حسابان (۲)

پایه دوازدهم

مؤلفان:

حسین شفیع‌زاده، عباس نعمتی‌فر

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

خنده و گریه

تا حالا شده توی یه مکان عمومی مثل رستوران، بانک و... یه موضوع خنده‌داری براتون اتفاق بیفته بخواید از ته دل بخندید، اونم در حد انفففجار؟!!! چی کار می‌کنید؟ خجالت رو می‌ذارید کنار و از ته دل می‌خندید اونم طوری‌که همه با خنده‌تون بخندن یا نه، یکم چاشی شو می‌آرید پایین طوری‌که چند نفر اطرافتون بفهمن یا فقط به یه لبخند کوچک بسنده می‌کنید؟!

حالا اگر یه اتفاق ناراحت‌کننده افتاده باشه چی؟ گریه‌تونو پهون می‌کنید، یا به چند قطره اشک اکتفا می‌کنید، یا نه بیشتر، با چشمای گریون شروع می‌کنید تو خیابون قدم زدن!

نمی‌دونم کدموشون منطقی به نظر میاد!!

از نظر شما کدومش درسته؟! خنده‌ای که باعث خنده دیگران بشه یا گریه‌ای که غم رو تو دل دیگران راه بده.

اگر خنده‌تون باعث شه که یه لحظه یه نفر از غم های دنیا رها شه، باید این کار رو بکنید یا نکنید؟! من که باشم می‌کنم (البته طوری‌که لودگی به نظر نیاد). اگر گریه‌تون باعث بشه بغض دل یه نفر دیگه بترکه و اونم شروع کنه به گریه، باید این کار رو بکنید یا نکنید؟! من که بشم می‌کنم.

خب شاید بگید که چی؟!

احتمالا هر کدوم از ما لذت خنده‌هایی که با خنده‌ی خودمون ایجاد کردیم رو تجربه کردیم. چه حس جالبی داره، وقتی بلند می‌خندی و همه به صدای خنده‌ی تو می خندن، یکی از ته دل و بدون قضاوت تو، یکی با دلیل اینکه چه خوب! دلش شاده و یکی با این فکر که بابا اینم رد داده. ولی هر کدوم با هر دیدی با تو همراه می‌شن شروع می کنن به خندیدن.

حس جالبیه اگر تجربه نکردید حتما تو یه مکان و فضای مناسب امتحان کنید (نرید وسط مراسم عزاداری بعد بگید حرفت جواب نداد).

هر کاری توش یه لذتی داره. اگر آدم ته دلش صاف و صادق باشه شاید کوچک‌ترین کارش هم همراه با لذت باشه.

شما تو چه چیزی استعداد دارید؟

من یکی از استعدادهامو تو ریاضی پیدا کردم، همه یه استعداد یا توانایی ندارن، به قول اساتید علوم تربیتی و اجتماعی، سی و چند شاخه‌ی توانایی و استعداد داریم که هر فردی می‌تونه توی چندتا از شاخه‌ها استعداد داشته باشه و هیچ کسی هم نیست که توی تمام شاخه‌ها توانایی داشته باشه. یکی استعداد ورزشی داره اونم نه تو همه‌ی رشته‌ها یکی شناگر خوبیه، یکی فوتبالیست، یکی ژیمناست، یکی تنیسور و ....، یکی استعداد تو هنر نقاشی‌داره، یکی مجسمه‌سازی، یکی بازیگری، یکی گلدوزی، یکی فرشبافی و ... ، یکی استعداد ریاضی داره، یکی فیزیک، یکی تاریخ، یکی ادبیات و ...

گفتم یه انسان تک بعدی نیست ممکنه یه تاجرِ ورزشکرِ مهندس باشی مثل علی دایی یا پزشکِ آهنگسازِ خواننده باشی مثل محمد اصفهانی یا استادِ مجریِ برنامه‌سازِ مهندس باشی مثل عادل فردوسی‌پور یا ...

حالا اگر بپرسید چطور باید استعدادهاتونو بشناسید می‌گم یکی از راه‌هاش مدرسه است که به دلیل سیستم آموزشی نادرست یا ناقص ممکنه نتونه کمک لازم رو بهتون بکنه. ولی شما می‌تونید استعدادتونو با مطالعه، مشاوره، روابط اجتماعی، علایق و ... پیدا کنید.

خـب یکـی از توانایی‌هـا و اسـتعدادهایی کـه مـن در دوران مدرسـه در خـودم پیـدا کـردم ریاضیـه، عاشـق ریاضـی‌ام شـاید بهتـر بگـم گاهـی دیوووـنه‌شـم. خـب بـر طبـق یـه قاعـده‌ی‌روانشانسـی بایـد دوسـت و همکاریـی داشـته باشـم کـه اونهـا هـم عاشـق یـا دیوونـه‌ی یـه شـاخه علمـی باشـن (بـازم می‌گـم صددرصـد نیسـت). اونـا هـم علاقـه، اسـتعداد و آرامشـون رو تـو ریاضـی، فیزیـک، شـیمی، هنـر، ادبیـات و ... یافتـن. بـاز هـم می‌گـم ممکنـه مـن همیـن آرامـش، هیجـان، عشـق و ... رو تـو گفتـن شـعر یـا نوشـتن متنـی مثـل همیـن متـن هـم داشـته باشـم (فکـر نکنیـن یـه آدم تک بعدی هستین هیچ آدمی تک بعدی نیست).

خوشخوان انتشاراتی ویژه‌ی دانش آموزان ممتاز

آره ایـن شـعار مـا در بـدو تاسـیس بـود؛ وقتـی کـه کسـی زیـاد بـه ممتازهـا اهمیـت نمـی داد! اگـر هـم بـود در حـد چنـد مدرسـه و چنـد کتـاب خـاص. مـا اومدیـم کـه بگیـم تـو همـه‌ی کشـور ممتـاز داریـم نـه فقـط شـهرهای بـزرگ. خواسـتیم بگیـم ممتازهایـی کـه تـوی روسـتای گرمسـیر و سردسـیر هسـتین مـا هواتونـو داریـم، چـون خودمـون هـم از همـون ریشـه‌ایم. خـب بـه مـرور مثـل هـر شـغل و حرفـه‌ای دوسـتان دیگـه هـم وارد زمینـه‌ی توجـه بـه دانش‌آمـوزان ممتاز شدن (ما با ممتازها بودیم وقتی ممتاز بودن مد نبود).

مـا می‌نوشـتیم تـا اونـی کـه مثـل خودمـون عاشـق درس و مبحـث خاصیـه سـیرآب بشـه. مـا تالیـف می‌کردیـم تـا دانش‌آموزهای خوبمون هی دنبال این کتاب اون کتاب نرن و گذشت ...

مـا بـه هدفمـون رسـیدیم، شـدیم ویـژه‌ی ویـژه ... . ولـی همیـن ویـژه بـودن یـه روزایـی شـد دردسـر، روزایـی کـه بـه دلیـل تغییـر فرهنـگ و شـرایط درس خونـدن (گاهـی بی‌ارزش شـدن ادامـه تحصیـل و کـم علاقگـی بـه علـم و بی‌ارزش شـدن مـدارج تحصیلـی)، دانشـگاه رفتـن سـاده‌تر از گذشـته شـد و کـم بهاتـر (کـه چـه خـوب) و شـکر کـه اسـترس کمتـر شـد و ای کاش کمتـر بشـه و روزی برسـه کـه روی دوش هیـچ جوووونـی اسـترس کنکـور نباشـه تـا راحـت بـه پرورش استعدادهای واقعیش فکر کنه و اونها رو فدای کنکور نکنه (ولی هنوز تشنه‌ها هستن).

بگذریـم، پـس از ۱۷ سـال می‌خواهیـم بگیـم کـه مـا نـه تنهـا علاقه‌منـدان هـر شـاخه‌ی علمـی خـاص مختـص بـه دبیرسـتان رو رهـا نکردیـم بلکـه می‌خواهیـم روش آموزشـی رو ارائـه بدیـم تـا هـر دانش‌آموزشـی بـا هـر اسـتعدادی بتونـه در زمینـه‌ی خـاص در حـد توانـش (تاکیـد می‌کنـم در حـد ظرفـش و نـه بیشـتر) رشـد کنـه تـا عـلاوه بـر ایجـاد علاقـه در زمینـه‌ی علمـی مـورد نظـر، بتونیـم راهـی رو بـرای رسـیدن بـه اهـداف آینـده‌اش بـاز کنیـم. شـاید ریاضـی بـرای مـن شـیرین باشـه و بـرای شـما سـخت، فیزیـک بـرای یکـی شـیرین باشـه و بـرای دیگـری سـخت، ولـی مهـم ایـن کـه یـاد بگیریـم رشـد کنیـم و راه رشـد کـردن رو یـاد بگیریـم. به قـول یـه جملـه معـروف مـا می‌خواهیـم به‌جـای ماهـی، ماهیگیـری (روش حـل، لـذت بـردن و فکـر کـردن) رو بـه شـما یـاد بدیـم تـا هـر کسـی بـه انـدازه‌ی توانـش بتونـه از دریـای بـزرگ جلـوی روش ماهـی بگیـره. یکـی بـا یـه ماهـی خودشـو سـیر می‌کنـه، یکـی بـا چنـد تـا خانـواده شو و یکی با ماهی‌های بیشتری جامعه و فرهنگشو.

امیـدوارم در سـالی کـه پیـش رو داریـد کلـی ماهـی از دریـای موفقیـت بگیریـد، کنکـور آینـده‌ی کسـی رو نمی‌سـازه شمایید که آینده رو می‌سازید.

ساختار

کتب‌های دوازدهمی که از انتشارات به چاپ رسیده، به شکل زیرند:

درسنامـه: درسـنامه‌ی هـر فصـل به‌صـورت جلسـه‌بندی بـه همـراه مثال‌هـا و تسـت‌های متنـوع ارائـه شـده، تـا ضمـن عمـق بخشـی بـه مطالـب موجـود در کتـاب درسـی، دانش‌آموزهـای عزیـز رو بـرای امتحان‌هـای مختلـف از جمله امتحان نهایی آماده کنن.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای: پرسش‌ها چهار دسته دارن:

۱. سطح ساده ۲. سطح متوسط ۳. سطح دشوار ۴. ترکیب سطوح

برای این‌که کتاب، برای بیشتر دانش‌آموزان قابل استفاده باشه، پرسش‌ها سطح‌بندی شده‌اند تا دانش‌آموزان متوسط به پایین لزوما دنبال پرسش‌های سطح سخت نرن و دانش‌آموزهای متوسط به بالا وقت خودشونو برای پرسش‌های ساده خیلی سپری نکنن. برای این‌که مهارت دوستای عزیز رو در تشخیص سوالات ساده، متوسط و سخت بالا ببریم، پرسش‌های ترکیب سطوح رو آوردیم تا هر دانش‌آموزی بتونه متناسب با سطح تواناییش سوالات مربوط به سطحشو تشخیص بده.

پرسش‌های تکمیلی فصل: چون بعد از تموم شدن هر جلسه دانش‌آموز با ذهنیت نکات همون بخش شروع به حل کردن سوالات می‌کنه، شاید این موضوع در نهایت ایده‌آل نباشه، چون هنر شما زمانی نشون داده می‌شه که بتونید تشخیص بدید هر سوال برای کدوم مبحثه، پس با آوردن سوالات ترکیبی با یه تیر دو نشون زدیم یکی بالا بردن قدرت تشخیص مبحث مرتبط با سوال و دوم مرور فصل.

سوالات کنکور مرتبط با فصل: سعی کردیم سوالات کنکور داخل و خارج سال‌های اخیر مربوط به هر فصل رو برای شما جمع کنیم تا با شکل سوالات کنکور هم آشنا بشید.

پاسخ کلیدی و تشریحی پرسش‌ها: هم پاسخ‌نامه‌ی کلیدی و هم تشریحی سوالات رو بعد از اتمام فصل آوردیم، حتی برای بعضی از سوالات بیشتر از یک راه‌حل آوردیم. راستی، همه به پاسخ‌نامه‌ی تشریحی حتما سر بزنن!!!!!!!

آزمون‌های سه گانه: در آخر هر فصل سه آزمون استاندارد برای کنکوری‌ای عزیز آوردیم تا سطح یادگیری مطالب رو برای خودشون بسنجن. راستی فقط جواب کلیدی‌رو داخل کتاب قرار دادیم تا خدایی نکرده اگر تو سوالی مشکل داشتید سعی کنید با جست‌وجو داخل کتاب یا مراجعه به دبیرتون به اون بخش مسلط بشین. (البته سعی می‌کنیم جوابا رو داخل سایت قرار بدیم تا دوستایی که احیانا مراجعه به دبیر براشون سخته دچار مشکل نشن).

آخر

با تشکر از تمام دوستانی که ما رو در تالیف و چاپ این کتاب یاری کردند و با طلب عفو و بخشش برای نواقص و کاستی‌ها از شما، برای همه‌ی شما در زندگی موفقیت و سربلندی رو از خداوند متعال خواستارم.

رسول حاجی‌زاده
مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلف

به نام دوست

یکی از شاخه‌های پرکاربرد ریاضیات، حساب دیفرانسیل و (حساب) انتگرال است که یکی مسائل آهنگ تغییر را بررسی می‌کند و در دیگری مسئله مساحت و نیز یافتن تابعی که آهنگ تغییر آن معلوم است، مورد توجه است. این دو با آن‌که از شاخه‌های ریاضیات محض هستند، در فیزیک و مهندسی بسیار پُر کاربردند؛ لذا یکی از ابزارهای توانمند فیزیکدانان و مهندسان محسوب می‌شوند.

در سال‌های اخیر، حساب دیفرانسیل و (حساب) انتگرال را به اختصار حسابان (دو حساب) می‌گویند. اما نگاه به ساختار کتب درسی جدید، این امر را نشان می‌دهد که عملاً کتاب‌های حسابان (۱) و حسابان (۲) مقدمه‌ای بر حسابان هستند و در واقع این دو حساب را به خوبی پوشش نداده‌اند، لذا، مطالعه کامل‌تر حسابان در تحصیلات تکمیلی انجام خواهد گرفت.

مباحث کتاب حسابان (۱) مقدمات درس حسابان محسوب می‌شوند. مطالب کتاب حسابان (۲) نیز که در ۵ فصل تدوین شده، نهایتاً حساب دیفرانسیل را (تا حدی) پوشش می‌دهد.

ما فصل اول کتاب حسابان (۱) را (به همراه مطالب ریاضی ۱) در کتاب ریاضیات پایه آورده‌ایم؛ اما مطالبی که در این کتاب بررسی می شوند، به صورت زیر هستند:

فصل ۱، تابع: در ابتدای فصل ۱ کتاب درسی مباحث مربوط به رسم نمودار بر اساس نمودار معلوم تابع $y=f(x)$ آورده شده است. بخشی از این درس مربوط به یادآوری مطالب ریاضی دهم است. ما در درس اول به مطالب رسم نمودار کتاب دهم و مطالب جدیدی که در کتاب دوازدهم آمده است، پرداخته‌ایم؛ سپس در دو درس ادامه‌ی فصل را بررسی کرده‌ایم.

فصل ۲، مثلثات: در این فصل، هر دو درس کتاب را به طور مبسوط مطالعه کرده‌ایم. نکته‌ی مهم آن‌که، اتحاد مربوط به $tan(a\pm b)$ و مسائل آن را در فصل مثلثات کتاب ریاضیات پایه در کنار سایر اتحادها آورده‌ایم؛ اما برای آن‌که، کتاب حسابان (۲) نقصی نداشته باشد، در این‌جا نیز آن‌ها را با مسائل جدیدی تکرار کرده‌ایم.

فصل ۳، حد و پیوستگی: از آن‌جا که غالب همکاران محترم قبل از تدریس فصل ۳ کتاب حسابان (۲)، فصل ۵ کتاب حسابان (۱) را مرور خواهند کرد، ما در این فصل، کل مباحث مربوط به حد را در قالب ۴ درس یک‌جا آورده‌ایم. دو درس اول مربوط به حسابان (۱) و دو درس بعدی مربوط به حسابان (۲) است.

