



آموزش و کتاب کار
آمار و احتمال پایه یازدهم
(ویژه‌ی مهندسی‌ها)

مؤلفین:

رسول حاجی‌زاده، محمد جمال صادقی



انتشارات خوشخون

روی بالکن رو به روی باغچه نشسته بودم، خورشید نم‌نمک داشت از لای کوه‌ها بالا می‌آمد. نسیم صبحگاهی صورتمو شست و شو می‌داد، مثل آب خنکی که از دل کوه بیرون می‌آید. قشنگ لابه‌لای خنکی نسیم می‌شد اومدن پاییز رو احساس کرد، یه خنکی مطبوع که آخرش موهای تن آدم رو سیخ می‌کنه. نسیم با عطر درخت‌های پرتقال مخلوط شده بود، انگار پاییز رایحه‌ی شیرین و تند پرتقال رو برای پیراهنش انتخاب کرده بود.

در حال و هوای باغچه بودم که دیدم دختر کوچکم با چشم‌های پُف کرده و تازه بیدار شده از خواب در حال کشیدن ساک اسباب‌بازی‌هاش به سمت بالکنه. کشون کشون ساک رو جلوی من گذاشت. گفت:

- سلام، بابا بازی کنیم. (از اون جمله‌های بچه‌ها که هیچ راه فراری درش نیست، نه سؤال، نه درخواستی. امری کامل!!)

من یه نگاهی به صورت تازه از خواب بیدار شده‌اش کردم و گفتم:

- بابا تازه بیدار شدی. حداقل برو یه آبی به دست و صورتت بزن بعد.

ساک رو رها کرد و با لب‌های جمع به سمت داخل ساختمون روانه شد، چند ثانیه‌ای با نگاهم دنبالش کردم و محو قدم‌های کودکش شدم. بعد از چند دقیقه در حالی که داشت خرسی صورتش رو با آستینش خشک می‌کرد، جلوی روم ظاهر شد. گفتم:

- بابا اینطوری سرما می‌خوری!

با چشمایی که رنگ خواب از شون داشت بیرون می‌رفت نگاهی به من کرد و گفت:

- نُج.

شروع کرد از ساک یکی‌یکی اسباب‌بازی‌ها رو درآوردن و من بدون این‌که به چیز دیگه‌ای فکر کنم حرکاتش رو نگاه می‌کردم. با دقت به اسباب‌بازی‌ها نگاه می‌کرد، هر کدوم رو گوشه‌ای می‌ذاشت و با یک حرکت سر اون اسباب بازی رو تأیید و یا رد می‌کرد. چند دقیقه این کارش طول کشید تا نوبت به منج رسید، اسباب‌بازی که از خواهرش برایش مونده بود و شاید هنوز به سنش نمی‌خورد، با یک حرکت اون رو کنار گذاشت. منج رو از کنار برداشتم و گرفتم دستم و گفتم:

- بیا با هم منج بازی کنیم، بهت یاد می‌دم.

یکم از اون غرغره‌های کودکانه کرد و گفت:

- پس من قرمز رو برمی‌دارم.

چهار زانو جلوم نشست برگه‌ی منج رو وسط گذاشت مهره‌های خودش رو با دقت توی چهار خونه‌ی شروع قرمز چید. من هم مهره‌هامو چیدم. بعد تاس رو دادم بهشو، گفتم:

- روی تاس اعداد ۱ تا ۶ نشونه‌گذاری شده باید ۶ بیاد تا مهره‌ی اول رو بیاری داخل بازی.

تاس رو انداخت ۲ اومد، تاس رو از روی زمین برداشت به من داد و با صورتی که حالت بزرگا رو به خودش داشت، گفت:

- دیدم آجی چطور بازی می‌کنه، یه چیزایی بهم یاد داده.

من از چهره‌اش و لحن بیانش به خنده افتادم. حالت جدی به خودش گرفت یه نگاه به من کرد و گفت:

- بابا بنداز دیگه.

من تاس رو انداختم ۵ اومد. انقدر انداختیم تا ۶ اومد. بازی رو ادامه دادیم و در همین حین یواش یواش بعضی از قوانین بازی رو براش توضیح دادم.

چقدر سخته یاد دادن به کودک، چند بار دیگه خانوادگی بازی کردیم تا حانه کامل یاد بگیره و الان تا حدودی تو بازی راه افتاده. باید قدم به قدم یاد داد، باید صبور بود و حوصله کرد (جالبه گاهی با تغییر شرایط آدم، خدا حوصله و توان اون کار رو به موقعش می‌ده). واقعاً گاهی آموزش ساده‌ترین چیزها زمان می‌خواد (آموزش قوانین زندگی شهری، همسایگی، قوانین انسانی و ...).

منج یه بازی ساده‌اس که توونستم با اون شمردن رو به راحتی به دخترم یاد بدم. چند وقت بعد با دو تاس بازی کردیم (و یه سری قوانین خانوادگی ساختیم) تا جمع کردن و انتخاب بین حرکت با دو عدد تاس و مهره‌ها رو بهش آموزش بدم. گاهی یه بازی ساده می‌تونه آموزش، تفکر، ریاضی، هوش و خلاقیت ما رو بالا بیره. بازی با یک یا دو تاس حتی می‌تونه روشی برای آموزش احتمال باشه، یا شطرنج نمادی از منطق و ... هر بازی می‌تونه علاوه بر سرگرمی، قدرت یادگیری ما رو در هر سنی افزایش بده و خلاقیت و توانایی‌هامون رو در خلق بازی‌های جدید بالا بیره. خلاقیت یکی از مهم‌ترین نیازهای جامعه و پرورش اون مهمترین رکن آموزشه، که شاید یکی از اصلی‌ترین مسائلی هست که در سیستم آموزشی کنونی ما فراموش شده.

سعی کنید خلاقیتتون رو پرورش بدید. بازی‌های فکری رو تو هر سنی که هستید انجام بدید. سعی کنیم کارهای گروهی و دورهمی رو تمرین کنیم چه در جمع خانواده و چه در جمع دوستان.

چند جمله‌ای در رابطه با کتاب، کتاب حاضر برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی تألیف شده، و در بررسی‌های سعی شد تا با آخرین ویرایش کتاب درسی منطبق باشه. این کتاب با نگاه ویژه به دانش‌آموزان ممتاز و تیزهوش تألیف شده، پس از دوستان عزیز خواهشمندم این موضوع رو در معرفی کتاب به دانش‌آموزان در نظر بگیرن و اون رو به هر کسی معرفی نکنن.

و در ابتدا و انتها، خدا رو شاکرم به‌خاطر تمام الطافش، که سایه‌ی مهرش رو از من دریغ نکرده، در هر پستی و بلندی یارم بوده و حضور نگاهش رو در تمام لحظات زندگیم احساس می‌کنم.

بهترین‌ها رو برای شما و خودم از خداوند می‌خوام.

لازم می‌دونم از تمامی کسانی که در تولید این اثر نقش داشتند کمال تشکر رو داشته باشم و از شما دوست عزیز نیز به خاطر نواقص و کمبودهای احتمالی طلب عفو دارم. از شما مخاطب گرامی انتظار داریم عیوب و ایرادات کار رو به ما اطلاع بدید تا در چاپ‌های بعدی مورد توجه قرار بگیره.



رسول حاجی‌زاده
مدیر انتشارات خوشخوان



۱	آشنایی با مبانی ریاضیات	فصل اول 
۵۱	احتمال	فصل دوم 
۱۰۵	آمار توصیفی	فصل سوم 
۱۳۱	آمار استنباطی	فصل چهارم 

آشنایی با مبانی ریاضیات

سخنی با دبیر

از آنجا که مخاطبین این کتاب دانش آموزان ممتاز رشته‌ی ریاضی هستند در فصل اول همانند سه فصل دیگر پا را فراتر از کتاب درسی گذاشته و مباحث را مبسوط‌تر توضیح داده‌ایم، مخصوصاً:

- در معرفی سورها، سور صفر نیز معرفی شده است تا برای دانش آموزان تیزهوش پیدا کردن تقیض سورها دامنهی وسیع‌تری داشته باشد.
- معماهای گوناگونی از منطق ریاضی ارائه شده است تا کاربرد منطق را دانش آموزان لمس کنند.
- در فصل مجموعه‌ها علاوه بر این که به نمودار ون بها داه شده است ورود خوبی به جبر مجموعه‌ها شده است. درست است که مطلوب کتاب جبر مجموعه‌ها نیست ولی اگر قرار باشد از سیاست کتاب درسی که برای عموم دانش آموزان نوشته شده است تبعیت کنیم آن‌گاه دانش آموزان تیزهوش لذتی از درس نخواهند برد.
- در نظام قبلی هم در درس جبر و احتمال توجه ویژه‌ای به «افراز» نشده بود و فقط معرفی و سپس ارتباط آن با روابط هم‌ارزی ذکر شده بود ولی در کنکور سراسری شمارش تعداد افرازاها با شرایط گوناگون چندین نوبت مورد پرسش قرار گرفته بود که بسیار فراتر از کتاب درسی بود، بنابراین هم به خاطر گره زدن افراز با مبحث شمارش و هم به خاطر رعایت جوانب احتیاط که شاید باز در کنکور سراسری به شمارش تعداد افرازاها بها داده شود، ما هم به این شمارش بها داده‌ایم.

سخنی با دانش آموز

در ۱۰ سال گذشته مقدماتی از ریاضیات را فراگرفتید ولی واقعیت این است که تا منطق ریاضی را به خوبی یاد نگیرید در درک مفاهیم عمیق ریاضی به مشکل برخورد خواهید خورد. کلید حل خیلی از معماهای ریاضی در یادگیری منطق نهفته است، بنابراین تلاش کنید به درس اول از این فصل توجه ویژه داشته باشد. این به آن معنا نیست که دروس دیگر اهمیت ندارند، بلکه آن دو درس نیز در جای خود قابل توجه است ولی چون آن دو درس در مورد مجموعه‌هاست و شما با مبحث مجموعه‌ها در سنوات گذشته آشنا بوده‌اید توضیح اضافی‌ای در مورد آن بحث به ذهن نمی‌رسد.



درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

۱



از منطق ریاضی می‌توان به عنوان دستور زبان ریاضی یاد نمود. در منطق ریاضی گزاره‌ها با هم ترکیب شده و گزاره‌هایی جدید پدید می‌آورند که با توجه به درستی و یا نادرستی گزاره‌های اولیه، درستی گزاره‌ی پدید آمده بررسی می‌شود. با توجه به توضیحات فوق به نظر می‌رسد ابتدا باید گزاره را بیش‌تر شناخت.



گزاره. همان‌طور که در هندسه‌ی سال دهم بیان شد گزاره جمله‌ای است خبری که دقیقاً درست است و یا نادرست (گرچه ممکن است درست یا نادرست بودن آن برای ما مشخص نباشد).

به جملات خبری زیر دقت کنید:

● عدد ۱۱ از عدد ۴ بزرگ‌تر است.

● عدد ۳۵ عددی زوج است.

● در روستای خاکی از توابع شهرستان سراب لوله‌کشی گاز وجود دارد.

هر سه جمله‌ی فوق گزاره هستند که ارزش درستی آن‌ها به ترتیب «درست»، «نادرست» و «نامعلوم» است. البته گزاره‌ی سوم بالاخره دقیقاً ارزش درستی دارد و یا نادرست بنابراین از حالت گزاره بودن خارج نمی‌شود. همچنین جملات احساسی، امری و پرسشی گزاره محسوب نمی‌شوند. هیچ‌یک از عبارات «عجب آدم خوش‌اخلاقی!»، «لطفاً یقه‌ی پیراهنتان را درست کنید» و «نمره‌ی فیزیکتان چند شده است؟» گزاره نمی‌باشند.

با این حساب معلوم می‌شود که هر گزاره‌ای یا ارزش درست دارد یا نادرست که ارزش درست را با «د» یا «T» نمایش می‌دهند و ارزش نادرست را با «ن» یا «F».

یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد. برای مثال گزاره‌ی «هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت» در ریاضیات یک حدس است که به آن حدس گلدباخ گویند. (در ریاضیات به مسائل حل نشده‌ای که تا به حال کسی نتوانسته آن را حل کند حدس گفته می‌شود). حدس گلدباخ را تا به حال کسی نتوانسته است اثبات کند و نیز تا به حال برای رد درستی آن گزاره نیز کسی نتوانسته مثال نقض بیاورد. حدس گلدباخ یک گزاره است و فقط یک ارزش دارد که شاید در آینده‌ای نه چندان دور روشن شود.

از دیگر حدس‌های ریاضیات می‌توان به حدس لژاندر، حدس کولاتز و ... اشاره کرد.

