, 2\}$$

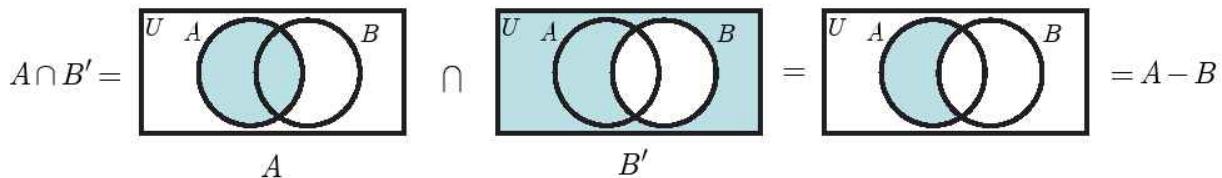
$$(ب) \quad A \cap B' = \{1, 2\}$$



$$c) B - A = \{4, 5\}$$

$$d) B \cap A' = \{4, 5\}$$

همون طور که دیدیم  $B - A = B \cap A'$  و  $A - B = A \cap B'$  شد. و جالب این که این اتفاق همیشه میفته. این موضوع با استفاده از نمودار ون هم قابل توجیه هست. مثلاً برای  $A - B = A \cap B'$  داریم:



با فرض  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ ،  $A \cap B' = \{1, 2\}$  با نوشتن اعضا ایشان معرفی نمایید.

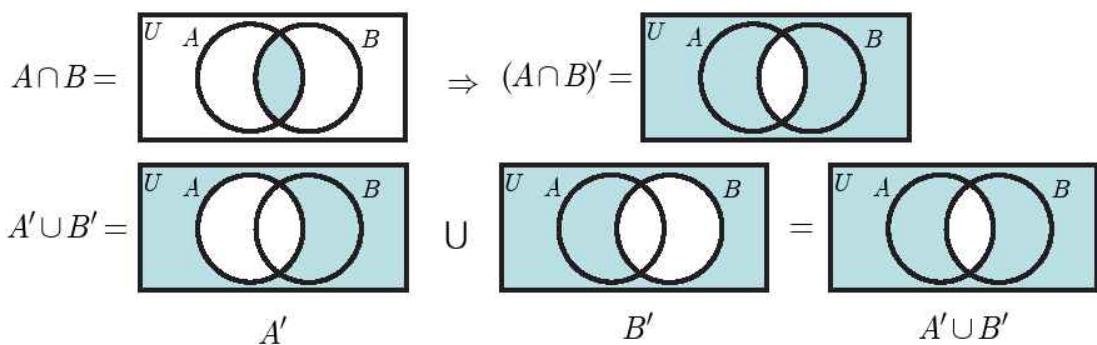
تمرين ۴ (الف)  $A' \cup B'$  (ب)  $(A \cap B)'$

حل: برای پیدا کردن  $(A \cap B)'$  باید اول  $A \cap B$  را حساب کنیم و بعد متمم بگیریم. داریم:

$$a) A \cap B = \{3\} \Rightarrow (A \cap B)' = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$$

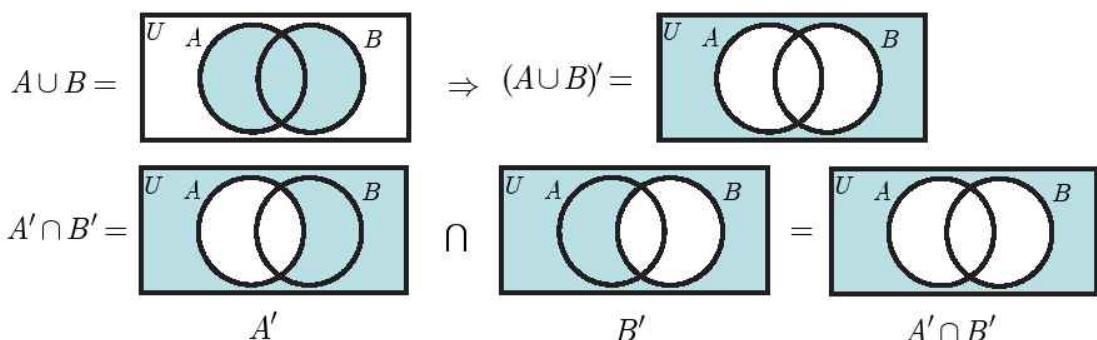
$$b) A' \cup B' = \{4, 5, 6, 7\} \cup \{1, 2, 6, 7\} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$$

باز هم یکی شدن! یعنی  $(A \cap B)' = A' \cup B'$  شد! این موضوع رو میشه با استفاده از نمودار ون هم توجیه کرد:



تمرين ۵ با استفاده از نمودار ون دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  نشان دهید  $(A \cup B)' = A' \cap B'$

حل: به طور کاملاً مشابهی میشه نشون داد که  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  هست! کافیه  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  را به طور جداگونه رسم کنیم و نشون بدیم که با هم برابر هستن!



توضیح	ویژگی
تبديل «منها» به «اشتراك با متمم!»! اين ويزگي خيلي کاربرد دارد!	$A - B = A \cap B'$
علامت پر يم روی پرانتز، به خود مجموعه ها سريات می کنه و جای اجتماع و اشتراك رو هم عوض می کنه! اين ويزگي ها به قوانين دمورگان مشهور هستن.	$B - A = B \cap A'$
	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
	$(A \cup B)' = A' \cap B'$



آگوستوس دمورگان (۱۸۰۶ تا ۱۸۷۱)

ریاضی دان متولد هند و ساکن انگلستان

### «ویژگی توزیع پذیری»

اين ويزگي در كتاب درسي دهم بيان نشده! اما حيقمون اومنو مطرح نکنيم چرا كه سرعت کارمون رو در مقاييسه با نمودار ون بالاتر مى برد. بنابراین حرفاي ها حسابي حواسشون رو جمع کتن! اين ويزگي مثل عمليات ضرب در يك پرانتز شامل جمع یا تفريقي عمل می کنه:

$$a(b \pm c) = ab \pm ac$$

كه در جبر مجموعه ها بهش می گيم "توزيع پذيری" :

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

و زمانی كه برعكس بالا عمل می کنيم بهش می گيم "عكس توزیع پذيری" :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) &= A \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup (A \cap C) &= A \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

كه اين همون کاريده كه در فاكتور گيری انجام مى داديم:

$$ab \pm ac = a(b \pm c)$$

||| تمرین ۶ ||| حاصل عبارت  $(A \cap B)'$  را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

حل: ابتدا  $(A \cap B)'$  را با استفاده از ويزگي دمورگان به صورت  $A' \cup B'$  می نویسیم و سپس از ويزگي توزیع پذيری استفاده می کیم:

$$A \cap (A' \cup B') = (\underbrace{A \cap A'}_{\emptyset}) \cup (A \cap B') = \emptyset \cup (A \cap B') = A \cap B' = A - B$$



## دندان

دندان

- ۱۲- اگر مجموعه‌ی مرجع به صورت  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 5 < x \leq 35\}$  و  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}$  و مجموعه‌های  $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 35\}$  باشند، در این صورت حاصل عبارت‌های داده شده را به دست آورید:

(الف)  $A'$

(ب)  $B'$

(ج)  $(A \cup B)'$

(د)  $(A' \cap B')'$

- ۱۳- اگر  $B - A = B$  باشد، به کمک نمودار ون حاصل  $[B - A] = [(B - A) \cup A'] - [(A \cup B') - B]$  را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

- ۱۴- اگر  $A \cap B = \emptyset$  باشد، به کمک نمودار ون حاصل  $A' \cup B \cap A$  را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

- ۱۵- به کمک ویژگی‌های موجود در جبر مجموعه‌ها و همچنین استفاده از نمودار ون، هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

(الف)  $(A' - B) \cup (B' \cup A)'$

(ب)  $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')]$

(ج)  $[(B' - A) \cup (A' - B)]'$



توی آخرین بخش مجموعه، قراره درباره مطالع مهمی صحبت کنیم، اول تکلیف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی رو روش می‌کنیم و بعد در مورد تعداد اعضای  $A \cup B$  حرف می‌زنیم، با ما همراه باشین ...