فصل ۴، مشتق: در این قسمت، فصل ۴ کتاب درسی، در قالب ۳ درس بحث شده است، نکته مهم آن‌که در انتهای درس ۳ چند مطلب که در کتاب درسی به آن‌ها اشاره مستقیمی نشده، آمده است. علت آن است که با مطالعه‌ی این مطالب، پاسخ‌گویی به برخی سؤالات دیگر (به کمک مشتق) برای شما آسان‌تر خواهد شد؛ لذا توصیه می‌کنیم تا حد امکان مطالعه‌ی این قسمت را از دست ندهید.

فصل ۵، کاربردهای مشتق: در این فصل مهم‌ترین کابردهای مشتق، منطبق بر کتاب درسی بررسی شده‌اند.

ساختار این کتاب مشابه کتاب ریاضیات پایه است که برای دوری از زیاده‌گویی آن‌ها را ذکر نمی‌کنیم و به تأکید بر این مطلب بسنده می‌کنیم که در نگارش و تدوین درس‌نامه و سؤالات، چارچوب و اولویت‌های

کتاب درسی مورد توجه بوده است؛ اما تفاوت این کتاب با کتاب ریاضیات پایه در این است که در اینجا به دلیل وجود مباحث جدید سرعت پیشروی مطلب کندتر است و برای تفهیم مطالب از مثال‌های بیشتری استفاده شده است. توصیه می‌کنیم حتماً کتاب درسی و درس‌نامه این کتاب را مطالعه کنید و سپس به حل تست‌ها بپردازید.

امید است، ماحصل تلاش جمعی خوشخوانی‌ها، آقای رسول حاجی‌زاده (مدیر محترم انتشارات)، آقای وزیرزاده (مسئول تألیف)، آقایان علیرضا فاطمی و کامیار درزی (ویراستاران)، آقای مهدی امیدیگانه (صفحه آرا) و مؤلفان مورد نظر دانش‌آموزان عزیز و معلمین بزگوار واقع شود و ما را از نظرات خود بهره‌مند سازند؛ ان شاء ا... .

و سلام ما تقدیم شما باد

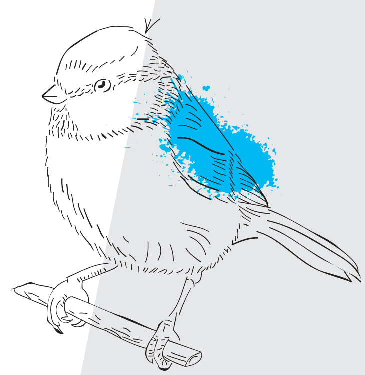
حسین شفیع‌زاده، عباس نعمتی‌فر

مهر ۱۳۹۷

فهرست مطالب

فصل اول

تابع

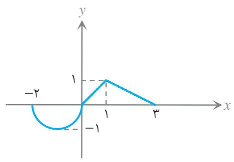


درس اول

تبدیل نمودار توابع

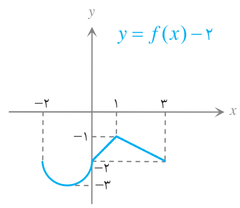
انتقال

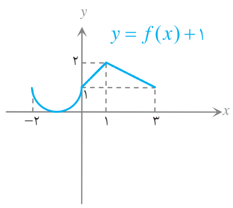
فرض کنید نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت مقابل داده شده است.



۱ انتقال عمودی: برای رسم نمودار تابع $f(x)+k$، نمودار $f(x)$ را به اندازه $|k|$ واحد در امتداد محور y ها انتقال می‌دهیم. اگر $k > ۰$ باشد، انتقال در جهت مثبت (بالا) و اگر $k < ۰$ باشد، انتقال در جهت منفی (پایین) است.

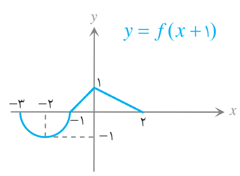
توجه در اثر انتقال عمودی دامنه تغییر نمی‌کند؛ اما برد تغییر می‌کند.

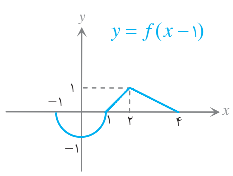




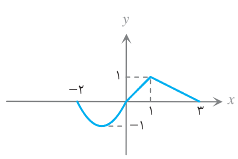
۲ انتقال افقی: برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور x ها انتقال دهیم. اگر $k > ۰$ باشد، انتقال در جهت منفی (چپ) و اگر $k < ۰$ باشد، انتقال در جهت مثبت (راست) است.

توجه در اثر انتقال افقی برد تغییر نمی‌کند؛ اما دامنه تغییر می‌کند.





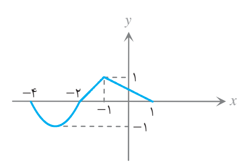
تست: نمودار تابع $y = f(x-۱)$ به‌صورت مقابل است. مساحت ناحیه بین نمودار تابع $y = ۱ + f(x+۱)$، محورهای مختصات و خط $x = ۱$ کدام است؟



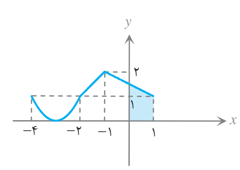
۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) $\frac{\pi}{۲}+\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}+\frac{۵}{۲}$

حل: گزینه ۲ اگر نمودار $f(x-۱)$ را دو واحد به چپ انتقال دهیم، نمودار $f((x+۲)-۱) = f(x+۱)$ حاصل می‌شود:



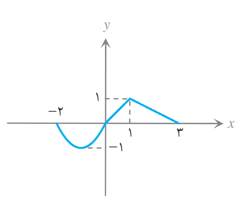
حال نمودار را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = f(x+۱)+۱$ به‌دست آید. مساحت ناحیه مطلوب برابر است با:



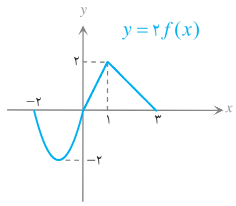
$$S = \frac{(۱+\frac{۳}{۲})\times ۲}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

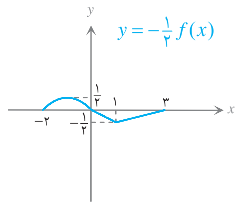
انبساط و انقباض

فرض کنید نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت مقابل داده شده است.



۱ انبساط و انقباض عمودی: برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم. در این صورت اگر $|k|>1$ نمودار منبسط می‌شود و اگر $|k|<1$ نمودار منقبض می‌شود.

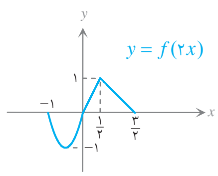


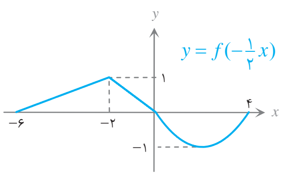


نتیجه برای رسم نمودار $y=-f(x)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

توجه در اثر انبساط و انقباض عمودی دامنه تغییر نمی‌کند؛ اما برد تغییر می‌کند.

۲ انبساط و انقباض افقی: برای رسم نمودار $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم؛ در این صورت اگر $|k|>1$ نمودار منقبض می‌شود و اگر $|k|<1$ نمودار منبسط می‌شود.

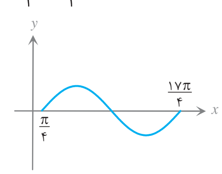


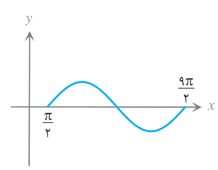


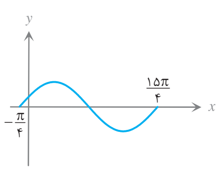
نتیجه برای رسم نمودار $y=f(-x)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

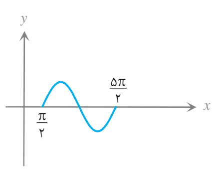
توجه در اثر انبساط و انقباض افقی برد تغییر نمی‌کند؛ اما دامنه تغییر می‌کند.

تست: قسمتی از نمودار تابع $y=2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

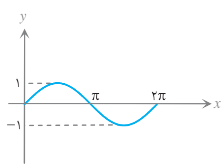
۱) 

۲) 

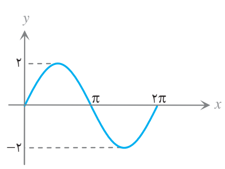
۳) 

۴) 

حل: گزینه ۲ نمودار $f(x)=\sin x$ مطابق شکل مقابل است:

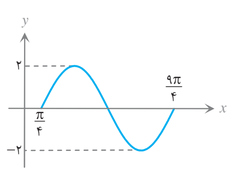


نمودار $g(x)=2f(x)=2\sin x$ را با انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ رسم می‌کنیم.



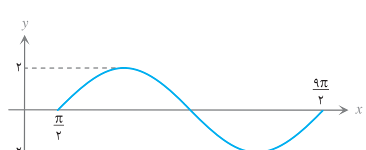
حال کافی است نمودار $g(x)$ را $\frac{\pi}{4}$ به راست منتقل کنیم. در این صورت:

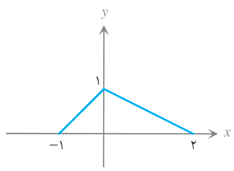
$$y=g(x-\frac{\pi}{4})=2\sin(x-\frac{\pi}{4})=h(x)$$



اکنون نمودار را در راستای محور xها دو برابر منبسط می‌کنیم:

$$y=h(\frac{1}{2}x)=2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})$$



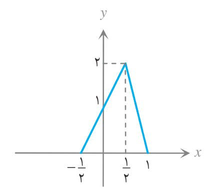


تست: اگر نمودار $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، مساحت ناحیه بین نمودار $y=-۲f(۱-۲x)$، محور xها و محور yها و خط $x=۱$ کدام است؟

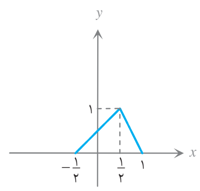
۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

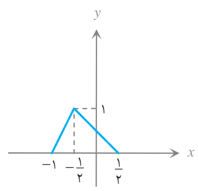
حل: گزینه $\boxed{۱}$ نمودار را مرحله‌به‌مرحله رسم می‌کنیم:



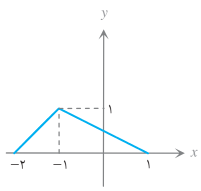
$y=۲f(۱-۲x)$



$y=f(-۲x+۱)$



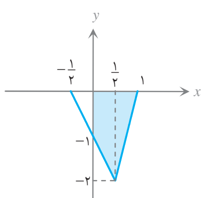
$y=f(۲x+۱)$



$y=f(x+۱)$

مساحت ناحیه موردنظر برابر است با:

$$S=\frac{(۱+۲)\times\frac{۱}{۲}}{۲}+\frac{\frac{۱}{۲}\times ۲}{۲}=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۴}$$



$y=-۲f(۱-۲x)$

تست: اگر نقطه $(a\,,b)$ روی نمودار $y=f(x)$ باشد، کدام نقطه روی نمودار $y=۳f(۱-۲x)$ قرار دارد؟

۱) $(۱-۲a\,,\frac{b}{۳})$ ۲) $(\frac{۱-a}{۲}\,,\frac{b}{۳})$ ۳) $(\frac{۱-a}{۲}\,,۳b)$ ۴) $(۱-۲a\,,۳b)$

حل: گزینه $\boxed{۳}$ نقطه $(a\,,b)$ روی نمودار $y=f(x)$ است؛ پس $f(a)=b$ ؛ بنابراین:

$$۱-۲x=a\Rightarrow x=\frac{۱-a}{۲}$$

در این صورت به‌ازای $x=\frac{۱-a}{۲}$ داریم:

$$y=۳f(۱-۲(\frac{۱-a}{۲}))=۳f(a)=۳b$$

پس نقطه $(\frac{۱-a}{۲}\,,۳b)$ روی نمودار $y=۳f(۱-۲x)$ قرار دارد.

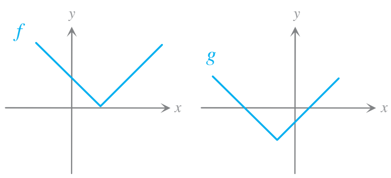
راه دوم: نمودار $y=۳f(۱-۲x)$ همان نمودار $y=f(x)$ است که یک واحد به چپ منتقل شده و سپس نسبت به محور y قرینه شده است و آنگاه در راستای محور xها دو برابر منقبض شده و در نهایت در راستای محور y سه‌برابر منبسط شده است؛ پس:

$$(a\,,b)\Rightarrow(a-۱\,,b)\Rightarrow(۱-a\,,b)\Rightarrow(\frac{۱-a}{۲}\,,۳b)$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس اول

پرسش‌های سطح ساده

۱. نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)=a+f(x+b)$ به‌صورت مقابل است. کدام گزینه زیر صحیح است؟



۱) $a>۰$ و $b>۰$ ۲) $a>۰$ و $b<۰$
۳) $a<۰$ و $b<۰$ ۴) $a<۰$ و $b>۰$

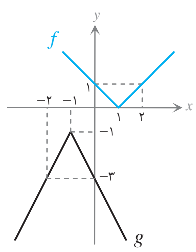
۲. نمودار تابع $y=۲f(\frac{۱}{۳}x)$ چگونه از روی نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید؟

۱) انقباض افقی و انقباض عمودی ۲) انقباض افقی و انبساط عمودی
۳) انبساط افقی و انبساط عمودی ۴) انبساط افقی و انقباض عمودی

۳. از انقباض افقی نمودار $y=\cos x$ در راستای محور xها، نمودار کدام تابع زیر به‌دست می‌آید؟

۱) $\cos ۲x$ ۲) $\cos \frac{۱}{۲}x$ ۳) $۲\cos x$ ۴) $\frac{۱}{۲}\cos x$

۴. با توجه به نمودار مقابل، ضابطه g کدام است؟



۱) $۲f(x-۲)-۱$
۲) $\frac{۱}{۲}f(x-۲)-۱$
۳) $-\frac{۱}{۲}f(x+۲)-۱$
۴) $-۲f(x+۲)-۱$

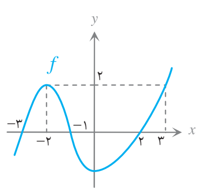
۵. نمودار تابع $y=۲-|x|$ را دو واحد به راست و یک واحد به پایین انتقال داده، سپس در راستای محور xها دو برابر منقبض می‌کنیم. مجموع طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶. اگر $(x_۰\,,\,y_۰)$ یک نقطه دلخواه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد کدام نقطه زیر، یک نقطه از نمودار تابع $y=۲f(۳x)$ است؟

۱) $(\frac{x_۰}{۳}\,,\,\frac{y_۰}{۲})$ ۲) $(\frac{x_۰}{۳}\,,\,۲y_۰)$ ۳) $(۳x_۰\,,\,\frac{y_۰}{۲})$ ۴) $(۳x_۰\,,\,۲y_۰)$

۷. نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. مجموع صفرهای تابع $y=f(۱+۲x)-۲$ کدام است؟

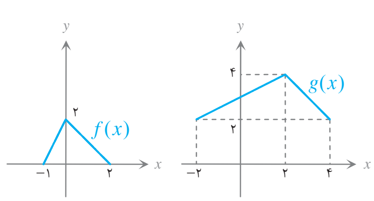


۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) -۳

۸. کدام گزینه نادرست است؟

۱) دامنه دو تابع $y=f(x)$ و $y=۲f(x)+۳$ یکسان است.
۲) برد دو تابع $y=f(x)$ و $y=f(۳x-۲)$ یکسان است.
۳) دامنه تابع $y=f(x)$ زیرمجموعه دامنه تابع $y=f(۲x)$ است.
۴) برد تابع $y=f(x)$ زیرمجموعه برد تابع $y=۲f(x)$ است.