جدول ارزش گزاره‌ها

جدول ارزش درستی یک گزاره

p
د
ن

معمولاً گزاره را با حروفی مانند p, q, r و ... نشان می‌دهند. بنابراین اگر گزاره‌ای مانند p مورد بحث باشد می‌توان جدول درستی آن را به صورت مقابل نشان داد: همچنین اگر تعداد گزاره‌های مورد بحث دو گزاره‌ی p و q باشند و یا سه گزاره مانند p, q, r آن‌گاه جدول ارزش آن‌ها به ترتیب به صورت‌های زیر خواهد بود:

جدول ارزش درستی سه گزاره

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

جدول ارزش درستی دو گزاره

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

اگر تعداد گزاره‌های مورد بحث n باشد یا علم به این که هر گزاره دو حالت دارد «درست» یا «نادرست» یا توجه به اصل ضرب معلوم می‌شود که تعداد سطرهای جدول ارزش درستی آن n گزاره 2^n سطر خواهد بود.

گزاره‌نما

به هر یک از عبارات زیر توجه کنید:

- a عددی اول است.
- حاصل عبارت $x^2 + 3x - 1$ برابر ۳۹ است.
- در خانواده‌ای چهار فرزندی احتمال آن که پشامد A رخ دهد $\frac{15}{16}$ است.
- حاصل $f(x)$ در تابع $f(x) = 3^x + 2$ برابر ۵ است.
- حاصل عبارت $x^2 + y^2$ برابر ۱۳ است.

هیچ یک از عبارات فوق گزاره نیستند چون هیچ یک از آن‌ها ارزش درستی و یا نادرستی‌شان معلوم نیست و بستگی به این که به جای **متغیر** یا **متغیرهای** به کار رفته در هر یک از آن‌ها چه چیزی به کار رود ممکن است گزاره درست و یا غلط باشد. به عنوان مثال گزاره‌ی نخست به ازای $a = 17$ تبدیل به گزاره‌ای می‌شود که ارزش درستی پیدا می‌کند و به ازای $a = 27$ آن عبارت تبدیل به گزاره‌ای نادرست می‌شود.

چنین عباراتی که در هر یک از آن‌ها یک یا چند متغیر به کار رفته است و به ازای بعضی مقدار یا عبارات به جای آن متغیرها عبارت داده شده تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود و به ازای بعضی مقدار یا عبارات دیگر به جای آن متغیرها عبارت داده شده تبدیل به گزاره‌ای نادرست می‌شود را گزاره‌نما می‌گویند.



از بین عبارات زیر گزاره و گزاره‌نما را مشخص کنید:

- (الف) کدام عدد اول، زوج است؟
- (ب) مجموع هر دو عدد اولی، عددی است مرکب.
- (ج) عدد 5243 در تقسیم بر ۱۱ باقی‌مانده‌ی ۴ دارد.
- (د) رقم یکان عدد توان‌دار 5243 برابر k است.
- (ه) ایران شهرهای زیبایی دارد.
- (و) مجموع دو عدد طبیعی x و y برابر ۳ است.
- (ز) حاصل $7!$ برابر $6! \times m$ است.
- (ح) در پرتاب دو تاس با یکدیگر احتمال آن که حداقل یکی از تاس‌ها ۲ باشد $\frac{1}{6}$ است.
- (ط) آلودگی هوا حال آدم را به هم می‌زند.
- (ی) مجموع مربع سینوس زاویه‌ی x با مربع کسینوس همان زاویه برابر ۱ است.
- (الف) نه گزاره است و نه گزاره‌نما.
- (ب) گزاره‌ای است با ارزش «نادرست».
- (ج) گزاره‌ای است با ارزش «نادرست» که علت نادرستی آن را در سال بعد متوجه خواهید شد.
- (د) گزاره‌نماست که متغیرش k بوده و به ازای $k = 8$ تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود.
- (ه) نه گزاره است و نه گزاره‌نما.
- (و) گزاره‌نمایی است که به ازای « $x = 1$ و $y = 2$ » یا « $x = 2$ و $y = 1$ » تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود.
- (ز) گزاره‌نمایی است که به ازای $m = 7$ تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود.
- (ح) گزاره‌ای است با ارزش «نادرست».
- (ط) نه گزاره است و نه گزاره‌نما.

حل.

(ی) عبارت داده شده گزاره‌ای است که همیشه درست بوده و ارزشش مشخص است. البته می‌توان آن را گزاره‌نما نیز گرفت که به ازای تمام زاویه‌ها برای x آن گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود.



دامنه و مجموعه جواب

به گزاره‌نمایی مانند گزاره‌نمای اشاره شده در قسمت «د» از مثال قبل توجه کنید. معلوم است که رقم یکان هر عددی از جمله عدد داده شده یکی از ارقام دهگانه‌ی ۰، ۱، ۲، ...، ۹ است، بنابراین مجموعه‌ی $D = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ را که مجموعه‌ی تمام رقم یکان‌هاست دامنه‌ی متغیر برای آن گزاره‌نماست. البته باید توجه کنید که دامنه‌ی متغیر برای یک گزاره‌نما با دیدگاه‌های متفاوت ممکن است گوناگون باشد. به استدلال‌های زیر دقت کنید:

● پویا: رقم یکان هر عددی از جمله عدد 52^{43} یکی از ارقام ۰، ۱، ۲، ...، ۹ است بنابراین: $D_1 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

● امین: عدد 52^{43} مضرب 10 نیست بنابراین رقم یکان آن 0 نبوده و داریم: $D_2 = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

● محمد: عدد 52^{43} عددی است زوج بنابراین رقم یکان آن فرد نیست و: $D_3 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید D_1, D_2, D_3 و ... همگی می‌توانند دامنه‌ی متغیر گزاره‌نمای داده شده باشند و همگی آن‌ها یک ویژگی مشترک دارند و آن این‌که مقادیر و یا عباراتی که گزاره‌نما را به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌کنند حتماً در درون آن دامنه‌ی متغیر قرار دارند که این مطلب را در حالت کلی در قالب نکته‌ی ۲ بیان خواهیم کرد.

مجموعه‌ی جواب یک گزاره‌نما نیز مجموعه‌ی مقادیر یا عباراتی است که به جای متغیر و یا متغیرها در گزاره‌نما قرار گیرند تا آن گزاره‌نما را به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل کنند به عنوان مثال مجموعه‌جواب گزاره‌نمای «حاصل عبارت $(x-6)(x-2)(x-1)$ برابر ۰ است» مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 6\}$ است.

نکته ۲

همان‌طور که مشاهده کردید دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌جواب یک گزاره‌نما را معمولاً به ترتیب با D و S نمایش می‌دهند و رابطه‌ی $S \subseteq D$ همیشه برقرار است.

مثال ۲

دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌جواب هر یک از گزاره‌نماهای موجود در مثال ۱ را بنویسید.

$D = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$	$S = \{8\}$	(د)
$D = \{(x, y) x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$	$S = \{(1, 2), (2, 1)\}$	(و)
$D = \mathbb{N}$	$S = \{7\}$	(ز)
مجموعه‌ی تمام زوایا D	$S = D$	(ی)

حل.

ترکیب گزاره‌ها

قرار است دو یا چند گزاره را با ادات ربطی مانند «و»، «یا»، «اگر ... آنگاه ...»، «... اگر و تنها اگر ...» و ... به یکدیگر ربط داده و گزاره‌های مرکبی را درست کنیم که ارزش درستی هر یک از این گزاره‌های مرکب وابسته به ارزش درستی گزاره‌های تشکیل دهنده‌ی آن‌ها منحصر به فرد به دست خواهد آمد.

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره‌ای مانند p گزاره‌ای است که ارزش آن کاملاً برعکس ارزش درستی p باشد و آن را با $\sim p$ نمایش می‌دهند. به عنوان مثال نقیض گزاره‌ی «روستای خاکی از توابع شهرستان سراب است» به صورت «چنین نیست که روستای خاکی از توابع شهرستان سراب باشد» یا «روستای خاکی از توابع شهرستان سراب نیست» می‌شود که قطعاً یکی از آن دو گزاره ارزش درست و دیگری ارزش نادرست دارد.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

جدول درستی ارزش گزاره‌های p و $\sim p$ در یک جدول به صورت جدول روبه‌رو می‌شود:



جدول ارزش درستی $(\sim p)$ را کشیده و آن را با p مقایسه کنید.

جدول ارزش درستی p و $(\sim p)$ به ترتیب در ستون‌های اول و سوم جدول مقابل نمایان شده‌اند.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان‌طور که مشخص است آن دو گزاره یعنی p و $(\sim p)$ کاملاً مشابه هم هستند که در این حالت گویند دو گزاره‌ی p و $(\sim p)$ هم‌ارز هستند و به صورت $\sim p \equiv p$ نمایش می‌دهند.

ترکیب عطفی دو گزاره

اگر دو گزاره‌ی p و q با لفظ «و» ترکیب شوند آن‌گاه ترکیب آن دو گزاره را ترکیب عطفی گویند و آن را به صورت « $p \wedge q$ » نمایش می‌دهند. ارزش گزاره‌ی حاصل از ترکیب عطفی دو گزاره‌ی p و q یعنی $p \wedge q$ وقتی درست است که هر دو گزاره‌ی p و q ارزش درستی داشته باشند. به عنوان مثال ترکیب جملات زیر را در نظر بگیرید:

I. «هر مثلث سه ضلع دارد» و «شیراز مرکز استان فارس است»

II. «هر مثلث سه ضلع دارد» و «تبریز مرکز استان فارس است»

III. «هر مثلث چهار ضلع دارد» و «شیراز مرکز استان فارس است»

IV. «هر مثلث چهار ضلع دارد» و «تبریز مرکز استان فارس است»

در ۴ ترکیب فوق، در ترکیب اول هر دو جمله ارزش درستی داشته و جمله‌ی حاصل از ترکیب آن دو گزاره نیز ارزش درستی دارد. در ترکیب دوم جمله‌ی اول ارزش درست و جمله‌ی دوم ارزش نادرستی داشته و ارزش جمله‌ی حاصل از ترکیب آن دو جمله نادرست است. در ترکیب سوم جمله‌ی اول ارزش نادرست و جمله‌ی دوم ارزش درستی داشته و ارزش جمله‌ی حاصل از ترکیب آن دو جمله، نادرست است. و بالاخره این‌که در ترکیب چهارم هر دو جمله ارزش نادرست داشته و ارزش جمله‌ی حاصل از ترکیب آن دو جمله، نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

جدول ارزش درستی ترکیب عطفی دو گزاره‌ی p و q به صورت جدول مقابل است:

جمله‌ی همیشه درست را با T و جمله‌ی همیشه غلط را با F نشان می‌دهند، بنابراین با توجه به تعریف ترکیب عطفی دو گزاره خواهیم داشت:

$$p \wedge F \equiv F, \quad p \wedge T \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p, \quad p \wedge \sim p \equiv F$$

ترکیب فصلی دو گزاره

اگر دو گزاره‌ی p و q با لفظ «یا» ترکیب شوند آن‌گاه ترکیب آن دو گزاره را ترکیب فصلی گویند و آن را به صورت « $p \vee q$ » نمایش می‌دهند. ارزش گزاره‌ی حاصل از ترکیب فصلی دو گزاره‌ی p و q یعنی $p \vee q$ وقتی درست است که حداقل یکی از دو گزاره‌ی p و q درست باشند. به عنوان مثال اگر در جملات چهارگانه از مثال ترکیب عطفی، به جای لفظ «و» از لفظ «یا» استفاده کنیم آن‌گاه ارزش هر یک از جملات حاصل از ترکیب سه‌گانه نخست «درست» و ارزش گزاره‌ی حاصل از چهارمین ترکیب «نادرست» است، بنابراین

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

جدول ترکیب فصلی دو گزاره‌ی p و q به صورت مقابل است:

با توجه به تعریف ترکیب فصلی دو گزاره هم‌ارزی‌های زیر نتیجه می‌شوند:

$$p \vee T \equiv T, \quad p \vee F \equiv p, \quad p \vee p \equiv p, \quad p \vee \sim p \equiv T$$





باید توجه داشت که در زبان فارسی بعضی اوقات «یا» معنای متفاوتی دارد. مثلاً منظور از جمله‌ی «محمد امروز به مدرسه یا پارک می‌رود» آن است که محمد دقیقاً یکی از آن دو کار را انجام می‌دهد و هر دو را نمی‌تواند انجام دهد که به آن **بای مانع جمع** گویند و با بای منطقی فرق دارد.