### «نمادگذاری»

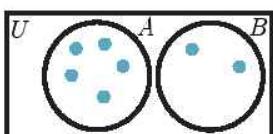
معمولًا از دو نماد برای معرفی کردن تعداد اعضای یه مجموعه استفاده می‌شه ...

تعداد اعضای مجموعه‌ی  $A$  را نماد  $n(A)$  یا  $|A|$  نمایشن می‌دهیم.

البته ما بیشتر از نماد  $n(A)$  استفاده می‌کنیم، مثلاً برای مجموعه‌ی  $\{1, 2, 5, 7\}$  می‌نویسیم  $n(A) = 4$ .

تمرین ۱ برای دو مجموعه‌ی جدا از هم  $A$  و  $B$  می‌دانیم  $n(A \cup B) = 7$  و  $n(A) = 5$ ؛ تعداد اعضای مجموعه‌ی  $B$  را بیابید.

حل: به نمودار ون دو مجموعه‌ی جدا از هم  $A$  و  $B$  دقت کنین. ازون جا که این دو مجموعه هیچ عضوی مشترکی ندارن.



کاملًا واضحه هست که  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  و  $n(A) = 5$  و  $n(A \cup B) = 7$  می‌دانیم  $n(B) = 2$

توجه کنین که رابطه‌ی  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  فقط برای دو مجموعه‌ی جدا از هم برقراره و برای دو مجموعه‌ای که با هم اشتراک دارن در صفحه‌ی بعدی رابطه رو اصلاح کردیم!

### «مجموعه‌های متناهی و نامتناهی»

مجموعه‌ها از نظر تعداد اعضا به دو دسته تقسیم می‌شن.

متناهی: مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن، یک عدد حسابی باشد. مثل مجموعه‌ی  $\{1, 2, 5, 7\}$  یا مجموعه‌ی  $\{\text{صفر عضوی}\}$  و ...

مجموعه‌ها

نامتناهی: مجموعه‌ای که متناهی نباشد! به عبارت دیگر مجموعه‌ای که بینهایت عضو داشته باشد. مثل  $\mathbb{N}$  یا  $\mathbb{R}$  یا ...

مثال‌هایی از مجموعه‌های نامتناهی	مثال‌هایی از مجموعه‌های متناهی
مجموعه‌ی اعداد مضرب ۷، مجموعه‌ی اعداد اول، مجموعه‌ی اعداد طبیعی پنجم رقمی و ...	مجموعه‌ی درختان کره‌ی زمین، مجموعه‌ی گلبلوهای قرمز بدن، مجموعه‌ی اعداد گویا و ...

در ضمن، یه مجموعه‌ی متناهی ممکنه خیلی خیلی بزرگ باشه! مثل مجموعه‌ی  $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 1^{100}\}$  که  $1^{100}$  تا عضو داره ولی باز هم متناهی محسوب می‌شه. راستی تا یاد نرفته این رو هم بگم که

$n(A)$  را فقط برای مجموعه‌های متناهی تعریف می‌کنیم.

یعنی معنی نداره بگی یه مجموعه‌ی نامتناهی چند تا عضو داره! به شخصه از تمرین زیر خوش می‌باد (خیلی زیاد ...).

درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را تعیین نمایید.

- الف) زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی متناهی، قطعاً متناهی است.    ب) زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی نامتناهی، قطعاً نامتناهی است.  
 ج) اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی قطعاً متناهی است.    د) اجتماع دو مجموعه‌ی نامتناهی قطعاً نامتناهی است.  
 ه) اشتراک دو مجموعه‌ی متناهی قطعاً متناهی است.    و) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی قطعاً نامتناهی است.

تمرین ۲

حل: الف) درسته! اصلاً می‌دونین چیه؟! اگه  $B$ ، یک زیرمجموعه‌ی از مجموعه‌ی متناهی  $A$  باشه ( $B \subseteq A$ ) اون موقع حتماً  $n(B) \leq n(A)$  هست.



ب) نه! مثلاً  $\{ \} = A$  یک زیرمجموعه‌ی متناهی از مجموعه‌ی نامتناهی  $N$  هست. البته  $N$  زیرمجموعه‌ی نامتناهی هم دارد، مثلاً:

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

پس این جمله، درستش این شکلی می‌شود:

زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی نامتناهی، ممکن است متناهی و یا نامتناهی باشد.

ج) درسته! دلیل اش هم واضحه. اگه یه مجموعه‌ی مثلاً ۱۰ عضوی رو با یه مجموعه‌ی مثلاً ۲۰ عضوی اجتماع بگیریم، مجموعه‌ی به دست اومده فوق فوچش ۳۰ تا عضو می‌توانه داشته باشه، پس متناهیه.

د) بله! با اجتماع گرفتن، انتظار داریم مجموعه‌مون بزرگ‌تر بشه. پس اجتماع دو مجموعه‌ی نامتناهی حتمن نامتناهی هست.

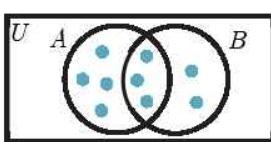
ه) درسته! با اشتراک گرفتن، انتظار داریم مجموعه‌مون کوچیک‌تر بشه. پس اشتراک دو مجموعه‌ی متناهی، حتمن متناهی هست.

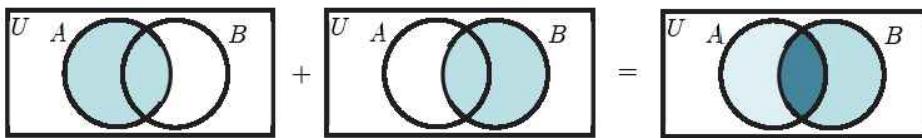
و) غلطه! مثلاً مجموعه‌های اعداد گویا ( $\mathbb{Q}$ ) و اعداد گنگ ( $\mathbb{Q}'$ ) رو در نظر بگیرین. هر دو شون نامتناهی هستن ولی  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$  و تهی یه مجموعه‌ی متناهی هست. البته ممکنه اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی نامتناهی بشه! مثل  $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$ . پس فرم درست جمله‌مون این جوری می‌شود:

اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی ممکن است متناهی و یا نامتناهی باشد.

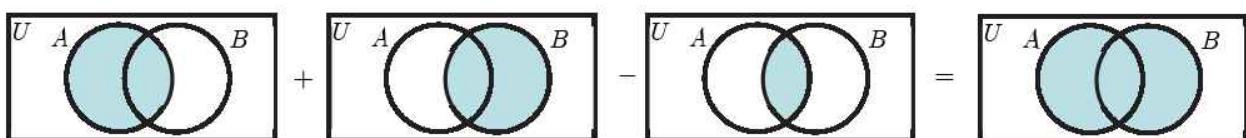
### «تعداد اعضای $A \cup B$

این جا می‌خوایم در مورد تعداد اعضای  $A \cup B$  صحبت کنیم. برای این کار از نمودار ۶ نوبه را کمک می‌گیریم. با توجه به این نمودار می‌تونیم بگیم:

  
 شاید یک نفر در نگاه اول بگه که خب!  $A \cup B$  یعنی اعضای  $A$  و  $B$  رو بریزیم توی یک کیسه! پس باید تعداد اعضای  $A$  رو با هم جمع بزنیم. اما این کار درستی نیست. با انجام این کار، اعضا‌یی که هم توی  $A$  هستن و هم توی  $B$  (یعنی توی  $A \cap B$  دو بار شمرده شن!) نگاه کین:



برای درست کردن این مشکل می‌شه یه کار خیلی ساده انجام داد! مگه اعضای  $A \cap B$  رو ۲ بار شمردین؟! خب اگه یکی از این ۲ بار رو کم کنیم، مسأله حل می‌شه. یعنی این جوری:



جمع‌بندی این که:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

حساب کردن  $n(A \cap B)$ ,  $n(B)$ ,  $n(A)$  و  $n(A \cup B)$  بر حسب

با توجه به رابطه‌ی بالا، واسه مثالی که زدیم می‌تونیم بگیم:

$$n(A \cup B) = \underbrace{n(A)}_{7} + \underbrace{n(B)}_{5} - \underbrace{n(A \cap B)}_{3} \Rightarrow n(A \cup B) = 9$$

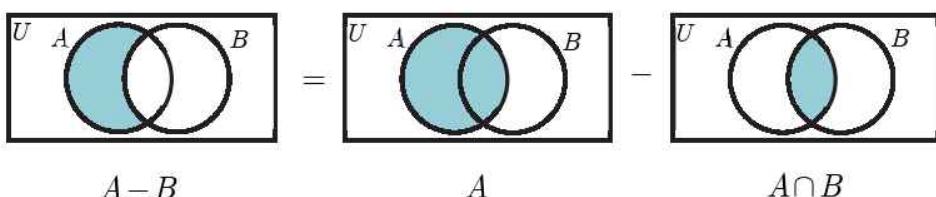


«تعداد اعضاي A - B

باز هم از نمودار ۶ روبه رو استفاده می کنیم. می خوایم  $n(A-B)$  را حساب کنیم.  $n$  یعنی تعداد اعضای مجموعه  $A - B$  می توانیم بگیریم:

$$\text{تعداد اعضای } (A - B) = \text{تعداد اعضای } (A) - \text{تعداد اعضای } (A \cap B)$$

یا به عبارت دیگه می‌توانیم این جوی استدلال کنیم:



$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

حساب کو دن n(A ∩ B) و n(B) و n(A) پر حسب n(B - A) و n(A - B)

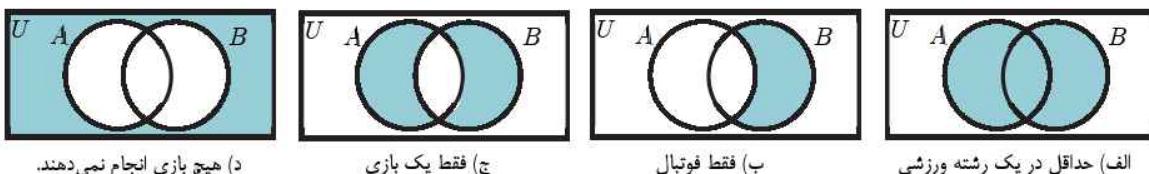
مدرسه‌ای ۱۰۰ دانش‌آموز دارد. می‌دانیم در این مدرسه ۴۰ نفر والبیال و ۷۰ نفر فوتبال بازی می‌کنند. اگر ۱۵ نفر هر دو ورزش را انجام دهند،

الف) حداقل در یکی از رشته‌ها بازی می‌کنند؟  
ج) فقط یک بازی را انجام می‌دهند؟

ب) فقط فوتبال بازی می‌کنند؟  
د) هیچ بازی انجام نمی‌دهند؟

تمہارے

**حل:** فرض کنیم والیبالی‌ها رو توانی مجموعه‌ی  $A$  و فوتbalی‌ها رو توانی مجموعه‌ی  $B$  قرار بدم. مجموعه‌ی مرجع  $U$  هم نشونده‌ی هر ۱۰۰ دانش‌آموز هست. قسمت‌های این تمرین، معادل نواحی زیر در نمودار ون هستند:



د) هیچ بازی انجام نمی دهند.

الف) با توجه به شکل بالا باید  $(A \cup B)^n$  را حساب کنیم. طبق نکته‌ای که تازه پادگفتیم، می‌توانیم بگوییم:

$$n(A \cup B) = \underbrace{n(A)}_{\text{هاليل}} + \underbrace{n(B)}_{\text{فوتبال}} - \underbrace{n(A \cap B)}_{\text{هربو}} = ٤٠ + ٧٠ - ١٥ = ٩٥$$

$$n(B - A) = n(B) - \underbrace{n(A \cap B)}_{\text{مُشَبِّه}} = 70 - 15 = 55$$

ب) باید  $n(B - A)$  رو حساب کنیم. می‌نویسیم:

(۷) اگر به ناحیه‌ی مشخص، شده در شکل، بالا دقیق کنیم، متنعه‌هه می‌شون، که باشد  $(A - B) + n(B - A) = n(A - B)$ ، حساب کنیم. دارایم:

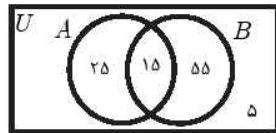
$$n(A - B) = \underbrace{n(A)}_{\text{all } A} - \underbrace{n(A \cap B)}_{A \subset B} = 40 - 15 = 25 \quad \Rightarrow \quad n(A - B) + n(B - A) = 25 + 15 = 40.$$

د) با توجه به شکل بالا، باید  $n(U) - n(A \cup B)$  را حساب کنیم. این هم کار آسونیه:

$$n(U) - n(A \cup B) = 100 - 98 = 2$$



این هم نمودار و نهایی مساله:



## ۲۵ دنده

نمودار  
نهایی

- ۱۶- دو مجموعه‌ی نامتناهی مثال بزنید که یکی از آن‌ها دقیقاً دو عضو از دیگری بیشتر داشته باشد.
- ۱۷- متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص نماید.
- ۱۸- فرض کنید  $A$  مجموعه‌ای متناهی و  $B$  و  $C$  دو مجموعه‌ی نامتناهی باشند. در این صورت وضعیت متناهی یا نامتناهی بودن (و یا عدم قطعیت) هر یک از مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.
- (الف)  $\mathbb{W} - \mathbb{N}$       (ب)  $\mathbb{N} - \mathbb{W}$       (ج)  $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$       (د)  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$
- ۱۹- اگر  $(A - B) \cup (B - A)$  مجموعه‌ای نامتناهی باشد، در این صورت وضعیت متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را معین کنید.
- (الف)  $A - B$       (ب)  $A \cap B$
- ۲۰- همه‌ی ۱۵۰ دانشآموز پایه‌ی دهم مدرسه‌ای اهل فوتبال یا والیبال هستند. اگر بدانیم ۱۰۵ نفر آن‌ها فوتبال و ۸۰ نفر آن‌ها والیبال بازی می‌کنند، در این صورت:
- الف) چند نفر در هر دو رشته بازی می‌کنند؟  
ب) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟
- ۲۱- اگر بدانیم مجموعه‌های  $A$  و  $B$  به ترتیب ۱۷ و ۲۰ عضو دارند و همچنین  $n(A \cap B) = ۱۰$  باشد، مجموعه‌ی  $(A - B) \cup (B - A)$  چند عضو دارد؟



بازه‌ها، نوع خاصی از مجموعه‌ها هستند که به دلیل اهمیت زیادشون، هم واسشون اسم گذاشتند، هم جدایگونه بررسی شدند! امان از این اهمیت زیاد ...

### » بازه چیست؟

به مجموعه‌ی  $A = \{x | x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 5\}$  دقت کنید. این مجموعه رو می‌شه به زیون فارسی، این جوری توضیح داد:

« مجموعه‌ی  $A$  شامل تمام اعداد حقیقی بین ۲ و ۵ (به همراه خود ۲ و ۵) است. »

از اونجا که مجموعه‌ای مثل  $A$  توی ریاضی خیلی مورد استفاده قرار می‌گیره، اون رو با نماد مختصر  $[2, 5]$  نمایش می‌دان و بهش می‌گن بازه‌ا!

### در یک کلام

### بازه چیست؟

بازه زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص است. به طور مثال بازه‌ی  $[-3, 7]$  یعنی تمام اعداد

حقیقی بین -۳ و ۷ (به همراه -۳ و ۷). یا به عبارت دیگر می‌توان گفت:  $[-3, 7] = \{x | x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 7\}$

در یک بازه، همواره عدد کوچکتر را سمت چپ می‌نویسند، یعنی وقتی می‌نویسیم  $[a, b]$  یعنی حتماً  $a \leq b$ .