۹. نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)=۲-af(۱+bx)$ به‌صورت مقابل است. حاصل $a+b$ کدام است؟



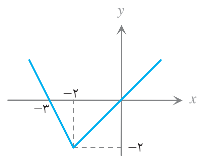
۱) $-۰/۵$ ۲) $-۱/۵$
۳) -۳ ۴) -۱

۱۰. اگر $S_1(۲\,,۳)$ رأس سهمی $y=f(x)$ و $S_۲(\alpha\,,\beta)$ رأس سهمی $y=۲-۳f(۱+x)$ باشد، حاصل $\alpha\beta$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲۱ ۳) -۶ ۴) -۷

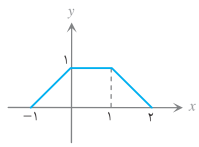
پرسش‌های سطح متوسط

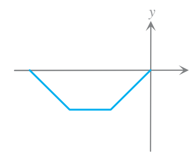
۱۱. نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(x+۱)-۳$ محور xها را در دو نقطه با طول α و β قطع می‌کند. حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟

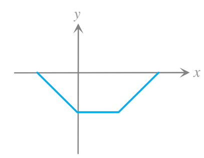


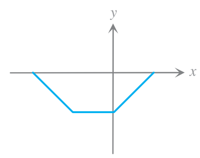
۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

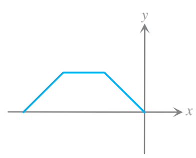
۱۲. اگر نمودار $y=f(x)$ مطابق شکل باشد، نمودار $y=-f(۱-x)$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۱۳. نمودار تابع $y=|x|$ را سه واحد به راست منتقل می‌کنیم و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم و آن را پنج واحد به بالا منتقل می‌کنیم. مساحت بین نمودار جدید و نمودار اولیه چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

۱۴. دامنه و برد تابع $y=f(x+۱)$ به‌ترتیب $[۱\,,۴]$ و $[-۲\,,۱]$ است. اگر دامنه و برد تابع $۲f(۲x-۳)+۱$، برابر D و R باشد، $D\cap R$ کدام است؟

۱) $[۲\,,\frac{۷}{۲}]$ ۲) $[\frac{۵}{۲}\,,۳]$ ۳) $[۲\,,۳]$ ۴) $[-۱\,,۲]$

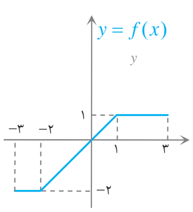
۱۵. نمودار تابع $y=۳|x+۲|$ را دو واحد به راست منتقل کرده و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل را حداقل چقدر به سمت بالا منتقل کنیم تا نمودار تابع اولیه را قطع کند؟

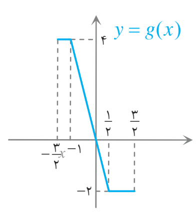
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۶. فرض کنید برای هر نقطه $(x_۰\,,y_۰)$ از نمودار تابع $f(x)=\cos x$، نقطه $(\frac{x_۰}{۲}\,,۱-y_۰)$ روی نمودار $g(x)$ باشد. ضابطه $g(x)$ کدام است؟

۱) $۲\sin^۲ ۲x$ ۲) $۲\sin^۲ x$ ۳) $۲\cos^۲ ۲x$ ۴) $۲\cos^۲ x$

۱۷. نمودار $f(x)$ و $g(x)$ داده شده است. چه رابطه‌ای بین این دو برقرار است؟

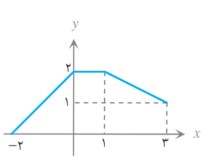




۱) $g(x)=-\frac{۱}{۲}f(۲x)$ ۲) $g(x)=-۲f(\frac{۱}{۲}x)$

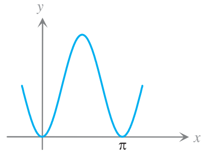
۳) $g(x)=-۲f(۲x)$ ۴) $g(x)=-\frac{۱}{۲}f(\frac{۱}{۲}x)$

۱۸. نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است. مساحت ناحیه محدود به نمودار $y=f(|x|)-۱$ و محور xها چقدر است؟



۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۳

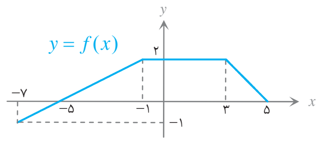
۱۹. بخشی از نمودار تابع $y = a - ۲\cos bx$ به‌صورت مقابل است. حاصل $a + |b|$ کدام است؟

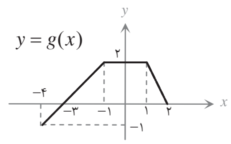


۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲ ۴) ۴

۲۰. نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ به‌صورت مقابل است. اگر نقطه $A(x_۰ , y_۰)$ روی نمودار f باشد، متناظر با آن، کدام نقطه زیر روی نمودار g است؟





۱) $(\frac{۱}{۲}x_۰ + ۱ , y_۰)$ ۲) $(\frac{x_۰ + ۱}{۲} , y_۰)$

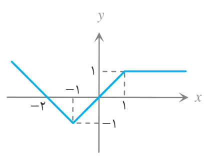
۳) $(۲x_۰ + ۱ , y_۰)$ ۴) $(\frac{x_۰ - ۱}{۲} , y_۰)$

پرسش‌های سطح دشوار

۲۱. فرض کنید $f(x) = |x| - ۱$. در این صورت مساحت بین نمودار $f(x)$ و نمودار $y = ۳ - f(x - ۱)$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۶

۲۲. اگر نمودار $y = f(x)$ مطابق شکل مقابل باشد، مساحت ناحیه بین نمودار $y = f(-|x| + ۱)$ و محور x ها در بازه $[-۱ , ۱]$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۲۳. برای رسم نمودار $y = f(-۲x + ۴)$ از روی $f(x)$ کدام ترتیب عملیات نادرست است؟

۱) چهار واحد انتقال به چپ، تقسیم طول نقاط بر ۲، قرینه کردن نسبت به محور y ها

۲) تقسیم طول نقاط بر ۲، دو واحد انتقال به چپ، قرینه کردن نسبت به محور y ها

۳) قرینه کردن نسبت به محور y ها، چهار واحد انتقال به راست، تقسیم طول نقاط بر ۲

۴) قرینه کردن نسبت به محور y ها، تقسیم طول نقاط بر ۲، دو واحد انتقال به چپ

۲۴. فرض کنید نمودار $y = f(۲x)$ داده شده است. برای ترسیم نمودار $y = -f(x + ۱) + ۱$ انجام کدام مراحل نادرست است؟

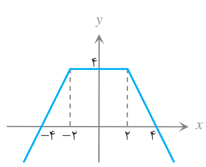
۱) دو برابر انبساط افقی، یک واحد انتقال به چپ، قرینه کردن نسبت به محور x ها و یک واحد انتقال به بالا

۲) یک واحد انتقال به پایین، قرینه کردن نسبت به محور x ها، $\frac{۱}{۲}$ واحد انتقال به چپ، دو برابر انبساط افقی

۳) قرینه کردن نسبت به محور x ها، دو برابر انبساط افقی، یک واحد انتقال به چپ، یک واحد انتقال به بالا

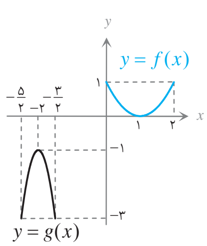
۴) یک واحد انتقال به چپ، دو برابر انبساط افقی، قرینه کردن نسبت به محور x ها، یک واحد انتقال به بالا

۲۵. نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت مقابل است. سطح محدود به منحنی $y = ۲f(۴x) - ۱$ و محور x ها چقدر است؟



۱) $\frac{۱۶۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۶۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱۵۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۵۹}{۸}$

۲۶. اگر نمودار $g(x)$ از روی نمودار $f(x)$ ساخته‌شده باشد، چه رابطه‌ای بین این دو وجود دارد؟



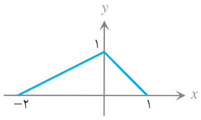
۱) $-۲f(۲x + ۳) - ۲$

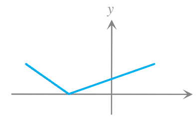
۲) $-۲f(۲x + ۵) - ۲$

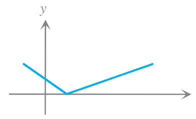
۳) $-۲f(۲x + ۳) - ۱$

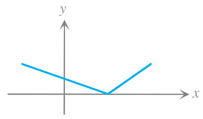
۴) $-۲f(۲x + ۵) - ۱$

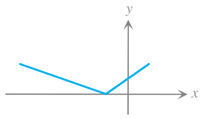
۲۷. اگر نمودار $y=-f(۲x)+۱$ به‌صورت مقابل باشد، نمودار $f(x+۱)$ کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۸. اگر $f(x+۳)=x+\frac{۴}{x}$، نمودار تابع $y=۲+f(۲x)$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(۲\,,۷)$ ۲) $(۱\,,۵)$ ۳) $(۰\,,-\frac{۴}{۳})$ ۴) $(۳\,,-۲)$

۲۹. نمودار تابع $y=\sin kx$ محور xها را در بازه $[۰\,,\pi]$ در ۵ نقطه قطع می‌کند. حدود k کدام است؟ $(k>۰)$

۱) $۳<x\le ۴$ ۲) $۴\le k<۵$ ۳) $۵\le k<۶$ ۴) $۴\le k<۶$

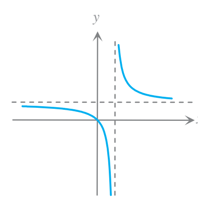
۳۰. اگر $f(x)+g(-x)=۰$، آنگاه کدام گزینه درباره نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ صحیح است؟

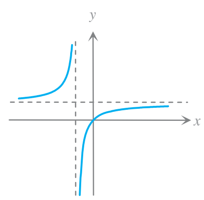
۱) نمودار دو تابع بر هم منطبق‌اند. ۲) نمودارها نسبت به محور y متقارن‌اند.

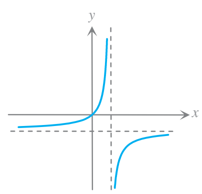
۳) نمودارها نسبت به خط $y=x$ متقارن‌اند. ۴) نمودارها نسبت به مبدأ مختصات متقارن‌اند.

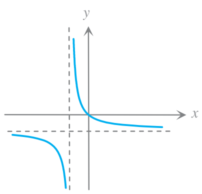
پرسش‌های ترکیب سطوح

۳۱. نمودار تابع $y=۱+\frac{۱}{x-۱}$ به‌کدام صورت زیر است؟

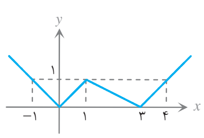
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۲. اگر نمودار $y=f(x)$ مطابق شکل مقابل باشد، نمودار $y=|f(-x+۱)-۲|$ خط $y=x$ را در نقطه‌ای به کدام طول قطع می‌کند؟



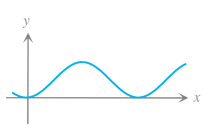
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.

۳۳. نمودارهای دو تابع $y=-۲\sin ۲x$ و $y=۳\cos ۳x$ در فاصله $[۰\,,\pi]$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴. با فرض $f(x)=\sin x$، بخشی از نمودار تابع $g(x)=۱+f(x+a)$ به‌صورت مقابل است. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

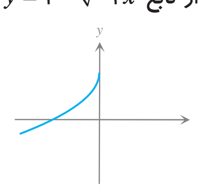


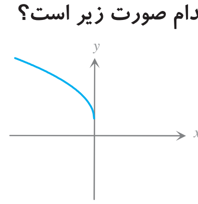
۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) $-\pi$

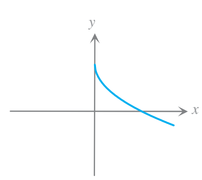
۳۵. اگر $f(x+۲)=x^۲+۲x$ باشد، نمودار تابع $y=۲f(۲x-۳)$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

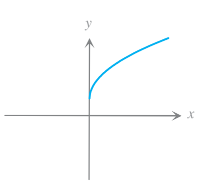
۱) $(۱\,,۶)$ ۲) $(۳\,,۶)$ ۳) $(۱\,,۳)$ ۴) $(۳\,,۳)$

۳۶. نمودار تابع $y=۲-\sqrt{-۲x}$ به کدام صورت زیر است؟

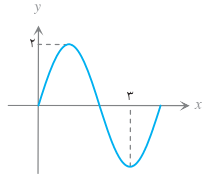
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

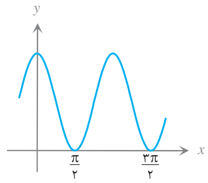
۳۷. بخشی از نمودار تابع $y=a\cos((\frac{۱}{۲}+bx)\pi)$ به‌صورت مقابل است. مقدار ab کدام است؟



۱) ۱٫۵ ۲) −۱

۲) −۱٫۵ ۴) ۱

۳۸. بخشی از نمودار تابع $y=a\cos bx+۲$ به صورت مقابل است. حاصل $a-b$ کدام است؟



۱) ۰ یا ۴ ۲) ۰ یا −۴

۳) ۱٫۵ یا ۲٫۵ ۴) −۲٫۵ یا −۱٫۵

۳۹. اگر نمودار تابع $y=۲-|x|$ را چهار واحد به سمت راست و سه واحد به سمت پایین منتقل کنیم، طول نقطه تقاطع تابع جدید با تابع اولیه کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳٫۵ ۳) ۴ ۴) ۴٫۵

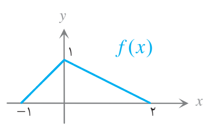
۴۰. دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به‌ترتیب برابر $[-۲,۱]$ و $[-۱,۳]$ است. دامنه و برد تابع $y=۲f(-\frac{۱}{۲}x+۱)-۱$ چند عضو صحیح مشترک دارند؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۱. از برخورد نمودار $f(x)=|x|$ و $g(x)=a+bf(x)$ یک مستطیل به‌وجود می‌آید. در این صورت کدام صحیح است؟

۱) $a>۰\ ,\ b>۰$ ۲) $a>۰\ ,\ b<۰$ ۳) $a<۰\ ,\ b<۰$ ۴) $a<۰\ ,\ b>۰$

۴۲. نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(۱-۲x)$، نمودار تابع $y=f(x)$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟



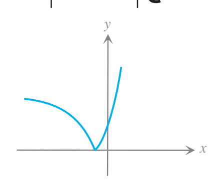
۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) هیچ

۴۳. با فرض $f(x)=۲^{۲x+۱}-۱$ دامنه تابع $y=\sqrt{xf(\frac{x}{۲}-۱)}$ کدام است؟

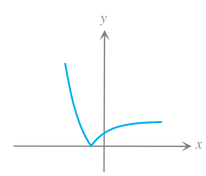
۱) $\mathbb{R}-(۰,۱)$ ۲) $(-\infty,۰]$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

۴۴. نمودار تابع $y=|۲^{۲x+۱}-۱|$ کدام است؟

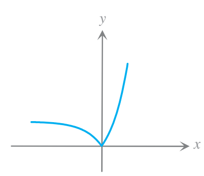
۱)



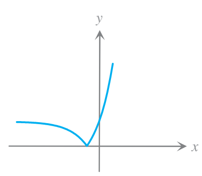
۲)



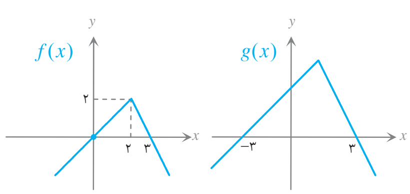
۳)



۴)



۴۵. نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)=a+f(x+b)$ به‌صورت مقابل است. حاصل $۲a+b$ کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

درس سوم

بخش‌پذیری و تقسیم

بخش‌پذیری و تقسیم

قضیه تقسیم: اگر $f(x)$ و $p(x)$ چندجمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه توابع چندجمله‌ای منحصربه‌فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارد؛ به‌طوری که:

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

که در آن درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

توجه در تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$، چندجمله‌ای $f(x)$ را **مقسوم**، $p(x)$ را **مقسوم‌علیه**، $q(x)$ را **خارج‌قسمت** و $r(x)$ را **باقی‌مانده** می‌نامند.

توجه اگر $r(x)=0$ باشد، گفته می‌شود $f(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است.

به‌عنوان مثال:

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+3x^3-5x+2 & x^2-1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^4-x^2} & 2x^2+3x+1 \\ 3x^3+x^2-5x+2 & \\ \underline{3x^3-3x} & \\ \quad x^2-2x+2 & \\ \underline{\quad x^2-1} & \\ \quad -2x+3 & \end{array}$$

$$2x^4+3x^3-5x+2=(x^2-1)(2x^2+3x+1)+(-2x+3)$$

اگر $p(x)$ چندجمله‌ای درجه یک $ax+b$ باشد، درجه باقی‌مانده صفر است و در واقع یک عدد خواهد بود و داریم:

$$f(x)=(ax+b)q(x)+r$$

رابطه فوق همواره برقرار است؛ از جمله به‌ازای $x=-\frac{b}{a}$؛ در این صورت:

$$f(-\frac{b}{a})=0\times q(-\frac{b}{a})+r\Rightarrow r=f(-\frac{b}{a})$$

نتیجه باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$ برابر $r=f(-\frac{b}{a})$ است.