خواص ترکیب‌های عطفی و فصلی

۱. **جابه‌جایی.** هر دو ترکیب مورد نظر دارای خاصیت جابه‌جایی می‌باشند، یعنی:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p, \quad p \vee q \equiv q \vee p$$

۲. **شرکت‌پذیری.** هر دو ترکیب عطفی و فصلی دارای خاصیت شرکت‌پذیری نیز هستند، یعنی:

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r, \quad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

۳. **پخش‌ی.** عمل $\vee$ بر روی $\wedge$ و نیز عمل $\wedge$ بر روی $\vee$ دارای خاصیت پخش‌ی است، یعنی:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

برای اثبات روابط فوق می‌توان از جدول درستی ارزش گزاره‌ها استفاده نمود. به عنوان مثال جدول مربوط به خاصیت پخش‌ی عمل $\wedge$ بر روی عمل $\vee$ به شکل زیر است:

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود در تمامی حالات هشت‌گانه‌ی ممکن ارزش $p \wedge (q \vee r)$ با ارزش $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ یکسان است.

۴. **قانون دمرگان.** روابط زیر که به روابط دمرگان معروف هستند به سادگی از روی جدول قابل اثبات هستند:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q, \quad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

۵. **قانون جذب.** روابط زیر نیز که به قوانین جذب معروف هستند برقرارند:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p, \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

که مورد دوم را ثابت می‌کنیم:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge T) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (T \vee q) \equiv p \wedge T \equiv p$$

۶. **قانون شبه جذب.** به روابط زیر قوانین شبه جذب می‌گویند:

$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q, \quad p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

اثبات روابط فوق نیز به سادگی انجام می‌شود.



با استفاده از نمادهای $\wedge$ و $\vee$ جواب هر یک از معادلات زیر را بنویسید:

$$(x - 4)(y - 8) = 0 \quad (\text{ب}) \quad (x - 4)^2 + (y - 8)^4 = 0 \quad (\text{الف})$$

حل. (الف) وقتی مجموع دو عبارت نامنفی برابر ۰ شده است باید هر دو صفر باشند، پس:

$$[(x - 4)^2 = 0] \wedge [(y - 8)^4 = 0] \Rightarrow [x = 4] \wedge [y = 8]$$

(ب) وقتی حاصل ضرب دو عبارت ۰ شده است آنگاه حداقل یکی از آن دو عبارت صفر است، پس:

$$[(x - 4) = 0] \vee [(y - 8) = 0] \Rightarrow [x = 4] \vee [y = 8]$$

یعنی معادله‌ی فوق بی‌شمار جواب دارد به این صورت که $x = 4$ و y هر عدد دلخواهی و یا $y = 8$ و x هر عدد دلخواهی.

ترکیب شرطی

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

اگر دو گزاره‌ی p و q به صورت «اگر p آنگاه q » با هم ترکیب شده باشند آنگاه ترکیب آن دو گزاره را شرطی گویند و آن را به صورت $p \Rightarrow q$ نمایش می‌دهند. p را مقدم و q را پیرو یا تالی گویند. همچنین p را فرض و q را حکم نیز می‌نامند. ارزش $p \Rightarrow q$ فقط وقتی نادرست است که گزاره‌ی p درست و گزاره‌ی q نادرست باشد. پس جدول درستی ارزش $p \Rightarrow q$ با توجه به درستی p و q به صورت مقابل است:

نکته ۳

اگر در یک گزاره‌ی شرطی مقدم ارزش نادرستی داشته باشد بدون توجه به ارزش درستی تالی، نتیجه می‌گیریم که ارزش $p \Rightarrow q$ درست است و در این صورت می‌گوییم «جمله‌ی ائتقائ مقدم درست است». همچنین اگر تالی ارزش درستی داشته باشد بدون توجه به ارزش مقدم می‌فهمیم که ارزش $p \Rightarrow q$ درست است.

گزاره‌ی مرکب $p \Rightarrow q$ را به صورت‌های:

● p شرط کافی برای q است.

● q شرط لازم برای p است.

نیز می‌خوانند، بنابراین:

نکته ۴

در گزاره‌های شرطی، همیشه فرض برای حکم کافی است و حکم برای فرض لازم.

به عنوان مثال می‌دانیم اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد آنگاه قطرهای آن با یکدیگر برابرند که می‌توان آن گزاره‌ی شرطی را به صورت زیر نیز بیان کرد:

● مستطیل بودن یک چهارضلعی شرط کافی برای آن است که قطرهایش برابر باشند.

● برابر بودن اقطار یک چهارضلعی شرط لازم برای مستطیل بودن آن است.

با توجه به تعریف ترکیب شرطی دو گزاره‌ی p و q معلوم می‌شود که همه‌ی هم‌ارزی‌های زیر برقرارند:

$p \Rightarrow p \equiv T$	$p \Rightarrow \sim p \equiv \sim p$
$p \Rightarrow T \equiv T$	$T \Rightarrow p \equiv p$
$F \Rightarrow p \equiv T$	$p \Rightarrow F \equiv \sim p$
$T \Rightarrow T \equiv T$	$F \Rightarrow F \equiv T$



مثال ۵

هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ثابت کنید:

(الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (q \vee \sim p)$

(ب) $(q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) \equiv (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$

حل.

(الف)

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$q \vee \sim p$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

(ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$q \vee \sim p$	$p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	سمت چپ	سمت راست
د	د	ن	ن	د	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د	ن	ن	د	د	د

همان‌طور که در مثال قبیل دیدید عبارت $p \Rightarrow q$ با عبارت $q \vee \sim p$ هم‌ارز است و می‌توان آن را جایگزین کرد.

نکته ۵

عبارت $\sim q \Rightarrow \sim p$ که عکس نقیض $p \Rightarrow q$ نامیده می‌شود با آن هم‌ارز است و می‌توان آن را جایگزین کرد.

نکته ۶

حال که با ترکیب شرطی آشنا شدید لازم است با خواص زیر که به قوانین ادخال فاصل و حذف عاطف هستند آشنا شوید:

$$(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$$

● قانون ادخال فاصل

$$(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$$

● قانون حذف عاطف

اثبات هر یک از هم‌ارزی‌های فوق با استفاده از ترسیم جدول به سادگی امکان‌پذیر است.

با استفاده از نکته‌ی ۶ ثابت کنید اگر مربع عددی طبیعی، فرد باشد آنگاه خود آن عدد نیز فرد است.

مثال ۶

حل.

$$[(a^2 = \text{فرد}) \Rightarrow (a = \text{فرد})] \equiv [(a = \text{زوج}) \Rightarrow (a^2 = \text{زوج})]$$

همان‌طور که دیده می‌شود اثبات گزاره‌ی سمت راست که عکس نقیض گزاره‌ی سمت چپ است ساده‌تر می‌باشد:

$$a = 2k \Rightarrow a^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2 = 2q = \text{زوج}$$



با استفاده از نکته‌ی ۶ ثابت کنید اگر مکعب عددی مضرب ۷ نباشد آنگاه خود آن عدد نیز مضرب ۷ نخواهد بود.

مثال ۷

حل.

$$[(a^3 \neq 7k) \Rightarrow (a \neq 7k)] \equiv [(a = 7k) \Rightarrow (a^3 = 7k)]$$

اثبات گزاره‌ی سمت راست به سادگی انجام پذیر است.



ترکیب دوشروطی

هرگاه p و q دو گزاره باشند آن‌گاه $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را ترکیب دو شرطی نامیده و آن را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نشان می‌دهند و آن را به یکی از صورت‌های زیر می‌خوانند:

• اگر p آن‌گاه q و برعکس.

• p شرط لازم و کافی است برای q .

• p اگر و تنها اگر q .

به عنوان مثال در هندسه‌ی سال گذشته متوجه شدید که از متوازی‌الاضلاع بودن یک چهارضلعی (گزاره‌ی p) می‌توان نتیجه گرفت که قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند (گزاره‌ی q) و برعکس. بنابراین می‌توان نوشت:

(قطرهای $ABCD$ همدیگر را نصف می‌کنند) $\Leftrightarrow$ (چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است)

و آن را به یکی از مدل‌های زیر می‌خوانیم:

• در متوازی‌الاضلاع قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند و برعکس.

• شرط لازم و کافی برای آن‌که یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد آن است که قطرهایش یکدیگر را نصف کنند.

• یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش یکدیگر را نصف کنند.

جدول ارزش درستی گزاره‌های مربوط به $p \Leftrightarrow q$ را رسم کنید.



p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د



نکته ۷

ارزش ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ درست است هرگاه یا هر دو گزاره‌ی p و q ارزش درستی داشته باشند و یا هر دوی آن‌ها ارزش نادرست.

به سادگی ثابت می‌شود که $p \Leftrightarrow q$ با هر دو گزاره‌ی $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ و $p \Leftrightarrow q$ هم ارز است.

سورهای سه‌گانه

سورهای سه‌گانه علائمی ریاضی هستند که در صورت لزوم در نوشتن جملاتی به صورت ریاضی به کار می‌روند. سورها می‌توانند قبل از گزاره‌نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند. به عنوان مثال « $5x + 1$ مربع کامل است» یک گزاره‌نما است ولی «وجود دارد عدد صحیحی مانند x به طوری که به ازای آن حاصل $5x + 1$ مربع کامل باشد» گزاره است.

(الف) سور عمومی وقتی که تمام اعضاء یک مجموعه دارای خاصیت مشخصی باشند، آن‌گاه برای نشان دادن آن از این سور استفاده می‌کنند که علامت آن $\forall$ می‌باشد. به عنوان مثال معادل جمله‌ی «مربع هر عدد طبیعی، خود عددی است طبیعی» به صورت زیر است:

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad a^2 \in \mathbb{N}$$

(ب) سور وجودی وقتی که بعضی از اعضاء مجموعه‌ای دارای خاصیت مشخصی باشند، آن‌گاه برای نشان دادن آن، از این سور استفاده می‌کنند که علامت آن $\exists$ است. به عنوان مثال معادل جمله‌ی «بعضی از اعداد طبیعی مضرب صحیحی از ۳ هستند» به صورت زیر است:

$$\exists a \in \mathbb{N}, \quad a = 3k, \quad k \in \mathbb{Z}$$





(ج) سور صفر وقتی که هیچ یک از اعضاء مجموعه‌ای دارای خاصیت مشخصی نباشند، آنگاه برای نشان دادن آن از این سور استفاده می‌کنند که علامت آن $\#$ است. به عنوان مثال معادل جمله‌ی «هیچ یک از اعداد گویا متعلق به مجموعه اعداد گنگ نیستند» به صورت زیر است:

$$\#a \in \mathbb{Q} \quad , \quad a \in \mathbb{Q}'$$

● گزاره‌نمایی که با سور عمومی همراه شود وقتی به یک گزاره‌ی درست تبدیل می‌شود که هر عضوی از دامنه‌ی متغیر در گزاره‌نما صدق کند به عبارتی دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

● گزاره‌نمایی که با سور وجودی همراه شود وقتی به یک گزاره‌ی درست تبدیل می‌شود که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

ارزش درستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:



(الف) $\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad x^2 \leq x^2$

(ب) $\exists a \in \mathbb{O} \quad , \quad (a + 5) \in \mathbb{E}$

(ج) $\#x \in \mathbb{N} \quad , \quad \frac{x^2}{5} \in \mathbb{N}$

(د) $\forall x \in \mathbb{N} \quad , \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad , \quad xy = 1$

(در سؤال فوق لازم به یادآوری است که $\mathbb{O}$ نشان‌گر مجموعه اعداد فرد و $\mathbb{E}$ نشان‌گر مجموعه اعداد زوج است.)

حل.

(الف) ترجمه: توان دوم تمام اعداد حقیقی از توان چهارمشان کم‌تر یا مساوی است.

این گزاره ارزش نادرستی دارد چون اعداد بین ۰ و ۱ چنین ویژگی‌ای را ندارند.

(ب) ترجمه: وجود دارد عددی فرد که وقتی با عدد ۵ جمع می‌شود حاصلش زوج شود.

این گزاره ارزش درستی دارد چون تمام اعداد فرد این ویژگی را دارند. بنابراین اگر سور وجودی تبدیل به سور عمومی هم می‌شد ارزش گزاره درست بود.

(ج) ترجمه: عددی طبیعی وجود ندارد که مربعش بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

این گزاره ارزش نادرستی دارد چون مربع اعداد ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ... بر ۵ بخش‌پذیرند.

(د) ترجمه: برای هر عدد طبیعی، عدد طبیعی‌ای یافت می‌شود که حاصل ضربشان ۱ شود.

این گزاره ارزش نادرستی دارد چون برای عدد طبیعی‌ای مانند ۲، عدد طبیعی‌ی y یافت نمی‌شود.