نمایش دادن بازه روی محور اعداد حقیقی، کار خوب و خدا پستانده‌ای محسوب می‌شه. مثلاً می‌تونیم بازه‌ی  $[2, 5]$  رو به صورت زیر نمایش بدیم:



### » انواع بازه‌ها

یه بار دیگه به جمله‌ی بُلد شده‌ی قسمت قبل توجه کنین. کدوم قسمتاش حساس‌تون می‌کنه؟! بله! « به همراه خود ۲ و ۵! » خب شاید نخوایم خود ۲ و ۵ توی بازه‌مون باشیم! به عبارت دیگه، سؤال اینه که چه‌جوری باید  $A = \{x | x \in \mathbb{R}, 2 < x < 5\}$  رو به صورت بازه نمایش داد؟ برای گرفتن جواب این سؤال، می‌تونین به جدول زیر مراجعه کنین ...

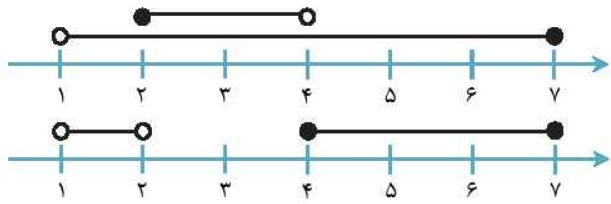
نمودار	توضیح	توصیف ریاضی	نمایش	عنوان
	خود $a$ و $b$ هم هستند.	$\{x   x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بازه‌ی بسته
	نه $a$ هست و نه $b$ .	$\{x   x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	$(a, b)$	بازه‌ی باز
	نیست ولی $b$ هست.	$\{x   x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	$(a, b]$	بازه‌ی نیم‌باز
	نیست ولی $a$ هست.	$\{x   x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	$[a, b)$	

خلاص کلام این که اگه  $["]$  بود یعنی هست و اگه  $(")$  بود یعنی نیست!

تمرين ۱ حاصل  $(2, 7] - [1, 4)$  را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

حل: واسه حل کردن این جور مسائل، خیلی خوبه که نمودار بازه‌ها رو رسم کنین. این کار رو برای دو بازه  $[1, 4)$  و  $(2, 7]$  انجام می‌ديه:





اعداد بین «۲» تا «۴» باید از بازه‌ی  $[1, 7]$  حذف بشن. اما نکته‌ی مهم سر خود اعداد «۲» و «۴» هست! از اون جا که «۲» توی بازه‌ی  $[2, 4]$  قراره داره پس باید حذف بشه. اما عدد «۴» توی بازه‌ی  $(2, 4)$  نیست پس نباید بهش دست بزنیم. با توجه به شکل رویه‌رو، جواب مساله‌مون این جوری می‌شه:

$$(1, 7) - [2, 4] = (1, 2) \cup [4, 7]$$

### طول بازه

فکر می‌کنین طول بازه‌ی  $[2, 7]$  چه قدر باشه؟! خب معلومه دیگه!  $5 - 2 = 7 - 2$

طول بازه

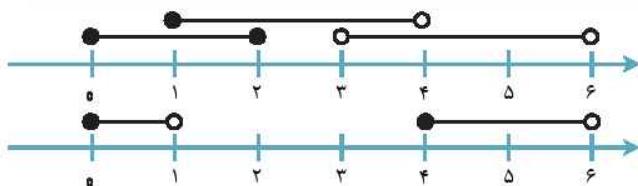
در یک کلام

طول تمامی بازه‌های  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  و  $(a, b)$  برابر است با  $b - a$ . توجه کنید که طول یک بازه همواره عددی نامنفی است.

توجه کنید که باز یا بسته بودن اول و آخر بازه، هیچ تأثیری روی طول آن ندارد.

تا یادم نرفته این رو هم بگم که یک بازه، یه مجموعه‌ی نامتناهی. پس معنی نداره بگیم فلان بازه، چند عضو داره! البته این حرف من به استثناء داره و اون هم بازه‌ای مثل  $[5, 5]$  هست! این بازه در واقع فقط از یه نقطه تشکیل شده! یعنی یه مجموعه‌ی تک عضوی که خب متناهی هم هست.

### تمرین ۲ طول مجموعه‌ی $(1, 4) - [3, 6] \cup [0, 2]$ را روی محور اعداد حقیقی بیابید.



**حل:** باز هم خیلی خوبه که از رسم شکل استفاده کنیم. اما توجه کنین که دیگه  $(3, 6) \cup [0, 2]$  خیلی ساده‌است (یعنی از  $0$  تا  $2$  و از  $3$  تا  $6$ ) و یه ضرب رسم‌اش می‌کنیم. باز هم باید دقیق و بیزه به اول و آخر بازه‌ها داشته باشیم. «» که توپر هست چون کسی کاری بهش نداره. «ع» هم که از اول توخالی بود. «۴» توپر هست چون  $(1, 4)$  خودش «۴» نداره که بخود حذف‌اش کنه. ولی «۱» توخالیه چون  $(4, 1)$  رو داره و حذف‌اش می‌کنه. البته توجه کنین که توی این مسئله، طول بازه مدنظر بود و پر یا خالی بودن تأثیری توی طول بازه نداره! ولی خب باید حواس‌تون جمع باشه! با توجه به شکل رویه‌رو، طول بازه‌ی  $(1, 4) - [3, 6] \cup [0, 2]$  برابر با  $3$  هست.

### بازه‌های بی‌کران

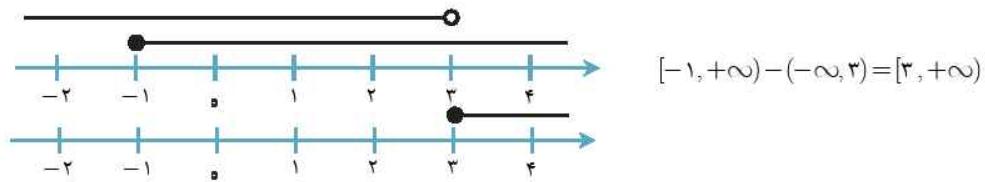
این بحث بازه که مطرح شد، یکی او مدد گفت حالا مجموعه‌ی  $\{x | x \in \mathbb{R}, 4 \leq x\}$  رو چه‌جوری به صورت بازه‌ای بنویسیم؟! فرق این مجموعه با قبلی‌ها اینه که از یک سمت، تا بینهایت میره. جدول زیر رو برای جواب دادن به این سؤال مهم نوشتمیم ...

نمودار	توضیح	توصیف ریاضی	نمایش	عنوان
	خود $a$ هست.	$\{x   x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$	$[a, +\infty)$	یکسر بی‌کران
	خود $a$ نیست.	$\{x   x \in \mathbb{R}, a < x\}$	$(a, +\infty)$	
	خود $b$ هست.	$\{x   x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
	خود $b$ نیست.	$\{x   x \in \mathbb{R}, x < b\}$	$(-\infty, b)$	
	این بازه در واقع همون مجموعه‌ی اعداد حقیقی!	$\mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$	دو سر بی‌کران



### تمرین ۳ مجموعه $(-\infty, 3) - (-1, +\infty)$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

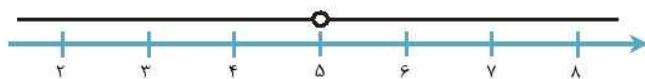
حل: مطابق شکل رو به رو داریم:



$$[-1, +\infty) - (-\infty, 3) = [3, +\infty)$$

### تمرین ۴ مجموعه $\{5\} - \mathbb{R}$ را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

حل: نمودار این مجموعه رو این شکلی نشون می‌دیم:



این مجموعه رو می‌شه این مدلی هم بیان کرد:

$$(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$$

### چالش

سؤال: چرا همیشه برای  $+\infty$  یا  $-\infty$  از نماد بازه‌ی باز استفاده می‌کنیم؟ آیا نماد  $[1, +\infty)$  اشکال دارد؟! کاملاً اشکال داره! همیشه باید بینهایت‌ها رو با نماد بازه‌ی باز استفاده کنیم. دلیل اش هم اینه که  $\infty$  اصلاً یه عدد حقیقی نیست!  $[\infty, +1]$  یعنی بازه‌ای که خود بینهایت رو هم شامل می‌شه و این کاملاً غلطه! درست اش این شکلی می‌شه:  $(-\infty, +1]$

## ۲۵ دندان

۲۲- حاصل عبارات زیر را به صورت بازه‌ای بنویسید.