تست: اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)=x^3+ax^2+11x-6$ بر $x+1$ برابر ۲۴- باشد، مجموع ریشه‌های معادله $f(x)=0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

حل: گزینه $\boxed{2}$ باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ برابر $f(-1)$ است؛ پس:

$$f(-1)=-1+a-11-6=-24\Rightarrow a=-6\Rightarrow f(x)=x^3-6x^2+11x-6$$

ملاحظه می‌شود که $f(1)=0$؛ پس $f(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است:

$$f(x)=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x-2)(x-3)=0\Rightarrow x=1,2,3$$

مجموع ریشه‌های معادله برابر ۶ است.

توجه اگر $f(x)$ بر $p_1(x)p_2(x)$ بخش‌پذیر باشد، بر $p_1(x)$ و $p_2(x)$ نیز بخش‌پذیر است.

تست: اگر $f(x)=ax^3+bx^2+x+c$ بر x^2-5x+6 بخش‌پذیر باشد و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۴ باشد، $a+b-c$ کدام است؟

۱) ۹- ۲) ۱۱- ۳) ۳ ۴) ۱۱

حل: گزینه $\boxed{1}$ $f(x)$ بر $(x-2)(x-3)$ بخش‌پذیر است؛ پس بر $x-2$ و $x-3$ بخش‌پذیر است و داریم:

$$f(2)=0\Rightarrow 8a+4b+2+c=0\Rightarrow 8a+4b+c=-2$$

$$f(3)=0\Rightarrow 27a+9b+3+c=0\Rightarrow 27a+9b+c=-3$$

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ برابر $f(1)$ است؛ پس:

$$f(1)=4\Rightarrow a+b+1+c=4\Rightarrow a+b+c=3$$

پس داریم:

$$\begin{cases}8a+4b+c=-2\\27a+9b+c=-3\\a+b+c=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}19a+5b=-1\\26a+8b=-6\end{cases}\Rightarrow a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=6\Rightarrow a+b-c=-9$$

نکته اگر $f(x)$ بر $ax+b$ و $cx+d$ بخش‌پذیر باشد، بر $(ax+b)(cx+d)$ نیز بخش‌پذیر است؛ مشروط بر آنکه $\frac{b}{a} \neq \frac{d}{c}$.

تست: عبارت $f(x) = x^۳ + ax + b$ بر $(x-۱)^۲$ بخش‌پذیر است، $۲a+b$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۴ ۳) -۵ ۴) -۶

حل: گزینه $\boxed{۲}$ $f(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است؛ پس:

$$f(۱) = ۰ \Rightarrow ۱+a+b = ۰ \Rightarrow b = -a-۱ \Rightarrow f(x) = x^۳ + ax - a - ۱ = (x^۳ - ۱) + (ax - a)$$
$$\Rightarrow f(x) = (x-۱)(x^۲+x+۱) + a(x-۱) = (x-۱)\underbrace{(x^۲+x+۱+a)}_{g(x)}$$

اگر $f(x)$ بر $(x-۱)^۲$ بخش‌پذیر باشد، باید $g(x)$ نیز بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد؛ یعنی:

$$g(۱) = ۰ \Rightarrow ۳ + a = ۰ \Rightarrow a = -۳ \Rightarrow b = -a-۱ = ۲ \Rightarrow ۲a+b = -۴$$

مثال: باقی‌مانده تقسیم $f(x) = x^n - a^n$ را بر $x-a$ بیابید.

حل:

$$x-a = ۰ \Rightarrow x = a \Rightarrow r(x) = a^n - a^n = ۰$$

پس: $x^n - a^n$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

می‌توان نشان داد:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-۱} + x^{n-۲}a + x^{n-۳}a^۲ + \cdots + a^{n-۱}) \ ; \ n \in \mathbb{N}$$
$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-۱} - x^{n-۲}a + x^{n-۳}a^۲ - \cdots - a^{n-۱}) \ ; \ n \text{ زوج}$$
$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-۱} - x^{n-۲}a + x^{n-۳}a^۲ - \cdots + a^{n-۱}) ; \ n \text{ فرد}$$

به‌عنوان مثال:

$$x^۳ - ۲۷ = x^۳ - ۳^۳ = (x-۳)(x^۲ + ۳x + ۹)$$
$$x^۴ - y^۴ = (x-y)(x^۳ + x^۲y + xy^۲ + y^۳)$$
$$x^۴ - ۱۶ = (x+۲)(x^۳ - ۲x^۲ + ۴x - ۸)$$
$$x^۵ + ۳۲y^۵ = x^۵ + (۲y)^۵ = (x+۲y)(x^۴ - ۲x^۳y + ۴x^۲y^۲ - ۸xy^۳ + ۱۶y^۴)$$

تست: عبارت $x^{۲۴}+۱$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

۱) $x^{۱۲}+۱$ ۲) $x^۳+۱$ ۳) $x^۶+۱$ ۴) $x^۸+۱$

حل: گزینه $\boxed{۴}$

$$x^{۲۴}+۱ = (x^{۱۲})^۲ + ۱^۲$$

این عبارت بر $x^{۱۲}+۱$ بخش‌پذیر نیست؛ چون ۲ زوج است.

$$x^{۲۴}+۱ = (x^۳)^۸ + ۱^۸ = (x^۶)^۴ + ۱^۴$$

به همین ترتیب بر $x^۳+۱$ و $x^۶+۱$ بخش‌پذیر نیست؛ اما:

$$x^{۲۴}+۱ = (x^۸)^۳ + ۱^۳$$

این عبارت بر $x^۸+۱$ بخش‌پذیر است.

تست: عدد $۲^{۲۰}-۱$ بر کدام عدد زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۳۱ ۴) ۳۳

حل: گزینه $\boxed{۲}$

$$۲^{۲۰} - ۱ = (۲^۴)^۵ - ۱^۵$$

پس این عدد بر $۱۵ = ۱ - ۲^۴$ بخش‌پذیر است و چون ۵ زوج نیست بر $۱۷ = ۱ + ۲^۴$ بخش‌پذیر نیست. حال دقت کنید که:

$$۲^{۲۰} - ۱ = (۲^۵)^۴ - ۱$$

چون ۴ زوج است این عدد بر $۲^۵ \pm ۱$ یعنی ۳۱ و ۳۳ بخش‌پذیر است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس سوم

پرسش‌های سطح ساده

۹۱. چندجمله‌ای $f(x)=x^۴+ax^۳-۳x+۲a$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-۱$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) -۸ ۴) -۱۴

۹۲. چندجمله‌ای $f(x)=x^۵+ax^۴+bx^۳-۳x+۱$ بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر است. حاصل ab کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۹۳. اگر $f(۲x+۱)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد، $f(۲x-۱)$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

۱) $x-۱$ ۲) $x-۲$ ۳) $x+۱$ ۴) $x+۲$

۹۴. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^۲-۲x$ برابر $۳x-۱$ است. باقی‌مانده تقسیم $f(۳x+۵)$ بر $x+۱$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۹۵. اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^۲-۹$ برابر $۳x+۹$ و بر $x-۳$ برابر $r_۱$ و بر $x+۳$ برابر $r_۲$ باشد، $r_۱+r_۲$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۶. چندجمله‌ای $x^۴+ax^۳+bx^۲-۴$ بر $x^۲-x-۲$ بخش‌پذیر است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) -۱

۹۷. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $۲x-۴$ برابر ۷ است. باقی‌مانده تقسیم $۲f(x)$ بر $x-۲$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۲۸

۹۸. کدام عبارت بر $a^۲+b^۲$ بخش‌پذیر است؟

۱) $a^{۱۶}+b^{۱۶}$ ۲) $a^۸+b^۸$ ۳) $a^{۱۲}+b^{۱۲}$ ۴) $a^{۱۸}+b^{۱۸}$

۹۹. اگر $Q(x)$ خارج‌قسمت تقسیم $x^۵+۳x^۲+۲x+۳$ بر $(x+۱)^۲$ باشد، مقدار $Q(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۰۰. در خارج‌قسمت تقسیم $(x^۴+۳x^۲+۵x)\div(x+۲)$ ضریب x کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱

پرسش‌های سطح متوسط

۱۰۱. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x+۱$ و $x+۲$ به‌ترتیب برابر ۲ و ۴ است. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^۲+۳x+۲$ کدام است؟

۱) $x+۳$ ۲) $x+۶$ ۳) $-۲x$ ۴) $-۳x$

۱۰۲. کدام عبارت را با $f(x)=x^۳+۳x^۲-۴x+۲$ جمع کنیم تا عبارت حاصل بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر باشد؟

۱) $۳x+۵$ ۲) $۳x-۵$ ۳) $-۳x+۵$ ۴) $-۳x-۵$

۱۰۳. خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $x^{۲n}-۱$ بر $x-۱$ و $x+۱$ به‌ترتیب برابر $f(x)$ و $g(x)$ است. حاصل $f(۱)+g(-۱)$ کدام است؟

۱) $۲n$ ۲) $۴n$ ۳) $-۲n$ ۴) صفر

۱۰۴. اگر $f(x)$ بر $x^۲-۹$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(۲x+۱)$ بر $x+۲$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) صفر

۱۰۵. اگر چندجمله‌ای $f(x+۲)$ بر $x-۳$ بخش‌پذیر باشد، چندجمله‌ای $f(۱-۲x)$ بر کدام گزینه زیر بخش‌پذیر است؟

۱) $x-۱$ ۲) $۳-۲x$ ۳) $۵-۲x$ ۴) $x+۲$

۱۰۶. باقی‌مانده عبارت $f(x)=(x+۱)(x+۲)(x+۳)+۱$ بر $x^۲+۳x$ کدام است؟

۱) $۲x+۷$ ۲) $۲x-۷$ ۳) $-۲x+۷$ ۴) $-۲x-۷$

۱۰۷. خارج‌قسمت تقسیم عبارت $(x-1)^2(x-2)+x^3-3x^2$ بر x^2-3x+2 به‌ازای $x=1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۸. عبارت x^4+4 را به‌شکل ضرب x^2-2x+m و $q(x)$ نوشته‌ایم. $q(2)+m$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۶

۱۰۹. عبارت $x^{18}-y^{12}$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر نیست؟

۱) x^9-y^6 ۲) x^6+y^4 ۳) x^3+y^2 ۴) x^3-y^2

۱۱۰. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-3x+2 و x^2+3x+2 به‌ترتیب برابر $x-3$ و $x+3$ است. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-1 کدام است؟

۱) $2x-4$ ۲) $2x+4$ ۳) $-2x$ ۴) $-3x$

پرسش‌های سطح دشوار

۱۱۱. اگر $f(x)$ یک تابع خطی باشد و چندجمله‌ای $x^5-x^4-3x^2+f(x)$ بر x^2-4 بخش‌پذیر باشد، مقدار $f(1)$ چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۱۲. با فرض $f(x)=x^2+2x-3$ باقی‌مانده تقسیم $fof(x)$ بر $f(x)$ کدام است؟

۱) $x-3$ ۲) -3 ۳) $2x-3$ ۴) ۹

۱۱۳. مقدار خارج‌قسمت تقسیم x^8-256 بر x^2-4 به‌ازای $x=2$ کدام است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۲۵۶ ۳) ۵۱۲ ۴) ۱۰۲۴

۱۱۴. اگر x^2-2x-3 یکی از عوامل تجزیه چندجمله‌ای $f(x)=x^4-3x^3+ax^2+bx+6$ باشد، یکی دیگر از عوامل تجزیه این چندجمله‌ای کدام است؟

۱) $x-2$ ۲) $x+2$ ۳) $x+6$ ۴) $x-6$

۱۱۵. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ و x^2-4 به‌ترتیب برابر ۲ و $x+1$ است. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)(x^2-4)$ کدام است؟

۱) $3x-1$ ۲) x^2+1 ۳) x^2+2x-1 ۴) $x+1$

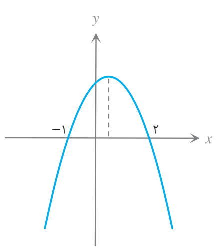
۱۱۶. اگر عبارت $x(x+1)^2$ بر عبارت ax^2+bx+2 بخش‌پذیر باشد، $2a+3b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۱۷. اگر چندجمله‌ای $f(x)=x^5+3x^3+ax^2+bx+1$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲۳ ۳) ۱۸ ۴) -13

۱۱۸. نمودار سهمی $f(x)$ به‌صورت مقابل است. باقی‌مانده تقسیم $x^4+xf(x)-3$ بر $f(x)$ کدام است؟



۱) $3x+1$
۲) $2x+9$
۳) $5x+3$
۴) $4x-1$

۱۱۹. چندجمله‌ای درجه سوم $f(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است. اگر باقی‌مانده تقسیم آن بر $x-1$، $x-2$ و $x-3$ برابر ۴۸ باشد، $f(0)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -12 ۳) ۳۶ ۴) -36

۱۲۰. اگر x^4+64 بر x^2+ax+b بخش‌پذیر باشد، حاصل ab کدام است؟

۱) ± 24 ۲) ± 32 ۳) ± 18 ۴) ± 16

پرسش‌های ترکیب سطوح

۱۲۱. باقی‌مانده تقسیم $f(x)=x^5+3x^3-2x^2-x+7$ بر x^2-1 کدام است؟

۱) ۸ ۲) $3x+5$ ۳) $5x+6$ ۴) $2x+6$

۱۲۲. اگر باقی‌مانده تقسیم $x^۵ - mx^۲ + ۳x + ۲$ بر $x - ۱$ برابر ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم آن بر $x + ۱$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۵-

۱۲۳. در چندجمله‌ای $f(x)$ رابطه $f(۱) = f(۲) = ۲$ برقرار است. چندجمله‌ای $f(x) - ۲$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

۱) $x^۲ - ۴$ ۲) $x^۲ - ۱$ ۳) $x^۲ - ۳x + ۲$ ۴) $x^۲ + ۳x + ۲$

۱۲۴. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x - ۱$ و $x - ۲$ به‌ترتیب بر ۲ و ۳ است. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $۲x^۲ - ۶x + ۴$ کدام است؟

۱) $x + ۱$ ۲) $۲x + ۱$ ۳) $x + ۲$ ۴) $۲x + ۳$

۱۲۵. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^۲ - ۱$ برابر $x + ۲$ است. باقی‌مانده تقسیم $۳x^۲ + xf(x)$ بر $x^۲ - ۱$ کدام است؟

۱) $x + ۲$ ۲) $x + ۳$ ۳) $۲x + ۴$ ۴) $۲x + ۵$

۱۲۶. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^۲ - ۵x + ۶$ برابر $۳x - ۱$ است. باقی‌مانده تقسیم $x^۲ - xf(۱ - x)$ بر $x + ۱$ است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۶ ۴) ۶-

۱۲۷. باقی‌مانده تقسیم $f(x) = x^۴ + ax^۲ + bx + ۲$ بر $x^۲ + x - ۲$ برابر $x - ۳$ است. مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۵

۱۲۸. چندجمله‌ای $f(x) = x^۴ + x^۳ + x - ۱$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

۱) $x^۲ - ۱$ ۲) $x^۲ + x + ۱$ ۳) $x^۲ + x - ۱$ ۴) $x^۲ - x + ۱$

۱۲۹. اگر $q(x)$ خارج‌قسمت تقسیم $f(x) = x^۵ - ۳x^۲ + ۴x + ۱$ بر $x - ۱$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $q(x)$ بر $x + ۱$ کدام است؟

۱) ۱۰- ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۵-

۱۳۰. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $۲x^۲ - ۳x + ۱$ برابر $۲x + ۱$ است. باقی‌مانده تقسیم $f(x^۲)$ بر $۲x^۲ - ۱$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲x$ ۳) $۲x + ۱$ ۴) $۲x - ۱$

۱۳۱. چندجمله‌ای $f(x) = x^۳ + ax^۲ + ۱$ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است. مجموع ریشه‌های معادله $\frac{f(x)}{x - ۱} = ۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۳-

۱۳۲. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x^۲ - ۲x - ۳$ برابر $۳x + ۱$ است. باقی‌مانده تقسیم $f(x + ۲) - f(x - ۲)$ بر $x - ۱$ کدام است؟

۱) ۱۲- ۲) ۸ ۳) ۸- ۴) ۱۲

۱۳۳. اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^۲ - ۱$ برابر ۴ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x^۳)$ بر $x^۲ + x + ۱$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۴x$ ۳) $۴x - ۱$ ۴) $۴x + ۱$