نقیض سورها

مدل کلی جملات ساده و نه ترکیبی به زبان سورها به یکی از سه شکل زیر است:

(I) $\forall x \quad , \quad P(x)$

(II) $\exists x \quad , \quad P(x)$

(III) $\#x \quad , \quad P(x)$

که در هر یک از آن $P(x)$ یک گزاره است. نقیض هر یک از آن‌ها به اشکال زیر است:

(I) $\sim [\forall x \quad , \quad P(x)] \equiv \exists x \quad , \quad \sim P(x)$

(II) $\sim [\exists x \quad , \quad P(x)] \equiv \begin{cases} \forall x \quad , \quad \sim P(x) \\ \#x \quad , \quad P(x) \end{cases}$

(III) $\sim [\#x \quad , \quad P(x)] \equiv \exists x, P(x)$





- ۴ نقیض هر یک از عبارات زیر را بنویسید:
- (الف) هر مثلث متساوی الاضلاعی، متساوی الساقین است.
- (ب) در امتحانات پایان ترم حداقل ۴ نفر از دانش آموزان کلاس مردود شده اند.
- (ج) عدد a نه بر ۲ بخش پذیر است و نه بر ۳.
- (د) عدد a از عدد b بزرگ تر است.
- (ه) از هر نقطه ای غیر واقع بر خط d دقیقاً یک خط به موازات d می توان رسم کرد.
- (و) روز سه شنبه پدر یا مادر تان به مدرسه خواهند آمد.
- (ز) در پرتاب دو تاس با یکدیگر حداقل یکی از دو تاس ۵ ظاهر شده است.
- (ح) در انتخاب ۴ سؤال از بین ۱۰ سؤال به تصادف، شماره ی دقیقاً ۳ سؤال عددی زوج شده است.
- (ط) هیچ یک از اعداد اول زوج نیستند.
- (ی) هر آدم عاقلی یا به مسافرت می رود یا ورزش می کند.
- (ک) بعضی از اعداد طبیعی حداقل به یکی از اعداد ۲، ۵ یا ۷ بخش پذیرند.
- (ل) وجود دارد چهار ضلعی ای که هم قطرهاش همدیگر را نصف می کنند و هم زاویه ی قائمه دارد.
- (م) $\{1, 2, 5\} \subseteq \{1, 5, 9, 11\}$
- (ن) اگر چهار ضلعی ABCD دوزنقه باشد آن گاه قطرهای آن یکدیگر را نصف می کنند.
- (س) اگر امروز باران ببارد من هم به خانه می روم و هم روزه می گیرم.
- (ع) شرط لازم و کافی برای آن که عدد طبیعی ای مربع کامل باشد آن است که تعداد شمارنده های مثبتش فرد باشد.
- (ف) هر آدمی، هر غذایی را دوست دارد.

۵ گزاره های زیر را در نظر بگیرید:

P : سینوس زاویه ی 30° برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

Q : در پرتاب یک تاس احتمال آمدن ۳ برابر $\frac{1}{6}$ است.

R : مجموعه ی چهار عضوی ۱۶ زیرمجموعه دارد.

با توجه به ارزش درستی گزاره های فوق ارزش درستی هر یک از گزاره های ترکیبی زیر را تعیین کنید:

- (a) $P \Rightarrow Q$
- (b) $(P \wedge R) \vee (\sim Q)$
- (c) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
- (d) $(R \wedge \sim P) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

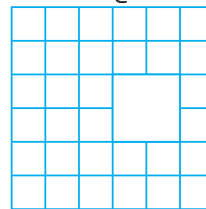
- ۱ کدام یک از جملات زیر گزاره و کدام یک گزاره نما هستند؟
- (الف) مکعب هر عدد طبیعی از مربع آن بزرگ تر است.
- (ب) هر متوازی الاضلاعی یک لوزی است.
- (ج) تعداد اعداد اول دورقمی زیاد است.
- (د) کدام یک از مثلث ها، مثلثی متساوی الساقین هستند؟
- (ه) چهار ضلعی ABCD دوزنقه است.
- (و) مربع عدد a بر ۱۱ بخش پذیر است.
- (ز) آب و هوای استان کردستان آب و هوایی لطیف و دلپذیر است.
- (ح) ورزشگاه وی ستنه کالدرن 74950° نفر گنجایش تماشاچی دارد.
- (ط) عدد حقیقی a چنان است که:

$$(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$$

(ی) عدد حقیقی a چنان است که:

$$(a + 2)^2 = a^2 + 3a + 1$$

- ۲ در جاهای خالی عدد یا عبارتی چنان قرار دهید تا گزاره های حاصل ارزش درستی داشته باشند:
- (الف) عدد $\square + 81$ عددی اول است.
- (ب) مالیت ابوعلی سینا $\square$ بوده است.
- (ج) گزاره جمله ای $\square$ است.
- (د) عدد 240° به تعداد $\square$ مقسوم علیه مثبت دارد.
- (ه) مجموع زوایای داخلی یک $\square$ ضلعی محدب برابر 180° درجه است.
- (و) مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۲۲ برابر $\square$ است.
- (ز) در شکل زیر به تعداد $\square$ مربع در سایه های مختلف وجود دارد.



(ح) حاصل $f(2)$ در تابع $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 5}$ برابر $\square$ است.

- ۳ مجموعه جواب هر یک از گزاره نماهای زیر را مشخص کنید:
- (الف) a عدد اولی است دورقمی به طوری که $a + 2$ مربع کامل است.
- (ب) $(a - 3)^2 = a^2 + 4a + 1$
- (ج) a رقم یکان اعداد مربع کامل است.
- (د) تمام مربع کامل ها را بر ۲۴ تقسیم کرده ایم. S مجموعه ی باقی مانده های حاصل است.



g. حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

h. عدد صحیح مثبتی مانند x وجود دارد به طوری که $8 - 3x \geq x + 6$

۱۱ عبارت‌های ریاضی زیر که به زبان سورها نوشته شده‌اند را با زبان فارسی بازنویسی کنید:

- (i) $\exists a \in \mathbb{E} : \quad \exists a \in \mathbb{O}$
 (j) $\exists x \in \mathbb{R} : \quad x^2 \in [0, \sqrt{2}]$
 (k) $\forall x \in \mathbb{N} : \quad (x+1) \in \mathbb{N}$
 (l) $\forall a \in \mathbb{N} : \quad \exists b \in \mathbb{Z} : |a-b| \in \mathbb{N}$
 (m) $\exists a \in \mathbb{Z} : \quad \left(\frac{a}{2} \in \mathbb{Z}\right) \wedge \left(\frac{a}{3} \in \mathbb{Z}\right)$
 (n) $\forall x \in \mathbb{R} : \quad \frac{x^2 + 5x + 6}{x+2} = x+3$
 (o) $\forall n \in \mathbb{N} : \quad (2^{2^n} + 1) \in P$
 (p) $\forall x \in (-\infty, 0) : \quad x - \frac{1}{x} \leq -2$

۱۲ نقیض تمام گزاره‌های موجود در سؤالات ۱۰ و ۱۱ را بنویسید.
 در ادامه تعدادی سؤال و معمای منطقی آورده می‌شود که بی‌ارتباط با این فصل که منطق ریاضی است، نیستند:*

۱۳ در یک باشگاه ورزشی ۲۵۳ نفر عضو هستند. هر فرد یا فقط فوتبال یا فقط بسکتبال و یا فقط والیبال بازی می‌کند. بعضی از این افراد همیشه راست می‌گویند و بقیه همیشه دروغ می‌گویند. از هر عضو باشگاه سه سؤال می‌پرسیم:

- سؤال اول: آیا شما فوتبالیست هستید؟
 سؤال دوم: آیا شما بسکتبالیست هستید؟
 سؤال سوم: آیا شما والیبالیست هستید؟

۸۶ نفر به سؤال اول، ۸۸ نفر به سؤال دوم و ۱۲۹ نفر به سؤال سوم پاسخ مثبت داده‌اند. در این باشگاه چند دروغگو وجود دارد؟
 «سؤال مسابقه‌ای ربوکاپ در سال ۱۳۸۹»

۱۴ مینا، احمد، شهره و رضا برای صبحانه هر یک غذای مورد علاقه‌ی خود را خوردند. این صبحانه عبارت بود از کره، ذرت، شیر و تخم‌مرغ. اما هر یک، نوعی از آن را خوردند. با توجه به سرخ‌های زیر تعیین کنید چه کسی ذرت خورد؟ (هیچ دو نفری یک نوع غذا نخورده‌اند)

- مینا نزد برادر خود که شیر خورد ننشسته بود.
- خواهری که تخم‌مرغ خورد، در سمت چپ مینا ننشسته بود.
- رضا شیر یا ذرت نخورد.

۱۵ سه دوست به نام‌های حسین، سهراب و رسول در یک مهمانی شرکت کردند. مشخص شد که یکی از آن‌ها مهندس برق، دیگری ناشر

$$(e) (\sim p \vee \sim q) \wedge (r \Rightarrow \sim p)$$

$$(f) (p \vee \sim r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p)$$

۶ جدول ارزش درستی هر یک از گزاره‌های ترکیبی زیر را رسم کنید:

- (a) $p \Rightarrow (p \vee \sim q)$
 (b) $q \wedge (\sim q \Rightarrow p)$
 (c) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow \sim p)$
 (d) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim r)$
 (e) $(q \Leftrightarrow r) \vee (\sim q \Leftrightarrow r)$

۷ هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ثابت کنید:

- (a) $p \vee (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \vee r)$
 (b) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \equiv [(p \wedge q) \Rightarrow r]$
 (c) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim q \vee \sim p) \equiv q \wedge \sim p$
 (d) $(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv \sim p \Rightarrow p$
 (e) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge r \equiv r$

۸ هم‌ارزی‌های زیر را بدون استفاده از جدول اثبات کنید:

- (a) $(p \vee \sim q) \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)] \equiv p \wedge (\sim q \vee r)$
 (b) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \equiv [(p \wedge q) \Rightarrow r]$
 (c) $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
 (d) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
 (e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
 (f) $[\sim p \wedge [(q \Rightarrow r) \vee \sim p]] \Rightarrow \sim (p \wedge q) \equiv T$

۹ ثابت کنید اگر تعداد شمارنده‌های مثبت عددی زوج باشد آن‌گاه آن عدد غیر مربع کامل است.

۱۰ هر یک از عبارات زیر را با به کار بردن نماد سورها، به زبان ریاضی بازنویسی کنید.

- a. مربع هر عدد حقیقی، نامنفی است.
 b. بعضی از اعداد طبیعی بر ۱۱ بخش پذیرند.
 c. برای هر عدد حقیقی، عدد طبیعی‌ای یافت می‌شود که حاصل ضربشان ۱ شود.
 d. مربع هیچ عدد طبیعی‌ای به رقم ۸ ختم نمی‌شود.
 e. بعضی از اعداد حقیقی چنانند که اگر در هر عدد صحیح ضرب شود حاصل ۰ شود.
 f. هر عدد طبیعی‌ای، زوج یا فرد است.

* (این سؤالات از کتاب منطق ریاضی از انتشارات خوشخوان است که مؤلف آن آقای حسن باطنی است).

۱۸ هر یک از این چهار نفر («سعید، محسن، کامران و پوریا» یا همیشه راست می‌گویند یا همیشه دروغ گفته‌های آن‌ها به صورت زیر است:

● کامران به سعید گفت: تو دروغگویی

● محسن به کامران گفت: تو هم دروغگویی

● پوریا به محسن گفت: هر دوی آن‌ها دروغ می‌گویند اما تو هم دروغگویی.

مشخص کنید کدام یک از آن افراد راستگو و کدام یک دروغگویند.

۱۹ در یک پارک دو نیمکت روبه‌روی هم وجود دارد. روی یکی از نیمکت‌ها ۴ پیرمرد به نام‌های A، B، C و D نشسته‌اند و روی نیمکت دیگر ۴ جوان با نام‌های W، X، Y و Z نشسته‌اند. هر یک از افرادی که روی یک نیمکت نشسته‌اند دقیقاً به یکی از افرادی که روی نیمکت مقابل نشسته است نگاه می‌کند.

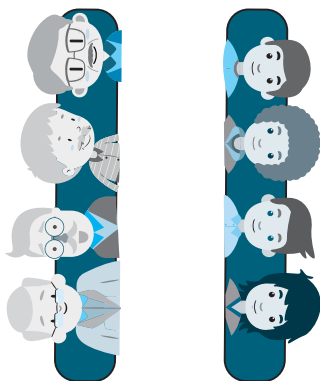
● پیرمرد A به جوانی نگاه می‌کند که آن جوان به پیرمردی نگاه می‌کند که آن پیرمرد به جوان W نگاه می‌کند.

● پیرمرد B به جوانی نگاه می‌کند که آن جوان به پیرمردی نگاه می‌کند که آن پیرمرد به جوان X نگاه می‌کند.

● پیرمرد C به جوانی نگاه می‌کند که آن جوان به پیرمرد D نگاه می‌کند.

● جوان Z به پیرمردی نگاه می‌کند که آن پیرمرد به جوان Y نگاه نمی‌کند.

● جوان Y به پیرمرد B نگاه نمی‌کند.