الف)  $[-2, +\infty) - [5, 8]$

ب)  $([-1, 7] \cup (-3, 5)) - [0, +\infty)$

ج)  $\{x | x \in \mathbb{R}, x \geq -2\} - \{x | x \in \mathbb{R}, 5 \leq x \leq 9\}$

۲۳- اگر داشته باشیم:

$$A = \{x | x \in \mathbb{R}, x < -5\}$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq -2\}$$

$$C = \left\{x | x \in \mathbb{R}, -\frac{7}{5} < x \leq \frac{15}{4}\right\}$$

$$D = \left\{x | x \in \mathbb{R}, -\frac{8}{7} < x < \frac{16}{5}\right\}$$

حاصل هر یک از عبارات زیر را به صورت بازه‌ای بنویسید.

الف)  $A \cap B$

ب)  $A \cap B \cap C$

ج)  $C \cup D$

د)  $C \cap D$

ه)  $C \cup (A \cap D)$

و)  $B - C$



## پاسخ تشریحی

### دندنه ۲

### فصل ۱

(قسمت اول)

- داریم:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \emptyset\}$$

$\therefore$  - مجموعه‌ی  $\{1, b, b^2\}$  دارای عضو «۱» هست. بنابراین این عضو باید توی

مجموعه‌ی  $\{a, a^2\}$  دیده بشه. دو تا وضعیت مختلف ممکنه پیش بیاد

وضعیت اول:  $a = 1$  باشد

$$a=1 \Rightarrow \{a, a^2\} = \{1, 1\} = \{\} \Rightarrow \{1, b, b^2\} = \{\}$$

$$\Rightarrow b=1$$

وضعیت دوم:  $a = -1$  باشد

$$a=-1 \Rightarrow \{a, a^2\} = \{-1, 1\} \Rightarrow \{1, b, b^2\} = \{-1, 1\}$$

$$\Rightarrow b=-1$$

بنابراین دو تا جواب مختلف داریم:  $a=b=1$  و  $a=b=-1$

$\therefore$  - مجموعه‌ی  $B \cap C$  از مجموعه‌ی  $B$  کوچکتره یا مساویه اونه. از طرفی

مجموعه‌ی  $A \cup B$  بزرگتر یا مساوی مجموعه‌ی  $B$  هست. حالا که تساوی

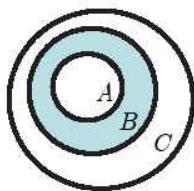
: برقرار شده می‌شه نتیجه گرفت که:  $A \cup B = B \cap C$

$$\left. \begin{array}{l} A \cup B = B \\ B \cap C = B \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B = B \cap C$$

حالا می‌شه رابطه‌ی بین مجموعه‌ها رو این‌جوری بیان کرد:

$$\left. \begin{array}{l} A \cup B = B \\ B \cap C = B \end{array} \right\} \Rightarrow A \subseteq B$$

این هم از نمودار ون:



- الف) بله!  $A \cup B$  شامل تمام اعضای  $B$  هست در صورتی که مجموعه

فاقد تمام اعضای  $B$  هست! حالا که این دو مجموعه مساوی شدن،

می‌شه نتیجه گرفت که  $B$  نمی‌تونه هیچ عضوی داشته باشه و این یعنی

$$B = \emptyset$$

ب) نه! مثال نقض می‌زنیم:

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}, C = \{3\}$$

$$\left. \begin{array}{l} A - B = \{1, 2\} \\ A - C = \{1, 2\} \end{array} \right\} \Rightarrow A - B = A - C$$

$$\therefore B \neq C$$

ولی

- ۳) نادرست

ب) نادرست

ج) مثالی می‌زنیم که این گزاره رو رد کنه (مثال نقض):

$$C = \{1, 2, \{3, 4\}\}$$

$$B = \{3, 4\}, \quad A = \{3\}$$

$$B \in C, \quad A \subseteq B \Rightarrow A \notin C$$

پس  $A \in C$  نادرست هست.

د) اگر  $\{y, \{x\}\}$  و  $A = \{x\}$  باشه، در این صورت  $A \in B$  و همچنین

$x \in A$  می‌شه ولی  $x \notin B$ ، بنابراین  $x \in B$  نادرست هست.

- ۴) تمام زیرمجموعه‌های  $B$  رو می‌نویسیم و اون‌ها رو در مجموعه‌ای به نام

مجموعه‌ی  $C$  قرار می‌دمیم:

الف) درسته! نگاه کنین:

$$\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \emptyset\}$$

ب) درسته! دلیل:

$$\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \emptyset\}$$

ج) این هم درسته:

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \emptyset\}$$



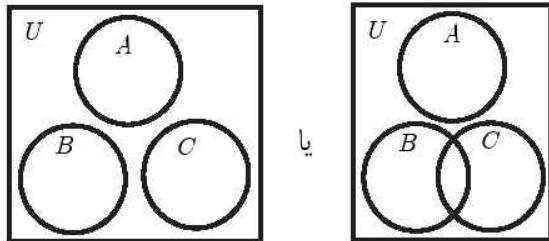
با توجه به یکسان شدن نمودارهای ون، (نمودارهای سمت راست) نتیجه می‌گیریم که  $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$

$$B = \{\mathfrak{f}, \mathfrak{d}\} \quad \Rightarrow \quad A = \left\{ \mathfrak{f}, \mathfrak{d}, \{\mathfrak{f}, \mathfrak{d}\} \right\}$$

بنابراین همهٔ موارد به جز ب و ج درست هستند.

- شرط ۱۱-  $A \cap B = A \cap C = \emptyset$  یعنی مجموعه‌های  $B$  و  $C$  باید خارج

از مجموعه  $A$  باشن. البته خود  $B$  و  $C$  می‌تون با هم اشتراک داشته باشند  
و یا اشتراک نداشته باشند. بنابراین:



$$U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 35\} \quad \text{داریم: ۱۲ -}$$

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 9\} \quad , \quad B = \{6, 7, 8, \dots, 15\}$$

$$\text{الـ} A' = \{10, 11, 12, \dots, 35\}$$

$$\text{c)} B' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

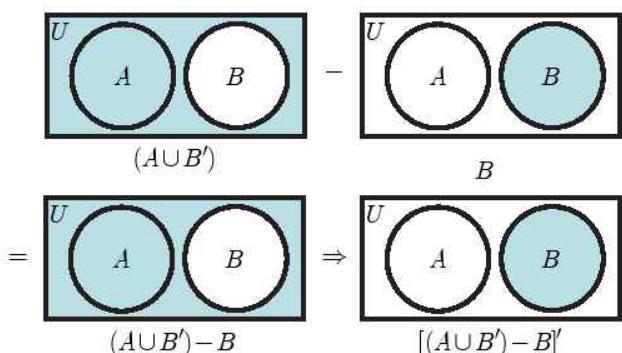
$$\text{c)} A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 35\} = U \quad \Rightarrow \quad (A \cup B)' = U' = \emptyset$$

$$\Rightarrow (A' \cap B')' = \emptyset' = U$$

۱۳- از این که  $B - A = B$  نتیجه می‌گیریم که  $A \cap B = \emptyset$ ، پس:

$$\begin{aligned} [(B-A) \cup A']' - [(A \cup B') - B]' &= (B \cup A')' - [(A \cup B') - B]' \\ &= (A \cap B') - [(A \cup B') - B]' = (A-B) - [(A \cup B') - B]' \\ &= A - [(A \cup B') - B'] \end{aligned}$$