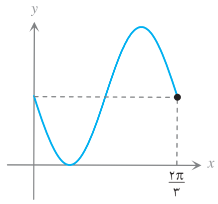
۱۳۴. اگر $f(x) = (x + ۱)^۳ + ax + b$ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x + ۲$ برابر ۳ باشد، مقدار $f(۰)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۴-

۱۳۵. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x^۲ - ۲x - ۳$ برابر $۴x + ۱$ است. باقی‌مانده تقسیم $۱ + xf(x)$ بر $x - ۳$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۴۰

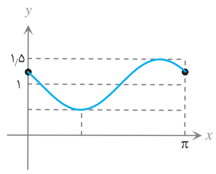
سؤالات کنکور مرتبط با فصل ۱



۱۶۶. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{7\pi}{6}$، کدام است؟ خارج - ۱۳۹۶

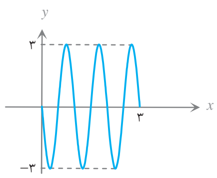
۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱ ۴) ۲



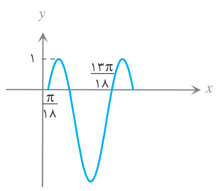
۱۶۷. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + a\sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. $a + b$ کدام است؟ خارج - ۱۳۹۵

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲



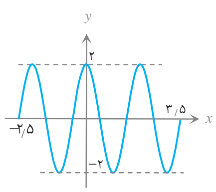
۱۶۸. شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a.b$ کدام است؟ خارج - ۱۳۹۲

۱) ۶- ۲) ۳- ۳) ۴/۵ ۴) ۶



۱۶۹. شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a - 2\cos(bx + \frac{\pi}{2})$ است. $a + b$ کدام است؟ داخل - ۱۳۹۵

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲



۱۷۰. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin\pi(\frac{1}{2} + bx)$ است. $a.b$ کدام است؟ داخل - ۱۳۹۲

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

۱۷۱. تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & ; \quad x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & ; \quad x < 0 \end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی چگونه است؟ داخل - ۱۳۸۹

۱) یک‌به‌یک، نزولی ۲) یک‌به‌یک، صعودی

۳) یک‌به‌یک، غیریکنوا ۴) غیریک‌به‌یک، غیریکنوا

۱۷۲. نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟ داخل - ۱۳۹۴

۱) $y = -x + 6 \,;\, x < -4$ ۲) $y = -x + 5 \,;\, x > 2$

۳) $y = -\frac{1}{2}x + 1 \,;\, -4 < x < 3$ ۴) $y = -\frac{1}{2}x + 1 \,;\, -1 \leq x \leq 10$

۱۷۳. عبارت $x^4 + 4ax^2 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش‌پذیر است. $a + b$ کدام است؟ داخل - ۱۳۸۶

۱) $-\frac{15}{8}$ ۲) $-\frac{17}{16}$ ۳) $\frac{17}{16}$ ۴) $\frac{15}{8}$

۱۷۴. حاصل عبارت $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \cdots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$، به‌ازای $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ کدام است؟ خارج - ۱۳۹۳

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۷۵. به‌ازای مقداری از a چندجمله‌ای $f(x)=x^{۴}+ax^{۳}-۸x$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشه معادلـه $f(x)=۰$ کـدام است؟ داخل - ۱۳۹۴

۱) $۱-\sqrt{۳}$ ۲) $۱-\sqrt{۵}$ ۳) $-۱-\sqrt{۳}$ ۴) $-۱-\sqrt{۵}$

۱۷۶. اگر یکی از ریشه‌های معادله $x(ax^{۲}-x-۵)=۲$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است؟ خارج - ۱۳۸۷

۱) -۲ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۷۷. اگر عبارت $x^{۲n+۱}+۲x^{۲n}+x^{۵}-۵x^{۳}+k$ به‌ازای هر عدد طبیعی n بر دوجمله‌ای $x+۲$ بخش‌پذیر باشد. آنگاه باقی‌مانده تقسیم آن بر $x^{۲}-۱$ کدام است؟ داخل - ۱۳۸۹

۱) $-۳x-۶$ ۲) $۲x+۴$ ۳) $-۲x+۱$ ۴) $۳x-۴$

۱۷۸. اگر عبارت $x^{۴}+ax^{۲}-bx+۴$ بر $(x-۱)^{۲}$ بخش‌پذیر باشد، b کدام است؟ خارج - ۱۳۹۴

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۷۹. اگر عبارت $ax^{۳}+۴x^{۲}-۱۴x+۱۰-a$، بر سه‌جمله‌ای $x^{۲}-۲x+۱$ بخش‌پذیر باشد، a کدام است؟ داخل - ۱۳۹۵

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۰. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ و $x+۳$ به‌ترتیب ۱ و ۴- است. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^{۲}+x-۶$ کدام است؟ خارج - ۱۳۹۷

۱) $x-۱$ ۲) $x+۱$ ۳) $-x+۲$ ۴) $۲x-۱$

پاسخ تشریحی پرسش‌های فصل ۱

۱. گزینه ۴ نمودار f به چپ انتقال یافته؛ پس $b>۰$ و سپس به پایین منتقل شده؛ پس $a<۰$.

۲. گزینه ۳ نمودار تابع $af(bx)$ با فرض $a>۱$ از انبساط عمودی و با فرض $۰<b<۱$ از انبساط افقی $f(x)$ به‌دست می‌آید. بنابراین نمودار $f(x)$ در راستای محور x ها سه برابر منبسط شده و در راستای محور y ها نیز دو برابر منبسط گردیده است.

۳. گزینه ۱ اگر $k>۱$، نمودار $f(kx)$ از انقباض نمودار $f(x)$ در راستای محور x ها به‌دست می‌آید.

هریک از گزینه‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$\cos ۲x$: انقباض در راستای محور x ها

$\cos\frac{۱}{۲}x$: انبساط در راستای محور x ها

$۲\cos x$: انبساط در راستای محور y ها

$\frac{۱}{۲}\cos x$: انقباض در راستای محور y ها

۴. گزینه ۴ نمودار f دو واحد به چپ منتقل شده: $f(x+۲)$

سپس نسبت به محور x ها قرینه شده: $-f(x+۲)$

سپس در راستای محور y ها دو برابر منبسط شده: $-۲f(x+۲)$

و در نهایت در راستای محور y ها یک واحد به پایین منتقل شده: $-۲f(x+۲)-۱$

۵. گزینه ۲

$$۲-|x| \to ۲-|x-۲| \to (۲-|x-۲|)-۱ \to ۱-|۲x-۲|$$

بنابراین:

$$۱-|۲x-۲|=۰ \Rightarrow ۲x-۲=\pm ۱ \Rightarrow ۲x=۱\,,\,۳$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\,,\,\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=۲$$

۶. گزینه ۲ برای رسم $f(۳x)$ از روی $f(x)$، x ها بر ۳ تقسیم می‌شوند و برای رسم $۲f(۳x)$، y ها در ۲ ضرب می‌شوند. پس نقطه $(\frac{x_۰}{۳}\,,\,۲y_۰)$ روی نمودار جدید است.

راه دوم: با مقایسه $\begin{cases} y_۰=f(x_۰)\\ \frac{y}{۲}=f(۳x)\end{cases}$ می‌دانیم $\begin{cases}\frac{y}{۲}=y_۰\\ ۳x=x_۰\end{cases}$؛ پس $\begin{cases}x=\frac{x_۰}{۳}\\ y=۲y_۰\end{cases}$.

۷. گزینه ۲ معادله $y=۰$ را بررسی می‌کنیم:

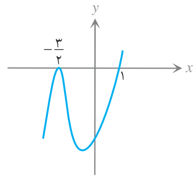
$$y=۰\Rightarrow f(۱+۲x)-۲=۰\Rightarrow f(۱+۲x)=۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۱+۲x=-۲\\ ۱+۲x=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{۳}{۲}\\ x=۱\end{cases}\Rightarrow x_۱+x_۲=-\frac{۱}{۲}$$

راه دوم: نمودار تابع $f(۱+۲x)-۲$ را رسم می‌کنیم. ترتیب رسم به صورت زیر است:

$$f(x)\Rightarrow f(۱+x)\Rightarrow f(۱+۲x)\Rightarrow f(۱+۲x)-۲$$

$g(x)=f(۱+۲x)-۲$



$$g(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}\,,\,۱$$

۸. گزینه ۳ $y=f(۲x)$ همان $f(x)$ است که در راستای محور x ها دو برابر فشرده شده؛ پس دامنه $f(۲x)$ زیرمجموعه $f(x)$ است.

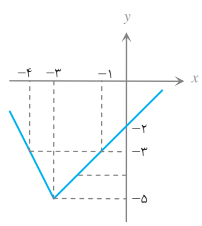
۹. گزینه ۲ طول بازه دو برابر شده و نمودار نسبت به محور y نیز قرینه شده است؛ پس $b=-\frac{۱}{۲}$. طول بازه برد تغییر نکرده و نمودار نسبت به محور x قرینه نشده است؛ پس $-a=۱$؛ یعنی $a=-۱$. در این صورت $a+b=-۱/۵$.

۱۰. گزینه ۴ اگر نمودار $f(x)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم؛ سپس در راستای محور y ها ۳ برابر منبسط کرده و نسبت به محور x ها قرینه کنیم و آنگاه ۲ واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار $y=۲-۳f(۱+x)$ حاصل می‌شود؛ پس اگر $(x_۰\,,\,y_۰)$ روی منحنی $y=f(x)$ باشد، نقطه $(x_۰-۱\,,\,۲-۳y_۰)$ روی منحنی $g(x)=۲-۳f(۱+x)$ قرار دارد.

$$(۲\,,\,۳)\in f\Rightarrow(۲-۱\,,\,۲-۳\times ۳)\in g\Rightarrow(۱\,,\,-۷)\in g$$

پس $\alpha=۱$ و $\beta=-۷$ و $\alpha\beta=-۷$ است.

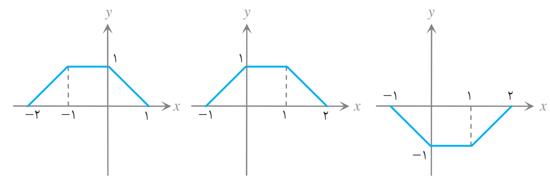
۱۱. گزینه ۲ اگر نقاط $(۰\,,\,۰)$، $(-۲\,,\,-۲)$ و $(-۳\,,\,۰)$ را یک واحد به چپ و سه واحد به پایین انتقال دهیم به نقاط $(-۱\,,\,-۳)$، $(-۳\,,\,-۵)$ و $(-۴\,,\,-۳)$ می‌رسیم. (در اثر انتقال، شیب‌ها تغییر نمی‌کنند). ضابطه تابع به‌دست آمده را می‌نویسیم:



$$y=\begin{cases}x-۲ & x\ge -۳\\ -۲x-۱۱ & x\le -۳\end{cases}$$

معادله $y=۰$ دارای ریشه‌های $\alpha=۲$ و $\beta=-\frac{۱۱}{۲}$ است؛ پس $\alpha+\beta=-\frac{۷}{۲}$.

۱۲. گزینه [۲]

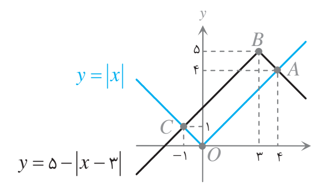


۱۳. گزینه [۲] $y=|x| \to |x-3| \to -|x-3| \to -|x-3|+5$

با توجه به شکل:

$OA=4\sqrt{2}$

$OC=\sqrt{2}$



پس:

$S=4\sqrt{2}\times\sqrt{2}=8$

۱۴. گزینه [۲] در تابع $f(x+1)$ محدوده تغییرات x بازه $[1,4]$ است؛ پس:

$1\le x\le 4 \Rightarrow 2\le x+1\le 5$

پس f برای مقادیر متعلق به بازه $[2,5]$ تعریف‌شده است؛ پس:

$2\le 2x-3\le 5\Rightarrow 5\le 2x\le 8\Rightarrow 2.5\le x\le 4$

$\Rightarrow D=[2.5,4]$

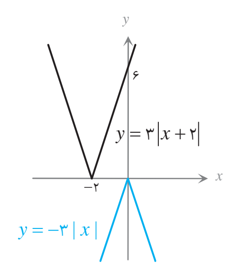
$-2\le f(2x-3)\le 1\Rightarrow -4\le 2f(2x-3)\le 2$

$\Rightarrow -3\le 2f(2x-3)+1\le 3\Rightarrow R=[-3,3]$

پس: $D\cap R=[2.5,3]$

۱۵. گزینه [۴] $y=3|x+2| \to 3|(x-2)+2|=3|x| \to -3|x|$

اگر نمودار $-3|x|$ را ۶ واحد به بالا منتقل کنیم، بخشی از یک شاخه آن بر بخشی از یک شاخه نمودار اولیه منطبق می‌شود.



۱۶. گزینه [۲]

$$\begin{cases} g(\frac{x_0}{2})=1-y_0\\ \cos x_0=y_0\Rightarrow 1-2\sin^2\frac{x_0}{2}=y_0\Rightarrow 2\sin^2\frac{x_0}{2}=1-y_0\end{cases}$$

پس $g(\frac{x_0}{2})=2\sin^2\frac{x_0}{2}$ و در نتیجه $g(x)=2\sin^2 x$.

راه دوم: مختصات نقطه جدید را (x,y) فرض می‌کنیم. در این صورت:

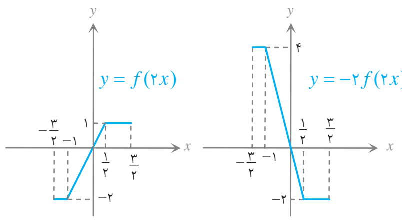
$$\begin{cases} x=\frac{x_0}{2}\Rightarrow x_0=2x\\ y=1-y_0\Rightarrow y_0=1-y\end{cases}$$

با جای‌گذاری در ضابطه داده‌شده داریم:

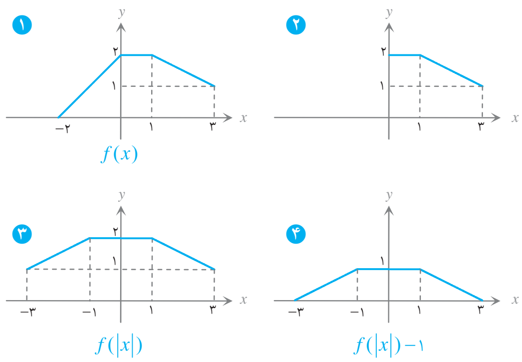
$1-y=\cos 2x\Rightarrow y=1-\cos 2x\Rightarrow y=2\sin^2 x$

راه سوم: تبدیل x_0 به $\frac{x_0}{2}$ یعنی نمودار در راستای محور xها دو برابر منقبض شده؛ پس $\cos x$ به $\cos 2x$ تبدیل می‌شود. تبدیل y_0 به $1-y_0$، یعنی نمودار نسبت به محور xها قرینه شده و یک واحد به بالا منتقل شده است؛ پس: $y=1-\cos 2x\Rightarrow y=2\sin^2 x$

۱۷. گزینه [۳] نمودار $f(x)$ را به $g(x)$ تبدیل می‌کنیم.



۱۸. گزینه [۲] برای رسم $f(|x|)$، سمت چپ نمودار $f(x)$ را حذف کرده و قرینه سمت راست آن را نسبت به محور yها به آن اضافه می‌کنیم.



مساحت ذوزنقه به‌دست آمده برابر است با: $\frac{6+2}{2}\times 1=4$

۱۹. گزینه [۴] فاصله دو مینیمم تابع $y=\cos x$ برابر 2π است؛ اما در این شکل π است؛ بنابراین نمودار دو برابر فشرده شده است؛ لذا $b=\pm 2$. ضمناً نمودار از مبدأ می‌گذرد؛ پس:

$y(0)=0\Rightarrow a-2=0\Rightarrow a=2\Rightarrow a+|b|=2+2=4$

۲۰. گزینه [۴] باید به دنباله الگویی باشیم که اعداد روی محور xها، یعنی ۵ و ۳ و ۱- و ۵- و ۷- را به اعداد ۲ و ۱ و ۱- و ۳- و ۴- تبدیل کند. یکی از این الگوها $\frac{x-1}{2}$ است.