با توجه به این که هیچ دو نفری (پیر و جوان) متقابلاً به هم نگاه نمی‌کنند، یعنی مثلاً اگر A به W نگاه می‌کند مطمئناً W به A نگاه نمی‌کند، اکنون دقیقاً مشخص کنید هر کس به چه کسی نگاه می‌کند؟

۲۰ روزی ریاضیدان A میهمان ریاضیدان B می‌شود که کاملاً با منطق ریاضی آشنا هستند!

و سومی معلم است. در ضمن یکی از آن‌ها متولد قزوین، دیگری متولد دامغان و سومی هم متولد سراب است. با توجه به جملات زیر مشخص کنید که هر کدام از افراد در چه شهری متولد شده است و چه شغلی دارد:



● مهندس برق تاکنون در شهر دامغان نبوده و از حسین کوچک‌تر است.

● ناشر متولد شهر سراب است و همسرش با همسر حسین نسبت فامیلی دارد.

● رسول می‌گوید: من هرگز در شهر قزوین نبوده‌ام.

۱۶ از طلافروش دزدی شد. می‌دانیم دزد یا دزدها با ماشین فرار کردند. پلیس سه نفر به نام‌های فرزند، تورج و نعمت را دستگیر کرده است. می‌دانیم:



● شخص دیگری به جز این سه نفر در دزدی شرکت نداشته است.

● نعمت بدون کمک فرزند کاری را انجام نمی‌دهد.

● تورج رانندگی بلد نیست.

آیا فرزند در این دزدی شرکت داشته است یا نه؟

۱۷ برای ثبت نام در یک مدرسه، متقاضی باید سه کار انجام دهد:

● ملاقات با مدیر

● دریافت فرم از دفتر

● دریافت توصیه‌نامه از معلم A یا B

ترتیب انجام کارها باید به گونه‌ای باشد که قبل از گرفتن فرم، مدیر را ملاقات کرده باشد.

مدیر در روزهای شنبه صبح و سه‌شنبه بعدازظهر و چهارشنبه بعدازظهر حضور دارد. دفتر روزهای سه‌شنبه صبح، چهارشنبه صبح، شنبه بعدازظهر و پنج‌شنبه بعدازظهر باز است. معلم A روزهای دوشنبه صبح و چهارشنبه صبح و معلم B روزهای شنبه صبح و دوشنبه بعدازظهر حضور دارند. علی ثبت نام خود را در یک روز کامل کرده است. از جملات زیر کدام‌ها صحیحند:

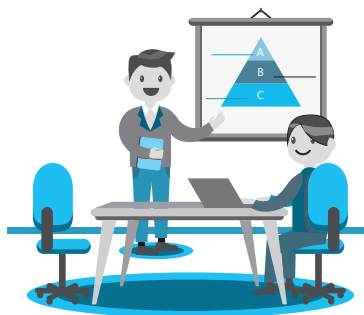
● توصیه‌نامه را از معلم A گرفته است.

● توصیه‌نامه را از معلم B گرفته است.

● کلبه‌ی مراحل ثبت نام را در صبح انجام داده است.

«المپیاد کامپیوتر در سال ۱۳۷۶»





ریاضیدان A: چند تا بچه دارید؟

ریاضیدان B: سه تا.

ریاضیدان A: سن آنها چقدر است؟

ریاضیدان B: حاصل ضرب سنشان ۳۶ است و مجموع سنشان برابر پلاک

خانه پدر بزرگم است.

ریاضیدان A: ولی من پلاک خانه پدر بزرگت را نمی دانم.

ریاضیدان B: حتی اگر آن را می دانستی باز هم نمی توانستی سن بچه ها را به دست آوری. راهنمایی می کنم بزرگترین آنها در اتاق بالا خوابیده است.

و ریاضیدان A به سادگی سن بچه ها را به دست آورد.

با علم به این که سن هر یک از آن سه فرزند عددی طبیعی است سن آن بچه ها را به دست آورید.

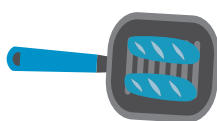
ماهی تابه ای فقط گنجایش دو کتلت را دارد و قرار است در **۲۱**

کمترین زمان ممکن ۳ کتلت را سرخ کنیم. هر باری که ماهی تابه را روی اجاق

قرار می دهیم ۱۰ دقیقه طول می کشد تا فقط یک روی تمام کتلت های

موجود در آن سرخ شود آن گاه کمترین زمان لازم برای سرخ کردن هر دو روی

۳ کتلت چقدر می شود؟



(د) همه‌ی چهارضلعی‌ها چنانند که یا قطرهایش همدیگر را نصف نمی‌کنند یا زاویه‌ی قائمه ندارند.

$$(م) \{1, 2, 5\} \not\subseteq \{1, 5, 9, 11\}$$

(ن) چهارضلعی ABCD دوزنقه است ولی قطرهایش یکدیگر را نصف نمی‌کنند.

(س) امروز باران می‌بارد و من به خانه نمی‌روم یا روزه نمی‌گیرم.

(ع) از آن‌جا که گزاره‌ی $q \Leftrightarrow p$ به صورت $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$ قابل بازنویسی است، پس:

$$\begin{aligned} \sim (p \Leftrightarrow q) &\equiv \sim [(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)] \\ &\equiv \sim (p \vee \sim q) \vee \sim (\sim p \vee q) \\ &\equiv (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \end{aligned}$$

بنابراین نقیض گزاره‌ی دوشروطی داده شده به صورت زیر است:
مربع کاملی وجود دارد که تعداد شمارنده‌های مثبتش زوج است یا عددی وجود دارد که تعداد شمارنده‌های مثبتش فرد است ولی مربع کامل نیست.

(ف) وجود دارد آدمی که بعضی از غذاها را دوست ندارد.

۵ با توجه به این‌که ارزش گزاره‌های p ، q و r به ترتیب نادرست، درست و درست است بنابراین:

$$(a) (p \Rightarrow q) \equiv (F \Rightarrow T) \equiv T$$

$$(b) (p \wedge r) \vee (\sim q) \equiv (F \wedge T) \vee (\sim T) \\ \equiv F \vee F \equiv F$$

$$(c) (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \\ \equiv (F \Rightarrow T) \wedge (T \Rightarrow T) \\ \equiv T \wedge T \equiv T$$

$$(d) (r \wedge \sim p) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \\ \equiv (T \wedge \sim F) \Rightarrow (T \Rightarrow F) \\ \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

$$(e) (\sim p \vee \sim q) \wedge (r \Rightarrow \sim p) \\ \equiv (T \vee F) \wedge (T \Rightarrow T) \\ \equiv T \wedge T \equiv T$$

$$(f) (p \vee \sim r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p) \\ (F \vee F) \Leftrightarrow (T \Rightarrow F) \\ \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$$

۱

(الف) گزاره

(ج) هیچ‌یک

(ه) گزاره‌نما

(ز) هیچ‌یک

(ط) هم گزاره و هم گزاره‌نما

(ب) گزاره

(د) هیچ‌یک

(و) گزاره‌نما

(ح) گزاره

(ی) گزاره‌نما

۲

(الف) ۲ (ب) ایرانی (ج) خبری (د) ۲۰

(ه) ۱۲ (و) ۲۵۳ (ز) ۶۸ (ح) ۶

۳

$$S_{\text{الف}} = \{23, 47, 79\}, S_{\text{ب}} = \left\{\frac{4}{5}\right\}, S_{\text{ج}} = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$$

نکته ۸. می‌دانیم هر عدد صحیحی به یکی از $10k$ یا $10k + 1$ یا $10k + 2$ یا $10k + 9 \dots$ است که اگر مربع آن‌ها را به دست آوریم رقم یکان هیچ‌یک از آن‌ها ۲، ۳، ۷ و ۸ نخواهد شد.

$$S_{\text{د}} = \{0, 1, 4, 9, 12, 16\}$$

همانند نکته‌ی ۸ می‌دانیم هر عدد صحیحی به یکی از دوازده فرم $12k$ یا $12k + 1$ یا $12k + 2$ یا $12k + 3 \dots$ است که اگر مربع آن‌ها را به دست آورید خواهید دید که آن‌ها در تقسیم بر ۲۴ یکی از باقی‌مانده‌های نوشته شده را می‌توانند داشته باشند.

۴

(الف) وجود دارد مثلث متساوی‌الاضلاعی که متساوی‌الساقین نباشد.
(ب) در امتحانات پایان‌ترم حداکثر ۳ نفر از دانش‌آموزان کلاس مردود شده‌اند.

(ج) عدد a حداقل بر یکی از اعداد ۲ یا ۳ بخش‌پذیر است.

(د) عدد a یا با b مساوی است یا از b کوچک‌تر است.

(ه) وجود دارد نقطه‌ای غیرواقع بر خط d که یا از آن خطی به موازات d نمی‌توان رسم کرد و یا بیش از یک خط به موازات d می‌توان رسم کرد.

(و) روز سه‌شنبه نه پدرتان به مدرسه خواهد آمد و نه مادرتان.

(ز) در پرتاب دو تاس با یکدیگر هیچ‌یک از تاس‌ها ۵ ظاهر نشده‌اند.

(ح) در انتخاب ۴ سؤال از بین ۱۰ سؤال به تصادف شماره‌ی دقیقاً ۵ یا ۱ یا ۲ یا ۴ سؤال عددی زوج شده است.

(ط) وجود دارد عددی اول که زوج باشد.

(ی) وجود دارد آدم عاقلی که نه مسافرت می‌رود و نه ورزش می‌کند.

(ک) هیچ عدد طبیعی‌ای وجود ندارد که حداقل به یکی از اعداد ۲، ۵ یا ۷ بخش‌پذیر باشد.



۶

a.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	کل
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
ن	د	ن	ن	د
ن	ن	د	د	د

b.

p	q	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow p$	کل
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن
ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	ن	ن

c.

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow \sim p$	کل
د	د	ن	د	ن	د
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د	د

d.

p	q	r	$\sim r$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow \sim r$	کل
د	د	د	ن	د	ن	ن
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن	د	ن
د	ن	ن	د	د	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

e.

q	r	$\sim q$	$q \Leftrightarrow r$	$\sim q \Leftrightarrow r$	کل
د	د	ن	د	ن	د
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د

۷

a.

p	q	r	$q \Rightarrow r$	چپ	$p \vee r$	راست
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د

b.

p	q	r	$q \Rightarrow r$	چپ	$p \wedge q$	راست
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د

c.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge q$	$\sim q \vee \sim p$	چپ	راست
د	د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	ن	ن

d.

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$q \Rightarrow p$	چپ	راست
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	ن	ن

e.

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	کرشمه	چپ
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د	ن

a.

$$\begin{aligned} \text{چپ} &= (p \vee \sim q) \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)] \\ &\equiv [(p \vee \sim q) \wedge p] \wedge (\sim q \vee r) \\ &\equiv p \wedge (\sim q \vee r) = \text{راست} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \text{چپ} &= [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \\ &\equiv (q \Rightarrow r) \vee \sim p \\ &\equiv (r \vee \sim q) \vee \sim p \\ &\equiv r \vee [\sim q \vee \sim p] \\ &\equiv r \vee \sim (q \wedge p) \\ &\equiv (p \wedge q) \Rightarrow r = \text{راست} \end{aligned}$$





- (a) $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \geq 0$
 (b) $\exists a \in \mathbb{N} : \frac{a}{11} \in \mathbb{N}$
 (c) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists a \in \mathbb{N} ; x \cdot a = 1$
 (d) $\nexists a \in \mathbb{N} : a^2 - 1 = 10k$
 (e) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{Z} ; xy = 0$
 (f) $\forall A \in \mathbb{N} : (a \in \mathbb{O}) \vee (a \in \mathbb{E})$
 (g) $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} : x + \frac{1}{x} \geq 2$
 (h) $\exists x \in \mathbb{N} : 1 - 3x \geq x + 6$

- i. عدد زوجی وجود دارد که سه برابرش فرد باشد.
 j. مربع بعضی از اعداد حقیقی در بازه $[0, \sqrt{2}]$ قرار دارد.
 k. اگر به هر عدد طبیعی ۱ واحد اضافه کنیم عدد حاصل باز هم طبیعی می‌شود.
 l. برای هر عدد طبیعی عدد صحیحی چنان یافت می‌شود که قدرمطلق اختلافشان طبیعی شود.
 m. بعضی از اعداد طبیعی هم بر ۲ بخش پذیرند و هم بر ۳.
 n. برای تمام اعداد حقیقی مانند x تساوی $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = x + 3$ برقرار است.
 o. به ازای هر عدد طبیعی مانند n حاصل $2^{2n} + 1$ عددی اول است.
 p. به ازای تمام اعداد حقیقی منفی x ، رابطه‌ی $x - \frac{1}{x} \leq -2$ برقرار است.