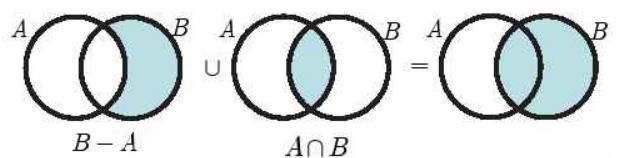
حالا برای ساده‌سازی  $(A \cup B') - B'$  از نمودار ۶ استفاده می‌کنیم:



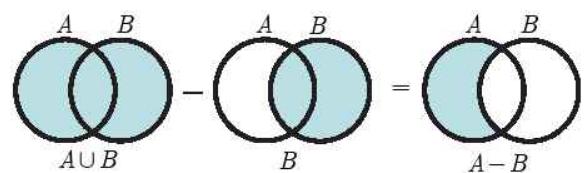
با توجه به نمودار بالا،  $[(A \cup B') - B]' = B$  هست و داریم:

$$A - [(A \cup B') - B]' = A - B = A$$

-۸- از نمودار ون دو مجموعه استفاده می کنیم:

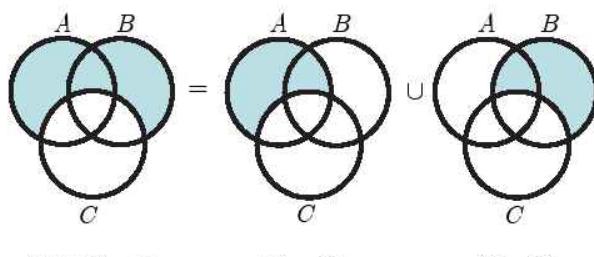


۹-الف) درسته!



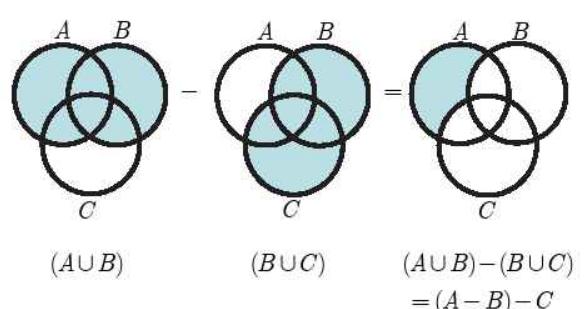
$$(A \cup B) - B = A - B$$

ب) درسته!

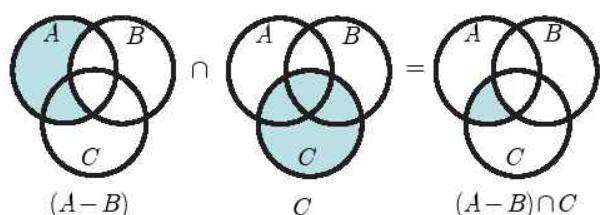


$$(A \cup B) - C \quad (A - C)$$

6



د) درسته!



$$\text{Diagram illustrating } A - B = (A \cap C) - B$$

The diagram shows three overlapping circles labeled A, B, and C. The intersection of A and B is shaded light blue. In the first part, the intersection of A and C is also shaded light blue. In the second part, the intersection of A and C is shaded light blue, while the intersection of B and C is unshaded. In the third part, only the intersection of A and C is shaded light blue.

ج) می دونیم که  $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$  و  $\mathbb{Q}$  هم به مجموعه نامتناهی.

د) این مجموعه هم نامتناهی.

**۱۸-الف)** مجموعه  $C - A$  که حتماً نامتناهی. پس سؤال اینه که تفاضل دو تا مجموعه نامتناهی چه جوره؟! قبلاً دیدیم که این مجموعه هم می تونه متناهی و هم می تونه نامتناهی باشه. پس به طور حتمی نمی شه حکم داد.

ب) باز هم نمی شه گفت  $B - C$  چه جور مجموعه ایه. هم می تونه متناهی باشه و هم می تونه نامتناهی باشه. مجموعه  $A \cup (B - C)$  هم همین وضعیت رو داره؛ یعنی نمی شه حکم قطعی در موردش داد.

**۱۹-الف)** وقتی  $(A - B) \cup (B - A)$  نامتناهی باشه، می شه نتیجه گرفت که حداقل یکی از مجموعه های  $(A - B)$  یا  $(B - A)$  نامتناهی هستن. بنابراین مجموعه  $(A - B)$  هم می تونه متناهی و هم می تونه نامتناهی باشه.

ب) در مورد  $A \cap B$  هم داستان همینه! یعنی هم می تونه متناهی باشه و هم نامتناهی. این هم از مثال:

$$A = \{\}, \quad B = \mathbb{R} \Rightarrow A \cap B = \{\}$$

$$A = \mathbb{N}, \quad B = \mathbb{R} \Rightarrow A \cap B = \mathbb{N}$$

**۲۰-** مجموعه  $A$  رو به فوتیالی ها و مجموعه  $B$  رو به والیالی ها اختصاص  $n(A) = ۱۰۵$ ,  $n(B) = ۸۰$ ,  $n(A \cup B) = ۱۵۰$  می دیم:

الف) هر دو وزش را انجام می دهند یعنی  $A \cap B$ ، پس:

$$\underbrace{n(A \cup B)}_{۱۵۰} = \underbrace{n(A)}_{۱۰۵} + \underbrace{n(B)}_{۸۰} - \underbrace{n(A \cap B)}_{۳۵} \Rightarrow n(A \cap B) = ۳۵$$

ب) فقط در یک رشته بازی می کنند یعنی  $(A - B) \cup (B - A)$ ، پس:

$$n[(A - B) \cup (B - A)] = n(A - B) + n(B - A)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۱۰۵ - ۳۵ = ۷۰ \quad \text{از طرفی:}$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = ۸۰ - ۳۵ = ۴۵$$

بنابراین:

$$n(A - B) + n(B - A) = ۷۰ + ۴۵ = ۱۱۵$$

یه راه دیگه هم داشتیم:

$$n[(A - B) \cup (B - A)] = n(A \cup B) - n(A \cap B)$$

$$= ۱۵۰ - ۳۵ = ۱۱۵$$

- داریم:

$$n[(A - B) \cup (B - A)] = n(A - B) + n(B - A)$$

از طرفی:

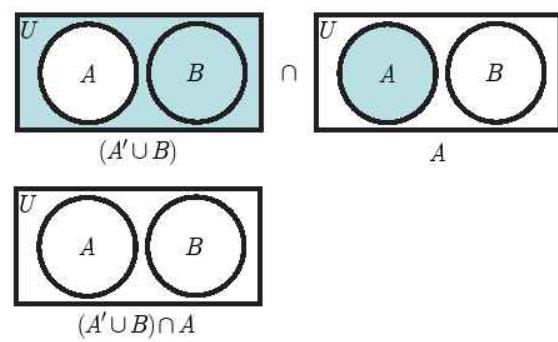
$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۱۷ - ۱۰ = ۷$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = ۲۰ - ۱۰ = ۱۰$$

بنابراین:

$$n(A - B) + n(B - A) = ۷ + ۱۰ = ۱۷$$

۱۴- با توجه به نمودارهای ون زیر داریم  $(A' \cup B) \cap A = \emptyset$



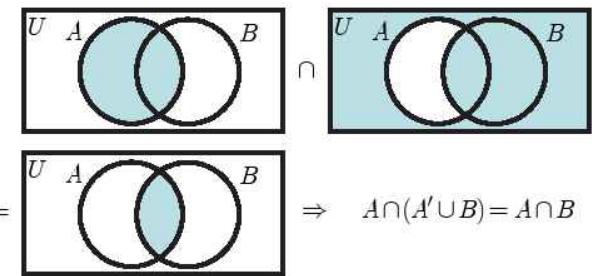
**۱۵-الف)** اول میایم عبارت داده شده رو با استفاده از قواعد جبر مجموعه ها ساده  $(A' - B) \cup (B' \cup A)' = (A' \cap B') \cup (B \cap A')$  می کنیم:

$$= \underline{(A' \cap B')} \cup \underline{(A' \cap B)} = A' \cap (B' \cup B) = A' \cap U = A'$$

عكس توزیع پذیری

حرف های بالا رو می شد به کمک نمودار ون هم زد.