راه دوم: یکی از نقاط روی f را آزمایش می‌کنیم:

$(3,2)\in f\Rightarrow$
- گزینه «۱»: $(\frac{5}{2},2)\in g$ نادرست
- گزینه «۲»: $(2,2)\in g$ نادرست
- گزینه «۳»: $(7,2)\in g$ نادرست
- گزینه «۴»: $(1,2)\in g$ درست

راه سوم: نمودار f را یک واحد به چپ منتقل کرده‌ایم و سپس آن را در راستای محور xها دو برابر منقبض نموده‌ایم؛ پس:

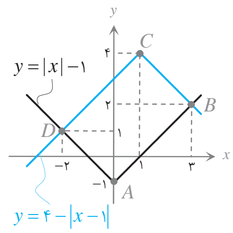
$f(x)\to f(x+1)\to f(2x+1)=g(x)$

از طرف $y_0=f(x_0)$. اگر $2x+1=x_0$ باشد، داریم $x=\frac{x_0-1}{2}$؛ پس:

$y_0=f(x_0)=g(\frac{x_0-1}{2})$

۲۱. گزینه $\boxed{۳}$ $y=۳-f(x-۱)=۳-(|x-۱|-۱)=۴-|x-۱|$

با توجه به شکل:

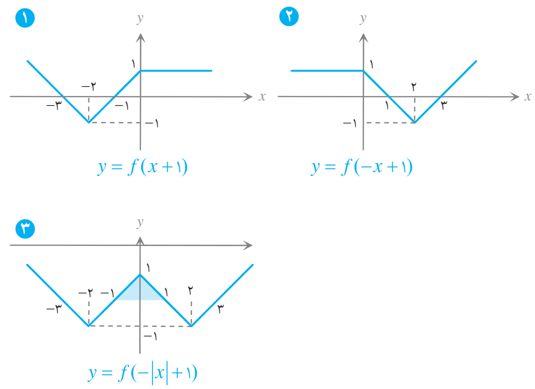


$AB=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۲+۱)^۲}=۳\sqrt{۲}$

$AD=\sqrt{(۰+۲)^۲+(۱+۱)^۲}=۲\sqrt{۲}$

$S\Rightarrow AB\times AD=۱۲$

۲۲. گزینه $\boxed{۱}$



پس مساحت ناحیه برابر $\frac{۲\times۱}{۲}=۱$ است.

۲۳. گزینه $\boxed{۴}$ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: $f(x+۴)\to f(۲x+۴)\to f(۲(-x)+۴)$ ✓

گزینه «۲»:

$f(۲x)\to f(۲(x+۲))\to f(۲x+۴)\to f(۲(-x)+۴)$ ✓

گزینه «۳»:

$f(-x)\to f(-(x-۴))\to f(-x+۴)\to f(-۲x+۴)$ ✓

گزینه «۴»:

$f(-x)\to f(-(۲x))\to f(-۲(x+۲))=f(-۲x-۴)$ ✗

۲۴. گزینه $\boxed{۴}$ گزینه «۱»:

$f(x)\to f(x+۱)\to -f(x+۱)\to -f(x+۱)+۱$ ✓

گزینه «۲»:

$f(۲x)-۱\to -f(۲x)+۱\to -f(۲(x+\frac{۱}{۲}))+۱$

$=-f(۲x+۱)+۱\to -f(۲(\frac{x}{۲})+۱)+۱$ ✓

گزینه «۳»:

$-f(۲x)\to -f(۲(\frac{x}{۲}))=-f(x)\to -f(x+۱)$

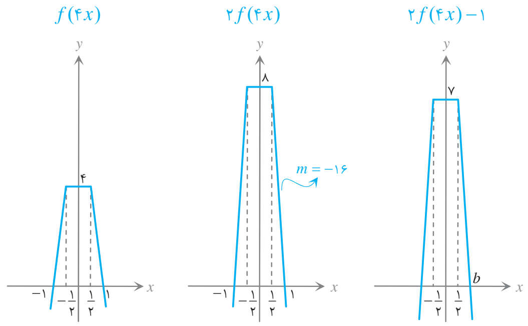
$\to -f(x+۱)+۱$ ✓

گزینه «۴»:

$f(۲(x+۱))=f(۲x+۲)\to f(۲(\frac{x}{۲})+۲)=f(x+۲)$

$\to -f(x+۲)\to -f(x+۲)+۱$ ✗

۲۵. گزینه $\boxed{۱}$ نمودار را در راستای محور x چهار برابر فشرده می‌کنیم؛ سپس در راستای محور y دو برابر منبسط می‌کنیم و سپس یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



برای پیدا کردن b می‌توان با توجه به شیب خط $m=-۱۶$ نوشت:

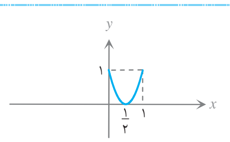
$$-۱۶=\frac{۰-۷}{b-\frac{۱}{۲}}\Rightarrow -۱۶b+۸=-۷\Rightarrow b=\frac{۱۵}{۱۶}$$

پس:

$$S=\frac{(۱+\frac{۱۵}{۸})\times۷}{۲}\times\frac{۸}{۸}=\frac{۲۳\times۷}{۱۶}=\frac{۱۶۱}{۱۶}$$

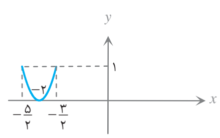
۲۶. گزینه $\boxed{۴}$ نمودار $f(x)$ در راستای محور x دو برابر منقبض شده است:

$f(۲x)$



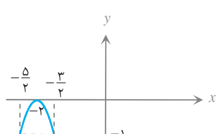
سپس نمودار $\frac{۵}{۲}$ واحد به چپ منتقل شده:

$f(۲(x+\frac{۵}{۲}))=f(۲x+۵)$



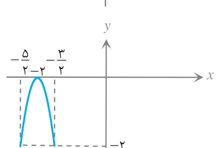
سپس نمودار نسبت به محور xها قرینه شده:

$-f(۲x+۵)$



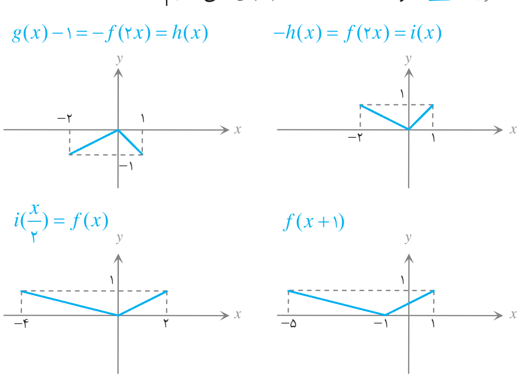
سپس در راستای محور y دو برابر منبسط شده:

$-۲f(۲x+۵)$



و در نهایت یک واحد به پایین منتقل شده: $-۲f(۲x+۵)-۱$

۲۷. گزینه $\boxed{۴}$ نمودار داده‌شده را $g(x)$ می‌نامیم:



۲۸. گزینه ۱ در تابع اولیه به‌ازای $x=۱$ داریم:

$$f(۴)=۱+۴=۵\Rightarrow f(۴)=۵$$

با جای‌گذاری $x=۲$ در تابع داریم:

$$y=۲+f(۴)=۲+۵=۷\Rightarrow y(۲)=۷$$

پس نقطه $(۲\,,۷)$ روی نمودار است.

راه دوم:

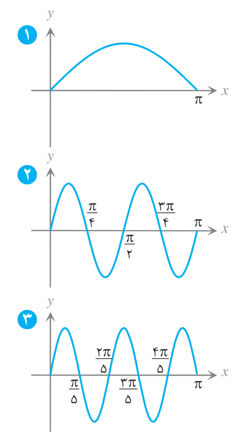
$$f(x+۳)=x+\frac{۴}{x}\Rightarrow f(x)=x-۳+\frac{۴}{x-۳}$$

$$\Rightarrow f(۲x)=۲x-۳+\frac{۴}{۲x-۳}\Rightarrow ۲+f(۲x)=۲x-۱+\frac{۴}{۲x-۳}$$

$$\Rightarrow y=g(x)=۲x-۱+\frac{۴}{۲x-۳}$$

ملاحظه می‌شود که $g(۲)=۷$.

۲۹. گزینه ۲ نمودار $y=\sin x$ محور xها را در فاصله $[۰\,,\pi]$ در دو نقطه ۰ و π قطع می‌کند. اگر نمودار $\sin kx$ مطابق شکل ۲، محور x را در فاصله $[۰\,,\pi]$ در ۵ نقطه قطع کند، $k=۴$ و اگر مطابق شکل ۳ در ۶ نقطه قطع کند، $k=۵$؛ بنابراین اگر $۴\le k<۵$، نمودار $y=\sin kx$ محور xها را در ۵ نقطه قطع خواهد کرد.



راه دوم: نمودار $\sin kx$ در نقاطی به طول $n\pi; n\in\mathbb{Z}$ محور x را قطع می‌کند؛ پس:

$$kx=n\pi\Rightarrow x=\frac{n\pi}{k}$$

به‌ازای $n=۰\,,۱\,,۲\,,\dots\,,۵$ داریم:

$$x=۰\,,\frac{\pi}{k}\,,\frac{۲\pi}{k}\,,\frac{۳\pi}{k}\,,\frac{۴\pi}{k}\,,\frac{۵\pi}{k}$$

باید:

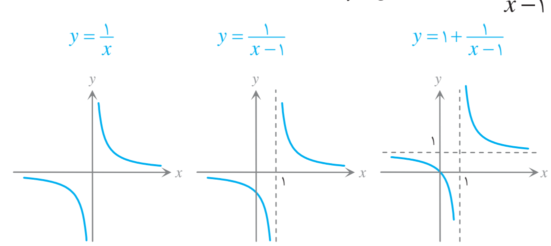
$$\begin{cases}\dfrac{۴\pi}{k}\le\pi\Rightarrow k\ge ۴\\[2mm] \dfrac{۵\pi}{k}>\pi\Rightarrow k<۵\end{cases}\Rightarrow k\in[۴\,,۵)$$

۳۰. گزینه ۴

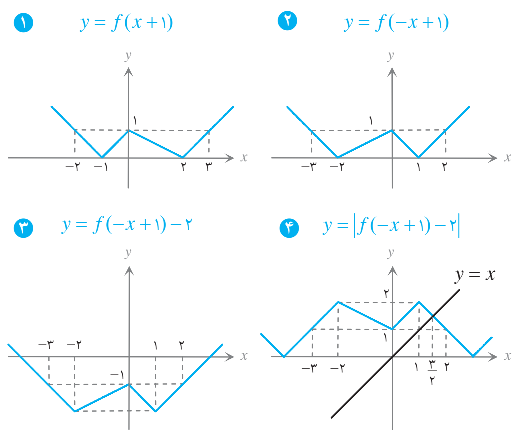
$$g(-x)=-f(x)\Rightarrow g(x)=-f(-x)$$

بنابراین، اگر نمودار $f(x)$ ابتدا نسبت به محور y قرینه شود ($f(-x)$) و سپس نسبت به محور x قرینه شود ($-f(-x)$) نمودار $g(x)$ حاصل می‌شود؛ پس دو نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن‌اند.

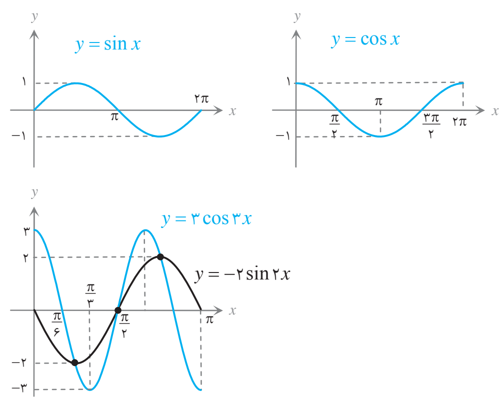
۳۱. گزینه ۱ نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم: $y=\frac{۱}{x-۱}$ و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع $y=۱+\frac{۱}{x-۱}$ حاصل شود.



۳۲. گزینه ۲



۳۳. گزینه ۳



دو نمودار در سه نقطه متقاطع‌اند.

۳۴. گزینه ۲

$$g(x)=۱+f(x+a)=۱+\sin(x+a)$$

نمودار g از مبدأ گذشته است؛ پس:

$$g(۰)=۰\Rightarrow ۱+\sin(۰+a)=۰\Rightarrow \sin a=-۱$$

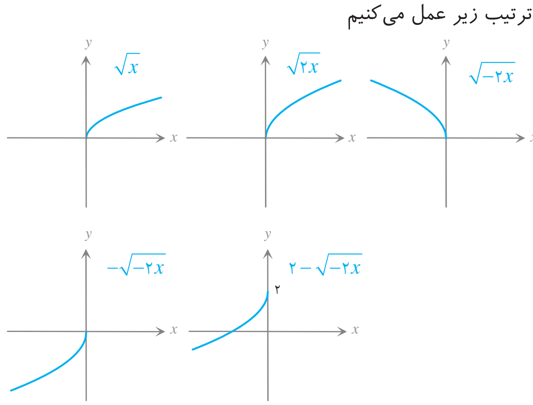
در این گزینه‌ها فقط $a=-\frac{\pi}{۲}$ می‌تواند صحیح باشد.

۳۵. گزینه ۲ با جای‌گذاری $x=۱$ در رابطه داده‌شده، داریم $f(۳)=۳$. با جای‌گذاری $x=۳$ در ضابطه دوم داریم:

$$y=۲f(۲(۳)-۳)=۲f(۳)=۶$$

پس نقطه $(۳\,,۶)$ روی نمودار تابع دوم قرار دارد.

۳۶. گزینه ۱ با توجه به نمودار $\sqrt{x}$، برای رسم $۲-\sqrt{-۲x}$ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم



۳۷. گزینه ۲

$$y=a\cos(\frac{\pi}{۲}+b\pi x)=-a\sin b\pi x$$

بیشترین مقدار تابع برابر ۲ است؛ پس $|a|=۲$. با فرض $a=-۲$ داریم $y=۲\sin b\pi x$. با افزایش x از صفر، مقدار تابع از روی نمودار مثبت است؛ پس $b>۰$. از طرفی باید به‌ازای $x=۳$ اولین نقطه مینیمم تابع حاصل شود؛ پس:

$$۳b\pi=\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ab=-۱$$

البته $a=۲$ و $b=-\frac{۱}{۲}$ نیز قابل قبول است. در این صورت نیز $ab=-۱$.

۳۸. گزینه ۱ فاصله دو نقطه ماکزیمم یا دو نقطه مینیمم در تابع $\cos x$ برابر ۲π است؛ اما در اینجا برابر π است؛ پس $|b|=۲$.
در این صورت $y=a\cos(\pm۲x)+۲$؛ ضمناً:

$$f(\frac{\pi}{۲})=۰\Rightarrow a\cos(\pm\pi)+۲=۰\Rightarrow ۲-a=۰$$

$$\Rightarrow a=۲\Rightarrow a+b=۰ \text{ یا } ۴$$

۳۹. گزینه ۲

$$y=۲-|x|\Rightarrow ۲-|x-۴|\Rightarrow(۲-|x-۴|)-۳=-|x-۴|-۱$$

باید معادله زیر را حل کنیم:

$$۲-|x|=-|x-۴|-۱\Rightarrow |x|-|x-۴|=۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x<۰ & : \ -x+x-۴=۳ & \text{غیرممکن}\\ ۰\le x\le ۴ & : \ x+x-۴=۳\Rightarrow x=۳/۵ & ✓\\ x>۴ & : \ x-x+۴=۳ & \text{غیرممکن}\end{cases}$$

۴۰. گزینه ۴ برای تابع f مقادیر بازه $[-۲,۱]$ قابل تعریف است؛ پس:

$$-۲\le-\frac{۱}{۲}x+۱\le۱\Rightarrow-۳\le-\frac{۱}{۲}x\le۰$$

$$\Rightarrow ۶\ge x\ge۰\Rightarrow D=[۰,۶]$$

$f(-\frac{۱}{۲}x+۱)$ همان نمودار $f(x)$ است که در راستای افقی انتقال یافته و منبسط شده است؛ لذا برد آن تغییر نمی‌کند؛ پس:

$$-۱\le f(-\frac{۱}{۲}x+۱)\le۳\Rightarrow-۲\le۲f(-\frac{۱}{۲}x+۱)\le۶$$

$$\Rightarrow-۳\le۲f(-\frac{۱}{۲}x+۱)-۱\le۵\Rightarrow R=[-۳,۵]$$

پس:

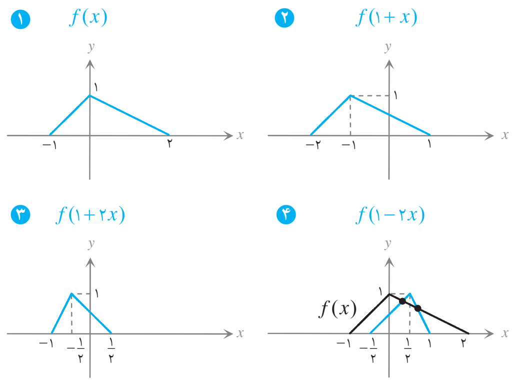
$$D\cap R=[۰,۶]\cap[-۳,۵]=[۰,۵]$$

این مجموعه شامل ۶ عضو صحیح است.