- (a) $\exists a \in \mathbb{R} : a^2 < 0$
 (b) $\nexists a \in \mathbb{N} : \frac{a}{11} \in \mathbb{N}$ یا $\forall a \in \mathbb{N} : \frac{a}{11} \notin \mathbb{N}$

- (c) $\exists x \in \mathbb{R} : \nexists a \in \mathbb{N} ; x \cdot a = 1$
 (d) $\exists a \in \mathbb{N} : a^2 - 1 = 10k \ (k \in \mathbb{Z})$
 (e) $\nexists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{Z} ; xy = 0$
 (f) $\exists a \in \mathbb{N} : (a \notin \mathbb{O}) \wedge (a \notin \mathbb{E})$
 (g) $\exists x \in \mathbb{R} - \{0\} : x + \frac{1}{x} < 2$
 (h) $\forall x \in \mathbb{N} : 1 - 3x < x + 6$
 (i) $\nexists a \in \mathbb{E} : 3a \in \mathbb{O}$
 (j) $\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 \in [0, \sqrt{2}]$
 (k) $\exists x \in \mathbb{N} : (x + 1) \notin \mathbb{N}$
 (l) $\exists a \in \mathbb{N} : \nexists b \in \mathbb{Z} ; |a - b| \in \mathbb{N}$
 (m) $\nexists a \in \mathbb{Z} : (\frac{a}{2} \in \mathbb{Z}) \wedge (\frac{a}{3} \in \mathbb{Z})$
 یا $\forall a \in \mathbb{Z} : (\frac{a}{2} \notin \mathbb{Z}) \vee (\frac{a}{3} \notin \mathbb{Z})$

۱۰

c. $\text{راست} = (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
 $\equiv (q \vee \sim p) \vee (r \vee \sim p)$
 $\equiv (q \vee r) \vee \sim p$
 $\equiv p \Rightarrow (q \vee r) = \text{چپ}$

d. $\text{راست} = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
 $\equiv (q \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim p)$
 $\equiv (q \wedge r) \vee \sim p$
 $\equiv p \Rightarrow (q \wedge r) = \text{چپ}$

۱۱

e. $\text{چپ} = p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
 $\equiv (q \Rightarrow r) \vee \sim p$
 $\equiv (r \vee \sim q) \vee \sim p$
 $\equiv (r \vee \sim p) \vee \sim q$
 $\equiv (p \Rightarrow r) \vee \sim q$
 $\equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r) = \text{راست}$

f. $\text{چپ} = \sim p \Rightarrow \sim (p \wedge q)$
 $\equiv \sim (p \wedge q) \vee p$
 $\equiv \sim p \vee \sim q \vee p \equiv T = \text{راست}$

۱۲

۹ از نکته‌ی ۶ که عکس نقیض است استفاده می‌کنیم:

● اگر عددی مربع کامل باشد آنگاه تعداد شمارنده‌های مثبت آن فرد است.

اثبات: می‌دانیم تعداد شمارنده‌های مثبت عدد n که در آن

$$n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot P_k^{\alpha_k}$$

به عوامل اول تجزیه شده است برابر است با:

$$? = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$$

حال اگر عدد مربع کامل باشد تمام α_i ها زوج و در نتیجه تمام پرانترهای $\alpha_i + 1$ فرد شده و حاصل ضرب آن‌ها فرد است.

* **استدلالی دیگر:** اگر عدد n به صورت $n = a \cdot b$ به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی نوشته شود یا $\sqrt{n} = a = b$ (اگر n مربع کامل باشد) و یا این‌که یکی از دو عدد a و b از $\sqrt{n}$ کم‌تر و یکی از آن دو عدد از $\sqrt{n}$ بیش‌تر است بنابراین به‌ازای هر شمارنده‌ای کوچک‌تر از $\sqrt{n}$ برای n یک و فقط یک شمارنده بزرگ‌تر از $\sqrt{n}$ نیز وجود دارد. به این معنا که تعداد شمارنده‌های مثبت کوچک‌تر از $\sqrt{n}$ برای n با تعداد شمارنده‌های مثبت بزرگ‌تر از $\sqrt{n}$ برابر است حال اگر n مربع کامل باشد با احتساب $\sqrt{n}$ که یکی از شمارنده‌های n می‌شود تعداد شمارنده‌های n فرد به‌دست می‌آید.

فرم از دفتر بعد از ملاقات با مدیر است پس این اتفاق در روز شنبه رخ داده است و در نتیجه توصیه نامه را از معلم B گرفته است.

صبح	بعد از ظهر	
مدیر - معلم B	دفتر	شنبه
		یکشنبه
معلم A	معلم B	دوشنبه
دفتر	مدیر	سه شنبه
دفتر - معلم A	مدیر	چهارشنبه
	دفتر	پنجشنبه

۱۸ فرض کنید کامران راستگو باشد در این صورت با توجه به جمله‌ی (۱)، سعید دروغگو است و با توجه به جمله‌ی (۲) که محسن به کامران گفت: «تو دروغ‌گویی» چون کامران را راستگو فرض کردیم پس محسن دروغگو است.

با این شرایط با توجه به جمله‌ی ۳ پوریا به محسن گفته «تو دروغ‌گویی»، این جمله راست است و در ضمن پوریا گفته هر دو ی آن‌ها (کامران و سعید) دروغگو هستند، این جمله «دروغ است» چون فرض ما این بود که کامران راستگو است.

در صورت سؤال آمده، هر یک از این افراد یا همیشه راست می‌گویند، یا همیشه دروغ، اما با فرض ابتدایی ما (که کامران راستگو است) به این نتیجه رسیدیم که پوریا در بخشی از گفته‌هایش راست گفته و در بخش دیگر دروغ بنابراین کامران دروغگو است.

محسن گفته: کامران دروغگو است، پس محسن راستگو است.

و در نهایت نیز معلوم می‌شود پوریا دروغگو است.

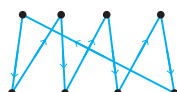
۱۹ چون هیچ دو نفری متقابلاً به هم نگاه نمی‌کنند دو حالت ممکن است پیش آید:

I. این ۸ نفر را بتوان به دو گروه ۴ نفری چنان تقسیم کرد که



مطابق شکل روبه‌رو به هم نگاه کنند.

II. این ۸ نفر به صورت شکل زیر به یکدیگر نگاه کنند:



$$(n) \exists x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} \neq x + 3$$

$$(o) \exists n \in \mathbb{N} : (2^n + 1) \notin P$$

$$(p) \exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$$

۱۳ اگر همه راستگو بودند آن‌گاه مجموع تعداد افرادی که به آن سه سؤال جواب مثبت می‌دهند برابر ۲۵۳ می‌شد. اگر یکی از آن ۲۵۳ نفر دروغگو باشد آن‌گاه یک جواب مثبت به منفی و دو جواب منفی به مثبت تبدیل شده و مجموع کل جواب‌های مثبت از ۲۵۳ به ۲۵۴ تبدیل می‌شود. بنابراین به ازای هر دروغگو یک جواب مثبت به مجموع جواب مثبت‌ها اضافه می‌شود. چون اعداد داده شده برابر ۳۰۳ است بنابراین تعداد دروغگوها برابر ۲۵۳ - ۳۰۳ یعنی ۵۰ نفر است.

۱۴ چون به غیر از مینا فقط شهره دختر گروه است با توجه به جمله‌ی دوم معلوم می‌شود که شهره تخم‌مرغ برداشته است. طبق جمله‌ی سوم، رضا شیر یا ذرت نخورده است، پس با توجه به جمله‌ی اول، رضا برادر مینا نیست، بنابراین احمد برادر مینا است و احمد شیر خورده است. رضا ذرت هم نخورده، پس رضا کره خورده است و در نتیجه مینا ذرت خورده است.

۱۵ در جمله‌ی اول آمده است: «مهندس برق از حسین کوچک‌تر است» معلوم می‌شود که حسین مهندس برق نیست. در جمله‌ی دوم آمده است: «همسر ناشر با همسر حسین نسبت فامیلی دارد» بنابراین حسین ناشر نیست، در نتیجه حسین معلم است.

مهندس برق دامغانی نیست، پس یا سرابی است یا قزوینی و از آن‌جا که ناشر سرابی است پس مهندس برق اهل قزوین است و حسین اهل دامغان است.

در جمله‌ی سوم رسول می‌گوید در قزوین نبوده است، بنابراین او مهندس برق نیست و چون معلم، حسین است در نتیجه رسول ناشر است و اهل سراب. و در نهایت معلوم می‌شود سهراب مهندس برق است و اهل قزوین.

۱۶ در مورد توج دو حالت وجود دارد:
حالت اول: توج در دزدی شرکت نداشته باشد که در این صورت سه اتفاق ممکن است رخ دهد:

۱. نعمت در دزدی باشد که چون نعمت بدون کمک فرزند کاری نمی‌کند پس فرزند در دزدی شرکت داشته است.

۲. فرزند در دزدی باشد.

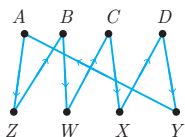
۳. هر دو نفر نعمت و فرزند در دزدی باشند.

حالت دوم: توج در دزدی شرکت داشته باشد که چون رانندگی بلد نیست پس حتماً همکارش یا فرزند است یا نعمت که اگر نعمت باشد فرزند هم حتماً هست. بنابراین در هر حالی فرزند در دزدی بوده است.

۱۷ اطلاعات مربوط به مسئله را در جدول زیر مشاهده می‌کنید:
با توجه به این‌که علی ثبت‌نام خود را در یک روز کامل کرده است و گرفتن



وضعیت دوم: C و D به ترتیب در خانه‌های ۵ و ۷ باشند که در این حالت به شکل زیر خواهیم رسید که با تمام شرایط سازگار است:



۲۰ تمام حالاتی که حاصل ضرب ۳ عدد طبیعی برابر ۳۶ باشد عبارتند از:

- | | |
|-------------|-------------|
| ۱) ۱, ۱, ۳۶ | ۲) ۱, ۲, ۱۸ |
| ۳) ۱, ۳, ۱۲ | ۴) ۱, ۴, ۹ |
| ۵) ۱, ۶, ۶ | ۶) ۲, ۲, ۹ |
| ۷) ۲, ۳, ۶ | ۸) ۳, ۳, ۴ |

مجموع اعداد موجود در حالات هشت‌گانه‌ی فوق به ترتیب عبارتند از:

- | | |
|-------|-------|
| ۱) ۳۸ | ۲) ۲۱ |
| ۳) ۱۶ | ۴) ۱۴ |
| ۵) ۱۳ | ۶) ۱۳ |
| ۷) ۱۱ | ۸) ۱۰ |

اگر پلاک یکی از اعداد ۱۰، ۱۱، ۱۴، ۱۶، ۲۱ و ۳۸ می‌بود و ریاضیدان A آن را می‌دانست آن‌گاه جواب به صورت منحصر به فرد مشخص می‌شد و نیازی نبود که ریاضیدان B بگوید که اگر آن را می‌دانستی باز هم نمی‌توانستی سن بچه‌ها را به دست آوری، معلوم می‌شود که پلاک ۱۳ بوده و برایش دو دسته جواب وجود دارد حالت ۵ یا ۶. با راهنمایی‌ای که کرده است یعنی بزرگ‌ترین آن‌ها در اتاق بالا خوابیده است معلوم می‌شود حالت ۶ درست است چون در حالت ۵ بزرگ‌ترین وجود ندارد.

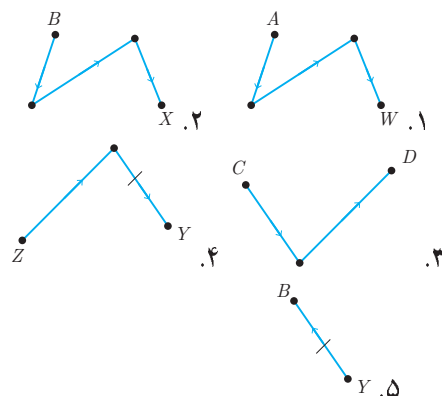
۲۱ ده دقیقه‌ی نخست: سرخ شدن روی کتلت‌های A و B

ده دقیقه‌ی دوم: سرخ شدن روی کتلت C و پشت کتلت A

ده دقیقه‌ی سوم: سرخ شدن پشت کتلت‌های B و C

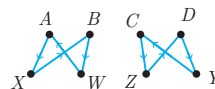
پس کم‌ترین زمان ممکن ۳۰ دقیقه است.

جملات گفته شده در صورت سؤال به اشکال زیر می‌باشند:



بررسی حالت I.

وضعیت اول: اگر جملات ۱ و ۲ در یک چهارضلعی رخ دهند آن‌گاه به شکل زیر خواهیم رسید:

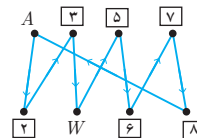


که با شرط ۴ سازگاری ندارند.