ب) به کمک نمودار ون می شه  $A \cap (A' \cup B)$  رو ساده کرد



این ساده سازی رو می شد به کمک جبر مجموعه ها هم انجام داد. حالا نوبت به ساده سازی  $B \cap (A' \cup B')$  می رسه:

$$\underbrace{B \cap (A' \cup B')}_{\text{توزیع پذیری}} = (B \cap A') \cup (B \cap B') = (B \cap A') \cup \emptyset = B \cap A'$$

حالا داریم:

$$[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = \underline{(B \cap A)} \cup \underline{(B \cap A')}$$

عكس توزیع پذیری

$$= B \cap (A \cup A') = B \cap U = B$$

$$[(B' - A) \cup (A' - B)] = [(B' \cap A') \cup (A' \cap B')] \quad \text{از طرفی (B' \cap A') هست پس:}$$

$$[(B' \cap A') \cup (A' \cap B')] = (A' \cap B')' = A \cup B$$

۱۶- مثال های خیلی زیادی می شه زد. یه نمونه اش اینه:

$$A = \mathbb{N} \cup \{-1, -2\}, \quad B = \mathbb{N}$$

**۱۷-الف)** داریم  $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ , بنابراین، این مجموعه متناهی.

**ب)** داریم  $\mathbb{N} - \mathbb{W} = \emptyset$  و تهی هم به مجموعه متناهی.



$$\text{الف) } [2, +\infty) - [5, 8] = [2, 5) \cup (8, +\infty)$$

$$\text{ب) } (([-1, 4) \cup (-3, 5)) - [0, +\infty) = (-3, 4) - [0, +\infty) = (-3, 0)$$

$$\text{ج) } [-2, +\infty) - [5, 9] = [-2, 5) \cup (9, +\infty)$$

برای فهم بهتر روابط بالا، می‌توانیم نمودار بازه‌ها رو هم رسم کنیم. ولی خوب این محاسبات، چیزی که می‌شه ذهنی هم انجام‌اش داد!

$$A = (-\infty, -5) \quad B = [-2, +\infty) \quad C = \left(-\frac{7}{5}, \frac{15}{4}\right] \quad \text{داریم: ۲۳}$$

$$D = \left(-\frac{1}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

$$\text{الف) } A \cap B = \emptyset \quad \text{حال:}$$

$$\text{ب) } A \cap B \cap C = \emptyset$$

$$\text{ج) } C \cup D = \left(-\frac{7}{5}, \frac{15}{4}\right]$$

$$\text{د) } C \cap D = \left(-\frac{1}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

$$\text{ه) } C \cup (A \cap D) = \left(-\frac{7}{5}, \frac{15}{4}\right]$$

$$\text{و) } B - C = [-2, -\frac{7}{5}] \cup (\frac{15}{4}, +\infty)$$



## تمرین‌های فصل ۱

(قسمت اول)

آنچه گذشت ...



۱- مجموعه‌های زیر را نوشت اعضا مشخص کنید.

$$A = \{(-1)^x \times 2^{x+y} \mid x, y \in \mathbb{N}, x+y=4\}$$

۲- اگر مجموعه‌ی  $A = \{2, \{2\}, \emptyset\}$  باشد و مجموعه‌ی  $B$ ، مجموعه‌ی

زیرمجموعه‌های  $A$  باشد، درستی یا نادرستی هر یک از روابط زیر را تعیین کنید.

(الف)  $A \in B$

(ب)  $A \subseteq B$

(ج)  $\{2\} \in B$

(د)  $\{2\} \subseteq B$

(ه)  $\emptyset \in B$

(و)  $\{\{2\}\} \subseteq B$

$$B = \left\{ \frac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 1 \right\}$$

۳- مجموعه‌های  $C = \{D\}$  و  $B = \{C, D\}$ ،  $A = \{B, C, D\}$  را در نظر

پنجه‌ید و درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

(الف)  $\{D\} \in A$

(ب)  $\{D\} \subseteq A$

(ج)  $\{D, \{D\}\} \in A$

(د)  $\{D, \{D\}\} \subseteq A$

$$C = \{3y+1 \mid y \in \mathbb{Z}, y=2k+1, k \in \mathbb{N}, y < 20\}$$

۴- مجموعه‌های زیر را به صورت فشرده نمایش دهید.

$$A = \{0, 2, 6, 12, 20, 30, \dots\}$$

$$B = \{-1, 1, 7, 25, 79, \dots\}$$

$$C = \{9, 99, 999, \dots\}$$

$$D = \left\{ \frac{1}{7}, \frac{3}{11}, \frac{9}{15}, \frac{27}{19}, \dots \right\}$$

۲۸

۵- درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

(الف)  $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$

(ب)  $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

(ج)  $\{a\} \in \{\{a, b\}, a\}$

(د) اگر  $x \in A$ ،  $A \notin B \rightarrow x \notin B$

(ه)  $A \subseteq B \subseteq \emptyset \rightarrow B \subseteq A$

۶- مجموعه‌های  $A \subseteq B$  و  $A \in B$  را طوری معرفی کنید که  $A$  باشد.

۷-  $E = \{v, \wedge, E\}$  یک مجموعه‌ی ۳ عضوی است و همچنین

است. اگر مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های  $E$  و  $F$  را به ترتیب

بنامیم، آن‌گاه تعداد اعضای مجموعه‌های  $M-N$  و  $M \cup N$  را تعیین کنید.

۸-  $B=C$  باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت  $A \cup B = A \cup C$  اگر

۹- مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  را طوری مثال بزنید که هر سه شرط  $A \in B$ ،  $B \subseteq C$  و  $A \subseteq B$  برقرار باشند.

۱۰-  $B-A=C-A$  و  $A-B=A-C$  باشد، آیا می‌توان نتیجه

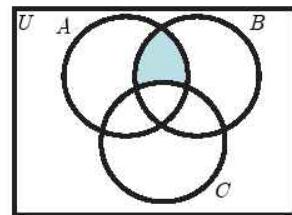
۱۱-  $B=C$  گرفت



ب)  $A - (B - (A \cap B))$

۱۳- مجموعه‌ی متناظر با هر یک از نواحی زیر را بر حسب مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  بنویسید.

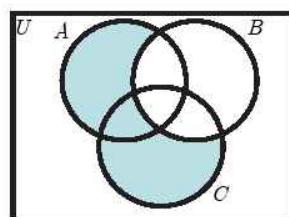
ج)  $[(A \cap B) - C] - (A \cup B)$



(الف)

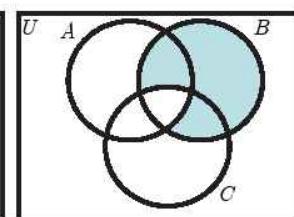
۱۴- با استفاده از نمودار، درستی یا نادرستی هر یک از روابط زیر را تعیین کنید.

الف)  $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$



(ق)

ب)  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$



(ب)

۱۴- برای عبارت  $[(A - B) - C] \cup C$  نمودار ون رسم کنید.

ج)  $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$

د)  $A - (B \cup C) = (A - B) - C$

۱۵- نمودار ون مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  را به گونه‌ای رسم کنید که  $B \cap C = \emptyset$  و  $A \subseteq B$  باشد.

ه)  $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$

۱۶- نمودار ون مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  را طوری رسم کنید که  $A \cap B \cap C = \emptyset$  باشد.