۴۱. گزینه ۲ باید نمودار نسبت به محور xها قرینه شود $b<۰$ و سپس به بالا منتقل شود $a>۰$ یک چهارضلعی حاصل شود. بنابراین، گزینه «۲» صحیح است.

توجه اگر $|b|\neq۱$ باشد، دو ضلع متوالی بر هم عمود نمی‌شوند. اگر چهارضلعی حاصل مستطیل باشد، $b=-۱$.

۴۲. گزینه ۲ برای رسم $f(۱-۲x)$ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

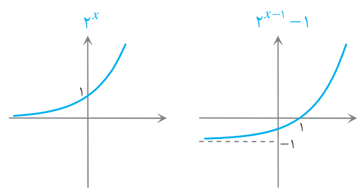


تعداد نقاط برخورد ۲ است.

۴۳. گزینه ۱

$$f(x)=۲^{۲x+۱}-۱\Rightarrow f(\frac{x}{۲}-۱)=۲^{۲(\frac{x}{۲}-۱)+۱}-۱=۲^{x-۱}-۱$$

نمودار تابع $۲^{x-۱}-۱$ به‌صورت زیر است:



باید زیر رادیکال نامنفی باشد. یعنی $x(۲^{x-۱}-۱)\ge۰$. $x=۰\in D_f$، اکنون دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) اگر $x>۰$، باید:

$$۲^{x-۱}-۱\ge۰\Rightarrow x\ge۱\xrightarrow{x>۰}x\ge۱$$

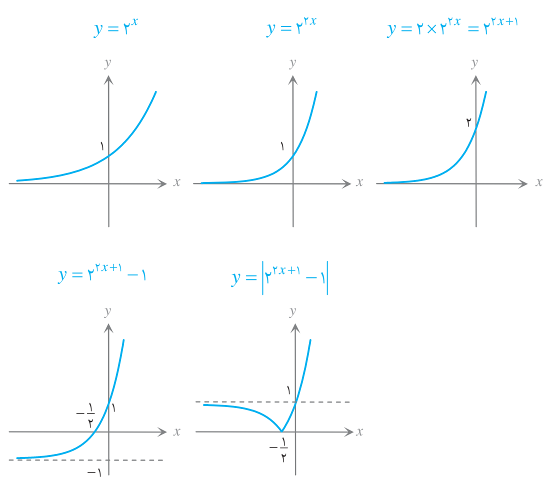
ب) اگر $x<۰$، باید:

$$۲^{x-۱}\le۰\Rightarrow x\le۱\xrightarrow{x<۰}x<۰$$

پس:

$$D=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty)$$

۴۴. گزینه ۴



۴۵. گزینه ۳ ضابطه تابع f چنین است:

$$f(x)=\begin{cases}x & ; \ x\le ۲\\ -۲x+۶ & ; \ x>۲\end{cases}$$

حال ضابطه تابع g را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=\begin{cases}a+x+b & ; \ x+b\le ۲\\ a-۲(x+b)+۶=-۲x+a-۲b+۶ & ; \ x+b>۲\end{cases}$$

نمودار تابع g از نقاط $(-۳,۰)$ و $(۳,۰)$ می‌گذرد؛ پس:

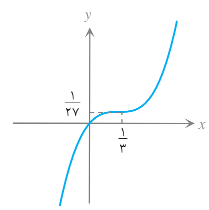
$$\begin{cases}g(-۳)=۰\Rightarrow a-۳+b=۰\\ g(۳)=۰\Rightarrow -۶+a-۲b+۶=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=۳\\ a-۲b=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=۱\end{cases}\Rightarrow ۲a+b=۵$$

۴۶. گزینه ۲

$$y=(x^۳-x^۲+\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۲۷})+\frac{۱}{۲۷}=(x-\frac{۱}{۳})^۳+\frac{۱}{۲۷}$$

کافی است نمودار $y=x^۳$ را $\frac{۱}{۳}$ به راست و $\frac{۱}{۲۷}$ به بالا منتقل کنیم.



۴۷. گزینه ۱ توابع $y_۱=x^۳$ و $y_۲=x-۵$ صعودی اکیدند؛ پس مجموع آنها $y=x^۳+x-۵$ نیز اکیداً صعودی است. نمودار این تابع درجه سوم، محور x را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس معادله فقط یک ریشه دارد.

۴۸. گزینه ۲ چون f نزولی اکید است، داریم:

$$۲a-۱>۱+۳a\Rightarrow a<-۲$$

۴۹. گزینه ۲ لازم است داخل لگاریتم مثبت باشد:

$$f(x-۱)>f(۳-x)\Rightarrow x-۱<۳-x\Rightarrow ۲x<۴$$

$$\Rightarrow x<۲\Rightarrow D=(-\infty,۲)$$

۵۰. گزینه ۴

$$f=\{(۲,-۱),(۳,۱),(۴,a),(۵,۵),(۱۰-a,۷)\}$$

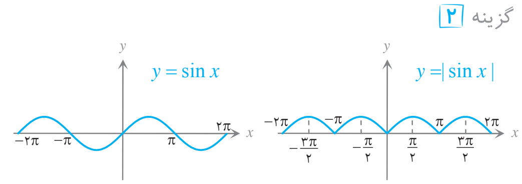
$$۳<۴<۵\Rightarrow f(۳)\le f(۴)\le f(۵)\Rightarrow ۱\le a\le ۵$$

ضمناً به علت وجود دو زوج مرتب $(۱۰-a,۷)$ و $(۵,۵)$ باید:

$$۱۰-a>۵\Rightarrow a<۵$$

پس $۱\le a<۵$ که شامل چهار عدد صحیح است.

۵۱. گزینه ۲



با توجه به شکل، تابع روی بازه $[-\frac{۵\pi}{۴},-\pi)$ که زیر بازه $[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$ است، اکیداً نزولی است.

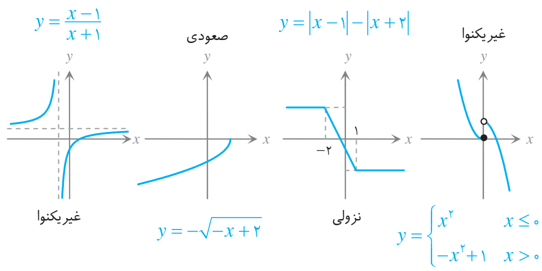
۵۲. گزینه ۴ تابع $f(x)=x$ اکیداً صعودی است؛ اما توابع $|f(x)|=f(|x|)=|x|$ و $f^۲(x)=x^۲$ غیریکنوا هستند. ترکیب دو تابع صعودی، تابعی است صعودی؛ پس fof صعودی اکید است.

۵۳. گزینه ۳ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: $۲>۱$ و $f(۲)>f(۱)$؛ پس f نزولی نیست (تابع غیریکنواست).

گزینه «۲»: $۲>۱$ و $f(۲)>f(۱)$؛ پس f نزولی نیست (تابع صعودی است).

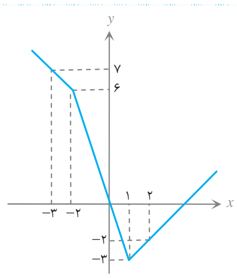
گزینه «۴»: $\frac{۱}{۲}>۰$ و $f(\frac{۱}{۲})>f(۰)$؛ پس f نزولی نیست (تابع غیر یکنواست).



۵۴. گزینه ۲ نمودار تابع را به کمک نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

x	-۳	-۲	۱	۲
y	۷	۶	-۳	-۲

ملاحظه می‌شود که تابع روی بازه $[۱,+\infty)$ صعودی (اکید) است.



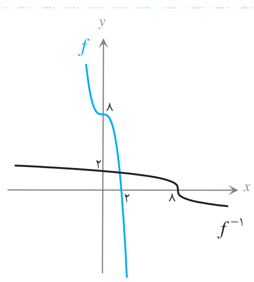
۵۵. گزینه ۴ ترکیب m تابع صعودی و n تابع نزولی تابعی است:

الف) صعودی اگر n زوج باشد.

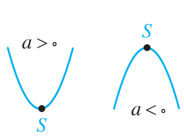
ب) نزولی اگر n فرد باشد.

پس اگر f نزولی باشد، fof صعودی است.

۵۶. گزینه ۱ نمودار دو تابع $f(x)=-x^۳+۸$ و $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۸-x}$ را رسم می‌کنیم (نمودار این دو تابع، نسبت به خط $y=x$ تقارن دارند). با توجه به شکل مقابل، دو نمودار فقط در یک نقطه متقاطع‌اند.



۵۷. گزینه ۳ تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ در حالتی که $a>۰$ روی $[x_S,+\infty)$ و در حالتی که $a<۰$ روی $(-\infty,x_S]$ اکیداً صعودی است؛ پس لازم است:



$$\begin{cases}a-۴>۰\Rightarrow a>۴\\ x_S\le ۱\Rightarrow -\frac{-۲}{۲(a-۴)}\le ۱\overset{a>۴}{\Rightarrow} ۱\le a-۴\Rightarrow a\ge ۵\end{cases}$$

پس باید $a\ge ۵$.

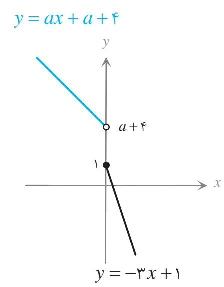
۵۸. گزینه [۲] تابع درجه دوم روی $\mathbb{R}$ همواره غیریکنواست؛ پس لازم است $a=0$. در این صورت $f(x)=bx+2$. برای آنکه تابع اکیداً نزولی باشد، باید $b<0$؛ پس $a+b<0$.

۵۹. گزینه [۲] هر دو تابع x^3 و x اکیداً صعودی‌اند؛ پس $f(x)$ اکیداً صعودی است. باید زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$f(x-1)-f(2x)\ge 0\Rightarrow f(x-1)\ge f(2x)$$

$$\Rightarrow x-1\ge 2x\Rightarrow x\le -1$$

۶۰. گزینه [۳] اولاً لازم است هر دو ضابطه در دامنه خود اکیداً نزولی باشند؛ پس باید $a<0$. حال دقت کنید که:



$$x\ge 0\Rightarrow -3x+1\le 1$$

$$x<0\Rightarrow ax+a+4\ge a+4$$

با توجه به شکل باید:

$$a+4\ge 1\Rightarrow a\ge -3$$

پس باید $-3\le a<0$.

۶۱. گزینه [۲] ضابطه تابع f به‌صورت زیر است:

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}=1\Rightarrow 2x-y=-2\Rightarrow f(x)=y=2x+2$$

ضابطه تابع داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$y=(x-2x-2)(x+3)=(-x-2)(x+3)=-x^2-5x-6$$

تابع درجه دوم در یک طرف رأس اکیداً یکنواست. این تابع نیز در هریک از بازه‌های $(-\infty,-\frac{5}{2}]$ یا $[-\frac{5}{2},+\infty)$ اکیداً یکنواست.

۶۲. گزینه [۲]

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & x\le 0\\ 2 & x\ge 0\end{cases}\quad,\quad g(x)=\begin{cases}-2 & x\le -2\\ \frac{1}{2}x-1 & -2\le x\le 4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

پس:

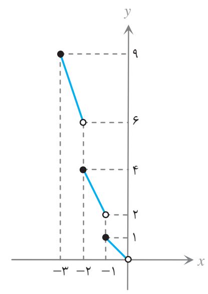
$$f(x)-g(x)=\begin{cases}x+4 & x\le -2\\ \frac{1}{2}x+3 & -2\le x\le 0\\ -\frac{1}{2}x+3 & 0\le x\le 4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که تابع در بازه $[0,4]$ اکیداً نزولی است.

۶۳. گزینه [۳] $f(x)=x$ اکیداً یکنواست؛ اما توابع $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}$؛ $\frac{1}{f^2(x)}=\frac{1}{x^2}$ و $f^2(x)=x^2$ غیریکنوا هستند؛ پس گزینه «۳» صحیح است. اگر f صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، f^{-1} نیز صعودی اکید یا نزولی اکید است.

۶۴. گزینه [۲]

$$f(x)=\begin{cases}-x & -1\le x<0\\ -2x & -2\le x<-1\\ -3x & -3\le x<-2\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

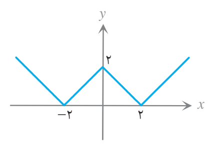


با توجه به شکل، تابع اکیداً نزولی است. دقت کنید که x و $[x]$ توابعی اکیداً صعودی و صعودی‌اند و هر دو منفی‌اند. پس حاصل‌ضرب آن‌ها اکیداً نزولی است.

$$x_1<x_2<0\quad,\quad [x_1]\le[x_2]<0\Rightarrow x_1[x_1]>x_2[x_2]$$

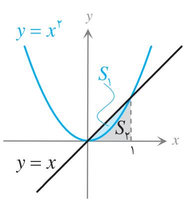
۶۵. گزینه [۳] ضابطه تابع را ساده و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}|x-2| & x>0\\ |x+2| & x<0\end{cases}$$



تابع در بازه $[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}]$ اکیداً صعودی است.

۶۶. گزینه [۱] با توجه به مفروضات مسئله و شکل مقابل:



$$S_1=\frac{1}{6}\quad,\quad S_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

منحنی $y=x^3$ در بازه $(0,1)$ زیر منحنی $y=x^2$ است؛ پس ناحیه بین منحنی $y=x^3$، محور x و خطوط $x=0,1$ کمتر از $\frac{1}{3}$ است. تنها گزینه‌ای که کمتر از $\frac{1}{3}$ است، گزینه «۱» است.

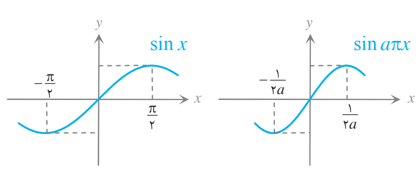
۶۷. گزینه [۳] دامنه تابع $f+g$ برابر $\{0,\pm1\}$ است و داریم:

$$f+g=\{(-1,1),(0,[a]),(1,3)\}$$

باید:

$$1\le[a]\le 3\Rightarrow 1\le a<4$$

۶۸. گزینه [۱] نمودار تابع $\sin x$ و $\sin a\pi x$ با فرض $a>0$ به صورت زیر است. دقت کنید که اعداد روی محور x ها به $a\pi$ تقسیم می‌شود.



اگر تابع $\sin a\pi x$ در بازه $[-2,2]$ صعودی باشد، باید $2\le\frac{1}{2a}$ باشد، پس $0<a\le\frac{1}{4}$ است. برای $a<0$ نمودار تابع قرینه می‌شود؛ پس در سمت راست مبدأ، تابع نزولی خواهد بود.

۶۹. گزینه $\boxed{۴}$ اگر تابع f نزولی و فقط مثبت یا فقط منفی باشد، $\frac{۱}{f}$ صعودی است؛ بنابراین تابع $\frac{۱}{f}$ در بازه $(-۱,۰)$ و نیز در بازه $(۰,۱)$ صعودی است؛ اما تابع $\frac{۱}{f}$ در دامنه خود، یعنی $(-۱,۱)-\{۰\}$ غیریکنواست. چون f در این بازه صفر شده و تغییر علامت داده است.