وضعیت دوم: اگر جملات ۱ و ۲ در دو چهارضلعی متفاوت رخ دهند چون C و D در دو چهارضلعی متفاوت قرار می‌گیرند آن‌گاه این شرایط با جمله‌ی ۳ سازگاری ندارد، بنابراین حالت I رخ نمی‌دهد.

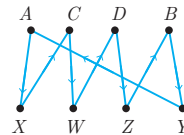
بررسی حالت II.

برای محقق شدن شرط ۱ مطابق شکل زیر A را در خانه‌ی ۱ و W را در خانه‌ی ۴ قرار می‌دهیم:



دو وضعیت پیش می‌آید:

وضعیت اول: C و D به ترتیب در خانه‌های ۳ و ۵ باشند که در این حالت به شکل زیر خواهیم رسید که با شرط ۴ سازگاری ندارد.





تمرین

درس ۱

۱

کدام یک از جملات زیر گزاره و کدام یک گزاره‌نما هستند؟

(الف) عدد ۱۱ از عدد ۱۱۱ بزرگ‌تر است.

(ب) کتاب‌های انتشارات خوشخوان حرف نداره!

(ج) انتشارات خوشخوان تا ابتدای سال ۱۳۹۶ به تعداد ۷۱۱ عنوان

کتاب چاپ کرده است.

(د) تعداد اعداد اول سه‌رقمی برابر k است.(ه) در پرتاب سه تاس احتمال آمدن مجموع a برابر $\frac{1}{77}$ است.

(و) کدام حیوان است که هم پرنده است و هم پستاندار؟

(ز) پدرم ماشینش را گران خریده است.

(ح) اعداد طبیعی x, y و z یافت نمی‌شوند که برای n های طبیعیبزرگ‌تر از ۲ تساوی $x^n + y^n = z^n$ برقرار باشد.(ط) تعداد ارقام عدد 3^{1396} از تعداد ارقام عدد 2^{2017} بیش‌تر است.(ی) رقم یکان عدد طبیعی $A = 2^k + 2^{k+1} + 2^{k+2} + 2^{k+3}$ برابر ۰ است. ($k \in \mathbb{W}$)

۲

در جاهای خالی عدد یا عبارتی چنان قرار دهید تا گزاره‌های

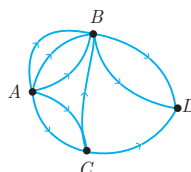
حاصل ارزش‌دهی داشته باشند:

(الف) تعداد شمارنده‌های مثبت عدد 360 از تعداد شمارنده‌های مثبتعدد 120 تا بیش‌تر است.

(ب)

در شکل مقابل مربع می‌توان رسم کرد
که هر چهار رأس آن‌ها نقاطی از نقاط داده
شده باشند.(ج) در بین اعداد طبیعی کوچک‌تر از 10^0 ، عدد اول وجود دارد.(د) $7 \in \{9, 11 - \text{}, 3\}$ (ه) هر یک از زوایای داخلی ضلعی منتظم برابر 172° است.(و) مجموع اعداد طبیعی از 53 تا 94 برابر است.(ز) در تابع $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ حاصل عبارت S برابر است که در آن:

$$S = f\left(\frac{1}{14}\right) + f\left(\frac{2}{14}\right) + \dots + f\left(\frac{13}{14}\right)$$

(ح) در شکل زیر به طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت.

۳

مجموعه جواب هر یک از گزاره‌نماهای زیر را مشخص کنید:

(الف) a چنان است که $24 = a^2 + 2a^2$.(ب) X زیرمجموعه‌ای از $A = \{1, 2, 3, 4\}$ است به‌طوری‌که

$$X \cap \{2, 3, 5\} = \{2\}$$

(ج) اگر تمام اعداد چهاررقمی قابل ساخت با ارقام ۱، ۲ و ۳ را

از کوچک به بزرگ مرتب کنیم آن‌گاه رتبه‌ی عدد 2122 برابر k می‌شود.(د) اگر تمام مکعب کامل‌ها را بر ۷ تقسیم کنیم آن‌گاه S مجموعه‌ی

باقی‌مانده‌های حاصل است.

۴

نقیض هر یک از عبارات زیر را بنویسید:

(الف) در هر مثلث قائم‌الزاویه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.

(ب) بعضی از ژاپنی‌ها سیاه‌پوست هستند.

(ج) برای هر عدد طبیعی مانند a عددی اول مانند b چنان یافتمی‌شود که $a \geq b$.

(د) در دانمارک هیچ فردی یافت نمی‌شود که در یکی از روزهای شنبه

یا پنج‌شنبه متولد شده باشد.

(ه) اگر عدد a مربع کامل باشد آن‌گاه تعداد شمارنده‌های مثبت آن

فرد است.

(و) عددی که بر 24 بخش‌پذیر باشد هم بر 2 بخش‌پذیر است و هم بر

۳.

(ز) عدد ۱ شمارنده‌ی تمام اعداد طبیعی است.

(ح) اگر عدد a بر عدد b بخش‌پذیر باشد آن‌گاه عدد b اول است وعدد a زوج.(ط) عدد $\sqrt{2}\sqrt{2}$ گنگ است.(ی) اگر مربع عددی بر 54 بخش‌پذیر باشد آن‌گاه آن عدد هم بر 2 بخش‌پذیر است و هم بر 9 .

(ک) وجود دارد یک چهارضلعی‌ای که قطرهايش همدیگر را نصف

می‌کنند ولی نه زاویه‌ی قائمه دارد و نه زاویه‌ی منفرجه.

(ل) اگر استقلال از پرسپولیس ۶ تا گل خورده است پس آن‌گاه یا

استقلال سرور پرسپولیس بوده است و یا پرسپولیس سرور استقلال.

(م) اگر کسی تمام تمرینات این کتاب را به درستی حل کند، تیزهوش

است.

(ن) رقم یکان بزرگ‌ترین عدد اول پنج‌رقمی برابر ۳ است.

(س) در پرتاب یک سکه اگر سکه رو بیاید آن‌گاه دو تاس قرمز و سبز را

با هم پرتاب می‌کنیم.



$$(f) \quad r \Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv (r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$$

$$(g) \quad r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv (r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q)$$

$$(h) \quad r \vee (p \Rightarrow q) \equiv (r \vee p) \Rightarrow (r \vee q)$$

$$(i) \quad r \vee (p \Leftrightarrow q) \equiv (r \vee p) \Leftrightarrow (r \vee q)$$

$$(j) \quad (p \vee q) \wedge (p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \Rightarrow q) \equiv (q \Rightarrow p)$$

$$(k) \quad p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$$

کدام یک از عبارات منطقی زیر با عبارت

$$(B \wedge \sim D) \vee (\sim C \wedge D)$$

هم‌ارز است؟

(الف) $(B \vee \sim C) \wedge (\sim C \vee D)$

(ب) $(B \vee \sim D) \wedge (C \vee D)$

(ج) $(B \vee D) \wedge (\sim C \vee \sim D)$

(د) $(B \vee \sim D) \wedge (\sim C \vee D)$

(ه) $(B \vee D) \wedge (C \vee \sim D)$

«المپیاد کامپیوتر در سال ۱۳۷۵»

۱۰ ثابت کنید اگر مربع عددی حقیقی گنگ باشد آن‌گاه خود آن عدد نیز گنگ است.

۱۱ هر یک از عبارات زیر را با نوشتن نماد سورها به زبان ریاضی بازنویسی کنید:

a. بعضی از اعداد طبیعی عددی اول هستند.

b. وجود دارد عددی اول که عددی زوج باشد.

c. هر مربع کاملی حداقل بر یکی از اعداد ۲ یا ۳ بخش پذیرند.

d. عدد حقیقی‌ای وجود ندارد که اگر مربع آن بر ۷ بخش پذیر باشد آن‌گاه خودش بر ۷ بخش پذیر نباشد.

e. شرط لازم و کافی برای مکعب کامل بودن هر عدد طبیعی آن است که رقم یکان آن عدد ۷ باشد.

f. برای هر پیشامد در فضای نمونه، احتمال در بازه‌ی $[0, 1]$ قرار دارد.

g. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر مربع کاملی در تقسیم بر ۴، برابر ۰ یا ۱ است.

h. هر نقطه‌ای که روی نیم‌ساز یک زاویه قرار داشته باشد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و بالعکس.

i. هر عدد حقیقی مثبت از هر عدد صحیح منفی بزرگ‌تر است.

j. عدد طبیعی‌ای وجود ندارد که از همه‌ی اعداد صحیح کوچک‌تر باشد.

(ع) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهاش منصف یکدیگر باشند.

۵ گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

p: معادله‌ی $x^2 + 3x - 1 = 0$ دو ریشه‌ی مثبت دارد.

q: عدد $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ عدد حقیقی است.

r: تعداد شمارنده‌های مثبت عدد 100 برابر ۸ است.

با توجه به ارزش درستی گزاره‌های فوق ارزش درستی هر یک از گزاره‌های ترکیبی زیر را تعیین کنید:

(a) $q \Rightarrow (p \vee r)$

(b) $\sim p \wedge (q \vee \sim r)$

(c) $(q \Rightarrow r) \vee (\sim p \Rightarrow \sim r)$

(d) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (q \vee s)$

(e) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

(f) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \sim r)$

۶ جدول ارزش درستی هر یک از گزاره‌های ترکیبی زیر را رسم کنید:

(a) $p \wedge (\sim p \Rightarrow T)$

(b) $(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$

(c) $(\sim p \vee q) \wedge p$

(d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$

(e) $(p \wedge q) \vee \sim (p \wedge r)$

(f) $(p \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow (q \vee \sim p)$

۷ هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ثابت کنید:

(a) $(p \vee \sim q) \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)] \equiv p \wedge (\sim q \vee r)$

(b) $(p \Leftrightarrow q) \wedge (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv F$

(c) $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

(d) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

(e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

(f) $[\sim p \wedge [(q \Rightarrow r) \vee \sim p]] \Rightarrow \sim (p \wedge q) \equiv T$

۸ هم‌ارزی‌های زیر را بدون استفاده از جدول اثبات کنید:

(a) $p \vee (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \vee r)$

(b) $\sim (p \vee q) \vee (p \wedge q) \equiv (p \Leftrightarrow q)$

(c) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim q \vee \sim p) \equiv q \wedge \sim p$

(d) $(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv \sim p \Rightarrow p$

(e) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge r \equiv r$



۱۲

هر یک از عبارات زیر را به زبان فارسی روان بنویسید:

(k) $\nexists a \in \mathbb{Z} : \left(\frac{a}{5} \in \mathbb{Z}\right) \vee \left(\frac{a}{7} \in \mathbb{Z}\right)$

(l) $\forall n \in \mathbb{N} : (n - 7) = 1^{\circ}k, k \in \mathbb{Z}$

(m) $\exists a \in \mathbb{N} : (n \in \mathbb{O}) \Rightarrow (n^2 \in \mathbb{E})$

(n) $\forall n \in \mathbb{N} : (\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = 8k + 1)$

(o) $\exists i \in \mathbb{N} : \frac{2^i - 6}{10} \in \mathbb{N}$

۱۳

نقیض هر یک از گزاره‌های پانزده‌گانه‌ی موجود در دو سؤال قبل

را بنویسید.

۱۴

هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید:

(الف) $(2x - 2)^2 \leq 25$

(ب) $(2x - 4)^2 \geq 36$

۱۵

هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

(الف) $(3x - 2)(5x + 3)(2x^2 - 11x + 14) = 0$

(ب) $(2x - 1 + y)^{1398} + |2y + x + 4| = 0$

۱۶

اگر

$$(y - x)^{2020} + \sqrt{2x + 3y + 4z - 4} + |-3x + y - 2z - 1|^{1399} = 0$$

آن‌گاه حاصل $x + 5y + 2z$ چقدر است؟

۱۷

آیا از رابطه‌ی $(x - y)^{1396} + (y - z)^{1398} + (z - x)^{1400} = 0$ می‌توان نتیجه گرفته که $x = y = z$ ؟

۱۸

آیا از رابطه‌ی $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$ می‌توان نتیجهگرفت که $x = y = z$ ؟

۱۹

مجموعه جواب هر یک از گزاره‌نماهای زیر را مشخص کنید:

(الف) $a \leq \frac{70}{a + 3}$

(ب) عدد صحیح a بر ۷ بخش پذیر است.(ج) عدد طبیعی a ، ۲ واحد از مضرب ۶ بیش تر است.(د) عدد طبیعی a در تقسیم بر ۲ باقی‌مانده‌ی ۱ و در تقسیم بر ۳

باقی‌مانده‌ی ۲ دارد.

(ه) عدد مربع کامل a در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ی ۳ دارد.

(و) مجموع مکعبات دو عدد طبیعی برابر ۲۱۷ است.