متهم یک مجموعه



۱۹- نمودار ون  $(A \cap B \cap C)'$  و  $(A \cup B \cup C)'$  را رسم کنید.

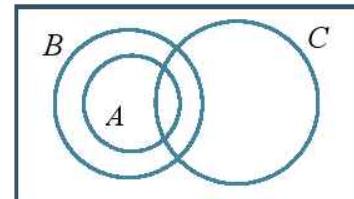
۱۷- با استفاده از نمودار ون، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف)  $(A \cap B \cap C) \cup (C - A) \cup (C - B)$



ج)  $[(B-A)' - A']'$

-۲۰- نمودار ون سه مجموعه‌ی  $A$ ،  $B$  و  $C$  در شکل زیر رسم شده است.  
حاصل  $A \cap (B-C) \cap (A \cap B \cap C)'$  را روی این نمودار مشخص کنید.



د)  $(A-B)' \cap (A \cup B) \cap A'$

ه)  $[(\emptyset - A)' \cap (A - \emptyset)']' \cap [(\emptyset \cup A') - (A' \cap \emptyset)']$

-۲۱- اگر  $B = \{x | x \in U, x \leq 20\}$  و  $A = \{x | x \in U, x \leq 10\}$  باشد  $B$  را یک مجموعه‌ی مرجع دلخواه در نظر بگیریم، درستی یا نادرستی هر  $U$  را یک مجموعه‌ی مرجع دلخواه در نظر بگیریم، درستی یا نادرستی هر یک از روابط زیر را تعیین کنید.

(الف)  $A' \cup B' = A'$

و)  $[(A \cup U')' \cap A]' - [(A \cup U')' - A]'$

(ب)  $A' - B' = B - A$

(ج)  $(A \cup B') - B = B'$

### تعداد اعضای مجموعه



-۲۵- در خصوص متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر، بحث کنید.

(الف)  $\mathbb{R} - \mathbb{W}$

(ب)  $\mathbb{W} - \mathbb{R}$

(ج)  $\mathbb{R} \cap \mathbb{W}$

(د)  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}'$

-۲۶- فرض کنید  $A$  مجموعه‌ای متناهی و مجموعه‌های  $B$  و  $C$  نامتناهی باشند. در این صورت وضعیت متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.

(الف)  $B - (A - C)$

(ب)  $(A \cap C) - B$

-۲۷- اگر  $(A - B) \cup (B - A)$  مجموعه‌ای نامتناهی باشد، وضعیت متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را تعیین نمایید.

(الف)  $B - A$

(ب)  $A \cup B$

-۲۸- برای دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  می‌دانیم

$n(A \cup B) = 3n(A) = 4n(B)$

اگر  $n(A \cap B) = 5$  باشد، تعداد اعضای مجموعه‌ی  $A$  را بیابید.

-۲۲- اگر  $A \cap B = A$  باشد، درستی یا نادرستی هر یک از روابط زیر را تعیین کنید.

(الف)  $A \subseteq B$

(ب)  $B' \subseteq A'$

(ج)  $A \cap B' = A'$

(د)  $A \cap B' = \emptyset$

-۲۳- اگر  $A \cup B' = \emptyset$  باشد، درستی یا نادرستی هر یک از روابط زیر را تعیین کنید.

(الف)  $A' = B'$

(ب)  $U \subseteq (A \cup B')$

(ج)  $U \subseteq (A \cap B')$

(د)  $U \subseteq (A' \cap B)$

-۲۴- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی ناتهی باشند، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید (از جبر مجموعه‌ها و نمودار ون کمک بگیرید).

(الف)  $[(A \cup B) - A'] \cup [B' \cap (A \cup B)]$

(ب)  $[A \cup (B \cap A)]' - [B' \cap (A' \cup B')]$



و  $B = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 3\}$  ،  $A = \mathbb{R} - \{4\}$  **۳۵**- اشتراک مجموعه‌های  $n(A - B) = n(B - A) = 2$   $n(A \cap B) = 6$  اگر  $n(A \cup B)$  باشد، تعداد اعضای مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را بیابید.

**۳۶**- بازه‌های  $C = \{x | x \in \mathbb{R}, 25 - x^2 \geq 0\}$  را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

(I) این بازه‌ها را بر حسب طول شان، از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

در نظر بگیرید.

**۳۷**- تعداد ۸۰ نفر از دانش آموزان مدرسه‌ای در رشته‌ی کارانه و ۶۵ نفر در رشته‌ی تکواندو ثبت‌نام کردند. اگر بدانیم ۲۵ نفر در هیچ رشته‌ای ثبت‌نام نکرده و ۱۵ نفر در هر دو رشته ثبت‌نام کردند، تعداد دانش آموزان مدرسه را بیابید.

**II**) حاصل عبارت‌های زیر را به صورت بازه‌ای و به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف)  $A \cup B$

ب)  $A \cup C$

ج)  $B \cup C$

د)  $A \cup B \cup C$

ه)  $A \cap B$

و)  $B \cap C$

ز)  $A \cap B \cap C$

ح)  $A \cap (B \cup C)$

ط)  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

**۳۷**- در سؤال قبل اگر  $D$  را به صورت  $(-\infty, -\frac{9}{7}] \cup [\frac{7}{3}, +\infty)$  (تعريف کنیم، حاصل عبارت‌های زیر را به صورت بازه‌ای و به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف)  $A \cup D$

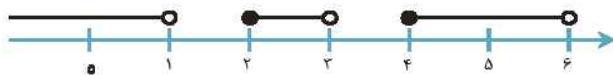
ب)  $B \cup D$

**۳۸**- در یک کلاس ۱۰۰ نفری، ۲۰ نفر به هیچ یک از رشته‌های موسیقی و تئاتر علاقه‌مند نیستند و ۱۰ نفر به هر دو رشته علاقه‌مند هستند. می‌دانیم تعداد شرکت‌کنندگان در برنامه‌ی موسیقی، دو برابر تئاتر است. چند نفر در برنامه‌ی تئاتر شرکت می‌کنند؟

**۳۹**- دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  روی هم ۱۸ عضو دارند. اگر  $A \cap B = \emptyset$  و  $64$  برابر تعداد زیرمجموعه‌های  $A$  باشد، همچنین تعداد زیرمجموعه‌های  $B$  باشد. مجموعه‌های  $A$  و  $B$  هر کدام چند عضو دارند؟

### بازه‌ها

**۴۰**- تاچیه‌ی مشخص شده در شکل زیر را به صورت اجتماع چند بازه معرفی کنید.



**۴۱**- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت بازه‌ای و به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف)  $((5, 9) \cap (-4, 7)) \cup [8, 10]$

ب)  $\{x | x \in \mathbb{R}, -10 \leq x < 5\} \cap \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \cap \{x | x \in \mathbb{R}, x < 10\}$



$$\text{c) } B \cap D \quad \text{d) } C \cup D$$

$$\text{e) } C \cap D \quad \text{f) } A \cap D$$

$$\text{g) } A \cap B \cap C \cap D$$

- ۳۸- شش بازه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$A : (6, 9), \quad B : (3, 8), \quad C : (3, 4), \quad D : (2, 5) \\ E : (1, 4), \quad F : (0, 2)$$

اگر هر یک از بازه‌ها را به عنوان یک نقطه مطابق شکل در نظر بگیریم:

الف) بازه‌هایی را که با هم اشتراک دارند با یک خط به یکدیگر وصل کنید.

$$A \bullet \quad \bullet B$$

$$F \bullet \quad \bullet C$$

ب) کدام بازه با تعداد بیشتری از بازه‌های دیگر اشتراک دارد؟

ج) کدام بازه با تعداد کمتری از بازه‌های دیگر اشتراک دارد؟

- ۳۹- مجموعه‌های  $\{1\} - \mathbb{R}$  و  $\{1, 2\} - \mathbb{R}$  را روی محور اعداد نمایش داده

و سپس آن‌ها را به صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