(ز) $D = \mathbb{N}$ و $2^x + \frac{1}{3^x} = \frac{65}{8}$

(ح) ناسی را پرتاب می‌کنیم و

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ و } P(\{x\}) = \frac{1}{6}$$

۲۰

نقیض هر یک از عبارات زیر را بنویسید:

(الف) عدد $2^n - 1$ عددی اول است یا ۱۳۶۹ مربع کامل نیست.

(ب) $6 \leq x < 17$

(ج) $\sqrt{\pi}$ عددی حقیقی است و ۵- عددی اول است و $\frac{4+3}{4+6} = \frac{3}{6}$

(د) $\{4, 5, 6\} \in \pi$ یا 4 عددی گویاست یا اگر $a > b$ آن‌گاه $a^2 > b^2$

(ه) اگر فردا سه‌شنبه باشد آن‌گاه اگر فردا به سینما بروم بلیط سینما نصف قیمت خواهد بود.

(و) $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \vee q)]$

(ز) اگر عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد آن‌گاه با اول است یا مرکب.

(ح) بعضی از فیلم‌ها را همه‌ی افراد می‌پسندند.

(ط) همه‌ی شعرهای سعدی را همه‌ی ایرانیان دوست دارند.

(ی) یعنی اگر نباشی کار دلم تمام است.

(ک) چشم ندارد خلاص هر که در این دام رفت.

۲۱

ارزش درستی هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

(الف) $\forall x \in \mathbb{Z} : x(x + 1) = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$

(ب) $\exists x \in \mathbb{R} ; \sqrt{x} + |x + 1| = 0$

(ج) $\forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \frac{1}{x} \geq 2$

(د) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x^2 - x + 1 > 0$

(ه) $\exists x \in \mathbb{N} : 3x^7 + 6x^5 - 1397 = 0$

(و) در آمار هر متغیر اسمی یک متغیر کیفی است.

(ز) $\forall x \in \mathbb{R} ; \exists y \in \mathbb{R} : y^2 - 10y + 1 = x$

(ح) $\forall x \in \mathbb{R} ; \exists y \in \mathbb{R} : y^3 + y + 1 = x$

(ط) $\forall x \in \mathbb{R} : (x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 1$

(ی) شرط لازم و کافی برای آن که یک چهارضلعی مستطیل باشد آن است که قطرهاش برابر باشند.

۲۲

اگر $p \vee q \equiv p \vee r$ و $p \wedge q \equiv p \wedge r$ آن‌گاه ثابت کنید $q \equiv r$.

۲۳

اگر گزاره‌ی مرکب $(\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge p)$ همواره نادرست باشد آن‌گاه ثابت کنید $p \equiv q$.

۲۴

اگر $p \Rightarrow q \Rightarrow q \Rightarrow p$ آن‌گاه ثابت کنید $p \equiv q$.

۲۵

اگر ارزش گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim q \Rightarrow p$ مخالف هم باشند آن‌گاه ثابت کنید گزاره‌ی q همواره نادرست است.

۲۶

در هر یک از هم‌ارزی‌های زیر در جاهای خالی کدام یک از ادات ربط « $\wedge$ »، « $\vee$ »، « $\Rightarrow$ » یا « $\Leftrightarrow$ » را می‌توان قرار داد تا هم‌ارزی برقرار باشد (ممکن است ۱ یا بیش از یکی از آن ادات جواب باشند):

(الف) $F \equiv (\text{میان‌های مثلث هم‌مسند}) \square (2x^2 + 1)$ (مرکب است)

(ب) $[(\sqrt{x} - 2 + |y - 3| = 0) \Rightarrow (x = 2 \wedge y = 3)] \square [\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 > 0]$

(ج) $[(a^2 > b^2) \Rightarrow (a > b \vee a < -b)] \square [\exists x \in \mathbb{N} : (x + 2)(x + 3) = 0] \equiv T$



۳۰ به چند طریق می‌توان جدول ارزش گزاره‌ها را کامل کرد به طوری که تمام حالات آمده باشند؟

(ج)			(ب)		(الف)	
p	q	r	p	q	p	q
د	د	د		د		
د	ن	ن	ن		ن	د
د		ن		د		
	ن		د			
ن	د					
	د	ن				
ن						

۳۱ در جدول ارزش گزاره‌ها برای چهار گزاره‌ی p, q, r, s در چند سطر از سطور ۱۶ گانه حداقل دو تا از گزاره‌ها درست هستند؟

۳۲ اگر ارزش گزاره‌ی $r \Rightarrow (p \wedge q) \sim$ نادرست باشد آن‌گاه ارزش گزاره‌ی $r \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ را بیابید.

۳۳ گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:
 p : شهر آلوده است.

q : محمد به مسافرت می‌رود.

r : دانشگاه تعطیل می‌شود.

s : محمد در خانه می‌ماند.

عبارت‌های زیر را به زبان فارسی بازنویسی کنید:

(الف) $p \vee \sim q$

(ب) $p \Rightarrow s$

(ج) $(p \wedge r) \Rightarrow (q \vee s)$

(د) $\sim p \Leftrightarrow r$

(ه) $(p \vee \sim r) \Rightarrow \sim s$

(و) $\sim (p \wedge (q \vee s))$

۳۴ با گزاره‌های اشاره شده در تمرین قبلی، هر یک از جملات زیر را با زبان منطق ریاضی بازنویسی کنید.

(الف) دانشگاه تعطیل است یا شهر آلوده نیست.

(ب) اگر شهر آلوده باشد آن‌گاه یا محمد به مسافرت می‌رود یا در خانه نمی‌ماند.

(ج) شرط لازم برای آن‌که شهر آلوده باشد آن است که محمد به مسافرت برود.

(د) شرط کافی برای آن‌که دانشگاه تعطیل شود آن است که محمد در خانه بماند.

۲۷ نتیجه‌ی استدلال‌های زیر را مشخص کنید:

(الف) - در هر مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.

- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC نقطه‌ی M وسط BC است و $\hat{A} = 90^\circ$ و $BC = ۱۲$.

نتیجه:

(ب) - اگر من خوب درس بخوانم نمره‌ی خوبی خواهم گرفت.

- من نمره‌ی خوبی نگرفته‌ام.

نتیجه:

(ج) - حاصل ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

- اعداد $۱۳۹۷, ۱۳۹۸, ۱۳۹۹$ سه عدد طبیعی متوالی هستند.

نتیجه:

(د) - هیچ یک از اعداد اول بزرگ‌تر از ۳ بر ۳ بخش پذیر نیست.

- مربع غیر مضارب ۳ در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ی ۱ دارند.

- مربع اعداد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ی ۱ دارند.

- اگر عددی در تقسیم بر هر دو عدد طبیعی m و n باقی‌مانده‌ی α داشته باشد آن‌گاه آن عدد در تقسیم بر m, m, m و n نیز باقی‌مانده‌ی α خواهد داشت.

نتیجه:

۲۸ هر یک از گزاره‌های زیر با چه گزاره‌ی ساده‌ای هم‌ارز است؟

(الف) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \vee [q \wedge (p \Rightarrow \sim q)]$

(ب) $(q \vee p) \vee \sim q$

(ج) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

(د) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

(ه) $(p \Rightarrow p) \vee F$

(و) $(p \Leftrightarrow q) \wedge (\sim p \Leftrightarrow q)$

(ز) $[p \wedge (\sim q \vee r)] \vee (\sim p \vee (q \wedge \sim r))$

(ح) $(q \wedge p \wedge \sim r) \vee [p \wedge (\sim q \vee r)]$

(ط) $(p \wedge \sim p) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

(ی) $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))$

۲۹ اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 7\}$ دایمته‌ی تغییرات باشد آن‌گاه ارزش هر یک از گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید:

(الف) $\exists x \in A : -3x + 2 = ۱۴$

(ب) $\forall x \in A : 2x + 3 \geq -3$

(ج) $\forall x \in A : 9 \leq x^2 \leq ۱۶$

(د) $\exists x \in A : 2x - 6 < 2$

(ه) $\forall x \in A : (x^2 + 2x^2 + 5) \in \mathbb{N}$

(و) $\exists x \in A : (x - ۱)^2 + (x + ۴)^2 = ۵۹$





۸) شرط لازم و کافی برای آنکه دانشگاه تعطیل نشود یا محمد به مسافرت برود آن است که شهر آلوده باشد.

۹) محمد به مسافرت نمی‌رود و اگر شهر آلوده باشد آنگاه دانشگاه تعطیل می‌شود.

۳۵ در جدول زیر به جای $\square$ کدام یک از ادات ربط «۸»، «۷»، « $\Rightarrow$ » و یا « $\Leftrightarrow$ » می‌تواند قرار گیرد:

p	q	$(p \wedge q) \square \sim p$
د	د	ن
د	ن	د
ن	د	ن
ن	ن	ن

● معماهایی از منطق ریاضی:

۳۶ روستایی صد خانه دارد. هر ۱۰ خانه‌ای را که در نظر بگیریم، حداقل ۳ آنتن روی بام‌هایشان هست (ممکن است روی یک بام چند آنتن باشد). هر سه آنتنی را که در نظر بگیریم حداقل دو کلاغ روی آن‌ها نشسته است (ممکن است روی یک آنتن چند کلاغ باشد). این روستا حداقل چند کلاغ دارد؟



۳۷ این سه نفر را در نظر بگیرید: سعید، احمد و مهدی. یکی از آن‌ها تاجر است، یکی معمار است و یکی هم کفاش. می‌دانیم:

- کفاش خواهر یا برادری ندارد و بین این افراد از همه کوچک‌تر است.
- مهدی با خواهر سعید ازدواج کرده و از تاجر بزرگ‌تر است.
- شغل هر یک از آن سه نفر را بیابید.

۳۸ مدتی بی‌کار بودم. خوشبختانه جلد ۴ شغل به من پیشنهاد شده است و در ۴ شرکت مختلف:

۱. حسابدار
 ۲. دفتردار
 ۳. معاون شرکت
 ۴. مشاور
- ولی من برای انتخاب ۳ معیار مهم دارم:

- نزدیکی محل کار به منزل
 - حقوق خوب
 - راحت بودن کار
- a. فقط یکی از این چهار شغل هر سه خواسته‌ی مرا تأمین می‌کند.
- b. سه تا از این شرکت‌ها از منزل ما به یک فاصله‌اند و چهارمی دورتر است.
- c. دو تا از این شغل‌ها راحت هستند.

d. فقط یکی از آن‌ها حقوق خوبی دارد.

e. هر کدام از این شغل‌ها حداقل یکی از خواسته‌های مرا تأمین می‌کند.

f. از لحاظ سختی یا راحتی کار مشاور بودن و معاون بودن وضعیت یکسانی دارند.

g. فاصله‌ی شرکتی که معاون بودن آن به من پیشنهاد شده از منزل ما، با فاصله‌ی شرکتی که شغل دفترداری را به من پیشنهاد داده از منزل ما مساوی است.

h. فاصله‌ی شرکتی که شغل دفترداری را به من پیشنهاد داده از منزل ما، با فاصله‌ی شرکتی که شغل حسابداری را به من پیشنهاد داده از منزل ما برابر نیست.

من کدام شغل را انتخاب خواهم کرد؟

۳۹ نیکی برای هر یک از خواهران کوچک‌تر و برادرش سه نوع غذا شامل کتلت، نیم‌رو و ماکارونی درست کرد. علی نیم‌رو نخورد و نیکی به او ماکارونی نداد. مریم هر سه نوع غذا را دوست دارد و پروین ماکارونی نمی‌خورد. مریم و علی به ترتیب چه غذاهایی خوردند؟ (هر کدام فقط یک نوع غذا خورد)

۴۰ از گاوصندوق یک شرکت مبلغ زیادی پول به سرقت رفته است. فقط ۳ نفر کلید این گاوصندوق را دارند: آرش، مسعود و سامان. پلیس این سه نفر را دستگیر کرد و مطمئن است که دزدی، کاری یکی از این سه نفر است. ضمن بازجویی، هر یک از این سه نفر دو جمله گفتند:

آرش: من دزدی نکرده‌ام. مسعود هم دزدی نکرده است.
مسعود: آرش دزدی نکرده است. سامان دزدی کرده است.
سامان: من دزدی نکرده‌ام. آرش دزدی کرده است.
معلوم شد که یکی از این سه نفر هر دو جمله‌اش نادرست است. دیگری هر دو جمله‌اش درست است و یکی هم یکی از جمله‌هایش نادرست است. چه کسی دزدی کرده است؟

۴۱ در مسابقه‌ی دوی صد متر چهار نفر به نام‌های فرید، حسین، امید و طاهار شرکت کردند. سه نفر از تماشاچی‌ها در مورد نتایج مسابقه به صورت زیر صحبت کردند:



تماشاچی اول: به نظرم طاهار دوم و امید سوم شد.
تماشاچی دوم: نه! طاهار به مقام اول رسید و فرید دوم شد.