۷۰. گزینه $\boxed{۲}$

$$y=\begin{cases}(a-۱)x-۱ & x\geq ۰\\ (a+۱)x-۱ & x\leq ۰\end{cases}$$

تابع فوق اکیداً نزولی است، هرگاه هر دو ضابطه اکیداً نزولی باشد؛ در این صورت باید:

$$\begin{cases}a-۱<۰\Rightarrow a<۱\\ a+۱<۰\Rightarrow a<-۱\end{cases}\Rightarrow a<-۱$$

۷۱. گزینه $\boxed{۲}$ سهمی در $x=-۱,۳$ محور x ها را قطع کرده است؛ پس $y=a(x+۱)(x-۳)$. در این صورت:

$$y=۲f(x)-x^۲=۲a(x^۲-۲x-۳)-x^۲$$
$$=(۲a-۱)x^۲+۲a(-۲x-۳)$$

اگر تابع فوق یکنوا باشد، $۲a-۱=۰$ یا $a=\frac{۱}{۲}$ در این صورت؛ معادله سهمی چنین است:

$$y=\frac{۱}{۲}(x^۲-۲x-۳)=\frac{۱}{۲}x^۲-x-\frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow y_S=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۱+۳}{۲}=-۲$$

۷۲. گزینه $\boxed{۱}$ به‌ازای $x\geq ۰$ دو تابع $x^۲$ و $-f(x)$ صعودی‌اند؛ پس مجموع آن‌ها نیز صعودی است؛ بنابراین کمترین و بیشترین مقدار در بازه $[۰,۱]$ به‌ازای $x=۰$ و $x=۱$ ایجاد می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l}y(۰)=۰-۵=-۵\\ y(۱)=۱-۰=۱\end{array}\right\}\Rightarrow R_۱=[-۵,۱]$$

به‌طور مشابه به‌ازای $x<۰$ دو تابع $x^۲$ و $-f(x)$ نزولی است؛ لذا مجموع آن‌ها نیز نزولی است و داریم:

$$y(-۲)=۴-۰=۴\quad,\quad y(۰^-)=۰-۷=-۷$$
$$\Rightarrow R_۲=(-۷,۴]$$

پس:

$$R=R_۱\cup R_۲=[-۵,۱]\cup(-۷,۴]=(-۷,۴]$$

برد شامل ۱۱ عدد صحیح است.

۷۳. گزینه $\boxed{۱}$ تابع $f(x)=x-۱+a$ اکیداً یکنواست. اگر f تغییر علامت ندهد، $\frac{۱}{f}$ نیز اکیداً یکنواست:

$$x-۱+a=۰\Rightarrow x=۱-a$$

باید $۱-a$ به بازه $(۳,+\infty)$ تعلق نداشته باشد:

$$۱-a\leq ۳\Rightarrow a\geq -۲$$

۷۴. گزینه $\boxed{۴}$

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\sin x\cos x}\times\frac{۲}{۲}=\frac{۲}{\sin ۲x}$$

وقتی x از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند، $۲x$ از صفر تا π تغییر می‌کند. در این صورت $\sin ۲x$ با مقادیر مثبت ابتدا صعودی است و سپس نزولی؛ بنابراین تابع $\frac{۲}{\sin ۲x}$ ابتدا نزولی است و سپس صعودی (دقت دارید که $\sin ۲x$ تغییر علامت نمی‌دهد).

۷۵. گزینه $\boxed{۲}$ توابع $\sqrt{x-۳}$ و $-۲\sqrt{۱۲-x}$ هر دو اکیداً صعودی‌اند، بنابراین مجموع آنها نیز اکیداً صعودی است. از طرفی $۳\leq x\leq ۱۲$، پس مقدار $f(x)=\sqrt{x-۳}-۲\sqrt{۱۲-x}$ در محدوده $[f(۳),f(۱۲)]$ قرار دارد.

$$f(۳)\leq f(x)\leq f(۱۲)\Rightarrow -۶\leq k\leq ۳$$

حداقل k برابر ۶- است.

۷۶. گزینه $\boxed{۳}$ حاصل‌جمع دو تابع اکیداً صعودی، تابعی اکیداً صعودی است؛ مانند گزینه «۳»

در گزینه «۱»: $۱<۲\Rightarrow f(۱)<f(۲)\Rightarrow ۰<۰$ نادرست

در گزینه «۲»: $-۲<-۱\Rightarrow f(-۲)<f(-۱)\Rightarrow ۰<۰$ نادرست

در گزینه «۴»: $۰<۱\Rightarrow f(۰)<f(۱)\Rightarrow ۰<۰$ نادرست

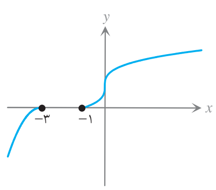
راه دوم: تابعی که یک‌به‌یک نباشد، اکیداً یکنوا نیست.

گزینه «۱»: $y=۰\Rightarrow x=۰,۱,\ldots$

گزینه «۲»: $y=۰\Rightarrow x=-۱,-۲,\ldots$

گزینه «۴»: $y=۰\Rightarrow x=۰,۱,-۱$

۷۷. گزینه $\boxed{۳}$ با توجه به شکل واضح است که تابع صعودی است.



۷۸. گزینه $\boxed{۲}$ با جای‌گذاری $x=۴$ و $x=۳$ در رابطه داریم:

$$x=۴\quad:\quad ۴f(۳)=f(۴)\Rightarrow f(۴)=۴۸$$
$$x=۳\quad:\quad ۳f(۲)=۰\Rightarrow f(۲)=۰$$
$$x=۲\quad:\quad ۲f(۱)=۰\Rightarrow f(۱)=۰$$
$$x=۱\quad:\quad ۱f(۰)=۰\Rightarrow f(۰)=۰$$

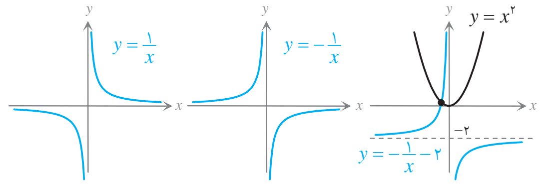
از آنجا که $f(۰)=f(۱)=f(۲)=۰$، عبارت درجه سوم $f(x)$ بر x، $x-۱$ و $x-۲$ بخش‌پذیر است؛ پس:

$$f(x)=ax(x-۱)(x-۲)\overset{f(۳)=۱۲}{\Longrightarrow}۱۲=a(۳)(۲)(۱)\Rightarrow a=۲$$

پس:

$$f(x)=۲x(x-۱)(x-۲)\Rightarrow f(-۱)=۲(-۱)(-۲)(-۳)=-۱۲$$

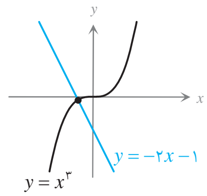
۷۹. گزینه ۱ معادله را به روش هندسی بررسی می‌کنیم:



ملاحظه می‌شود که دو نمودار در یک نقطه متقاطع‌اند.

راه دوم: دو طرف را در x ضرب می‌کنیم:

نمودار توابع $y=x^3$ و $y=-2x-1$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



دو نمودار در یک نقطه متقاطع‌اند.

۸۰. گزینه ۲ لازم است تقعر سهمی رو به بالا باشد تا تابع در بازه‌ای مثل $(1,+\infty)$ که از راست نامتناهی است صعودی باشد؛ پس $a+1>0$ یا $a>-1$. ضمناً اگر S رأس سهمی باشد، باید $x_S\le 1$؛ پس:

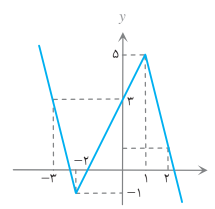
$$-\frac{-2(2a+1)}{2(a+1)}\le 1\Rightarrow \frac{2a+1}{a+1}\le 1\Rightarrow \frac{a}{a+1}\le 0$$

$$\Rightarrow -1<a\le 0 \overset{a>-1}{\Rightarrow} -1<a\le 0$$

حال دقت کنید که اگر $a=-1$ داریم $y=4x-2$ که تابعی است صعودی اکید؛ پس باید: $a\in(-1,0]\cup\{-1\}=[-1,0]$ که شامل دو مقدار صحیح است.

۸۱. گزینه ۲ تابع روی بازه $[-2,1]$ (اکیداً) صعودی است.

x	-3	-2	1	2
y	3	-1	5	1

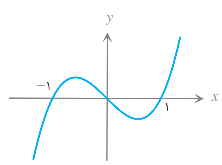


۸۲. گزینه ۱ دو تابع $\log x$ و $x>0$; x^2 اکیداً صعودی‌اند؛ پس $f(x)=x^2+\log x$ نیز در بازه $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است. ضمناً برد این تابع $\mathbb{R}$ است. بنابراین تابع f همه مقادیر حقیقی را دقیقاً یک‌بار اختیار می‌کند؛ پس معادله $x^2+\log x=k$ ($k\in\mathbb{R}$) همواره دقیقاً یک ریشه دارد.

۸۳. گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: $y=\frac{1}{x}$ یک‌به‌یک، اما غیریکنواست.

گزینه «۳»: تابع درجه سوم $y=x^3-x$ غیریکنواست.

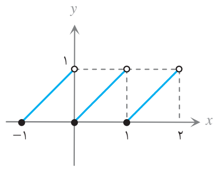


گزینه «۴»: مجموع دو تابع اکیداً یکنوای $y=x$ و $y=-x$ اکیداً یکنوا نیست.

گزینه «۲»: هر تابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک است. اثبات این مطلب با برهان خلف به‌سادگی انجام می‌شود.

۸۴. گزینه ۳ گزینه «۱»:

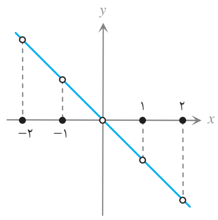
$$f(\tfrac{1}{2})>f(0)\ ,\ \tfrac{1}{2}>0$$



پس تابع نزولی نیست (غیریکنواست).

گزینه «۲»: می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$؛ پس:

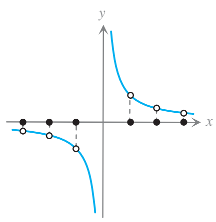
غیریکنوا $y=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -x & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$



گزینه «۳»: دامنه تابع $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ است و در این دامنه $y=-x$ که نزولی اکید است.

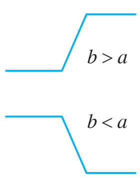
گزینه «۴»:

غیریکنوا $y=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ \frac{1}{x} & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$



۸۵. گزینه ۳

نمودار تابع $y=|x-a|-|x-b|$ به یکی از دو صورت مقابل است:



پس برای آنکه تابع مطابق شکل اول صعودی باشد، باید:

$$a+4>2a+1\Rightarrow a<3 \overset{a\in\mathbb{N}}{\Rightarrow} a=1,2$$

ضمناً به‌ازای $a=3$ به تابع ثابت $y=|x-7|-|x-7|=0$ می‌رسیم که هم صعودی است و هم نزولی؛ پس a می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ باشد.

۸۶. گزینه ۳

– ترکیب دو تابع اکیداً نزولی، تابعی است اکیداً صعودی.

– نوع یکنوایی توابع f و f^{-1} یکسان است.

– اگر f نزولی باشد، به‌شرطی $\frac{1}{f}$ یکنوا و البته صعودی است که f تغییر علامت ندهد؛ در غیر این صورت غیریکنواست، مانند تابع $f(x)=-x$ که نزولی است؛ اما $y=\frac{-1}{x}$ غیریکنواست.

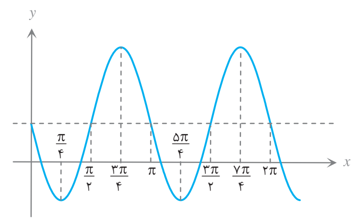
– وضعیت یکنوایی f^2 قابل پیش‌بینی نیست؛ مثلاً $f(x)=-x$ نزولی است؛ اما $f^2(x)=x^2$ غیریکنواست.

۸۷. گزینه ۴ توابع $\sqrt{x-3}$ و $\sqrt{2x-1}$ هر دو اکیداً صعودی‌اند؛ پس جمع آنها نیز اکیداً صعودی است. از طرفی باید $x\ge 3$ باشد، بنابراین حاصل $p(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-3}$ بزرگ‌تر یا مساوی $p(3)=\sqrt{5}$ است و نمی‌تواند برابر ۲ باشد. یعنی معادله جواب ندارد.

۸۸. گزینه [۲] باید تابع $\sin ۲x$ صعودی اکید باشد. $\sin x$ در بازه‌هایی به‌صورت $[۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\,,۲k\pi+\frac{\pi}{۲}]$ صعودی اکید است؛ پس باید:

$$۲x\in[۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\,,۲k\pi+\frac{\pi}{۲}]\Rightarrow x\in[k\pi-\frac{\pi}{۴}\,,k\pi+\frac{\pi}{۴}]$$

مثلا به‌ازای $k=۱$ بازه $[\frac{۳\pi}{۴}\,,\frac{۵\pi}{۴}]$ حاصل می‌شود.



۸۹. گزینه [۳] ضابطه دو تابع را می‌نویسیم:

$$f:\frac{x}{۴}+\frac{y}{۴}=۱\Rightarrow x+y=۴\Rightarrow f(x)=y=-x+۴$$

$$g:y-(-۲)=\frac{۲-(-۲)}{۲-۰}(x-۰)\Rightarrow g(x)=y=۲x-۲$$

پس: $\frac{f}{g}(x)=\frac{-x+۴}{۲x-۲}$. این تابع در بازه‌ای که شامل ریشه مخرج نباشد اکیداً یکنواست؛ مانند بازه $(۱\,,+\infty)$؛ ضمناً در این بازه داریم:

$$y=\frac{-\frac{۱}{۲}(۲x-۲)+۳}{۲x-۲}=-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲x-۲}$$

تابع در بازه $(۱\,,+\infty)$ یا $(-\infty\,,۱)$ مانند تابع $\frac{۱}{x}$ اکیداً نزولی است.

۹۰. گزینه [۱] هر دو تابعی اکیداً صعودی هستند و ترکیب دو تابع صعودی اکید، تابعی است صعودی اکید.

۹۱. گزینه [۴] باقی‌مانده $f(x)$ بر $x+۱$ برابر $f(-۱)$ است؛ پس:

$$f(-۱)=۰\Rightarrow ۱-a+۳+۲a=۰$$

$$\Rightarrow a=-۴\Rightarrow f(x)=x^۴-۴x^۳-۳x-۸$$

باقی‌مانده $f(x)$ را بر $x-۱$ می‌یابیم:

$$R=f(۱)=۱-۴-۳-۸=-۱۴$$

۹۲. گزینه [۱] $f(x)$ بر $(x-۱)(x+۱)$ بخش‌پذیر است؛ پس هم بر $x-۱$ بخش‌پذیر است و هم بر $x+۱$؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}R_۱=f(۱)=۰\Rightarrow ۱+a+b-۳+۱=۰\Rightarrow a+b=۱\\ R_۲=f(-۱)=۰\Rightarrow -۱+a-b+۳+۱=۰\Rightarrow a-b=-۳\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a=-۱\,,b=۲\Rightarrow ab=-۲$$

راه دوم: $x^۲-۱=۰\Rightarrow x^۲=۱$

می‌توان در مقسوم به‌جای $x^۲$ عدد یک را قرار داد:

$$f(x)=(x^۲)^۲x+a(x^۲)^۲+b(x^۲)x-۳x+۱$$

$$\Rightarrow ۱x+a+bx-۳x+۱\Rightarrow R(x)=(b-۲)x+(a+۱)=۰$$

$$\Rightarrow b=۲\,,a=-۱\Rightarrow ab=-۲$$

۹۳. گزینه [۲] $f(۲x+۱)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است؛ پس $f(۳)=۰$

از طرفی مانده $f(۲x-۱)$ بر $x-۲$ برابر است با:

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow R=f(۲(۲)-۱)=f(۳)=۰$$

پس $f(۲x-۱)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است.

راه دوم: در حالت خاص فرض کنیم $f(۲x+۱)=x-۱$. با جای‌گذاری $x-۱$ به جای x داریم: $f(۲x-۱)=x-۲$؛ پس $f(۲x-۱)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است.

۹۴. گزینه [۲] رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$f(x)=x(x-۲)q(x)+۳x-۱\qquad (※)$$

باقی‌مانده تقسیم $g(x)=f(۳x+۵)$ بر $x+۱$ برابر $g(-۱)=f(۲)$ است. با جای‌گذاری $x=۲$ در رابطه (※) داریم:

$$R=f(۲)=۰+۵=۵$$

راه دوم: در حالت خاص فرض کنید $f(x)=۳x-۱$ و مسئله را بررسی کنید.

۹۵. گزینه [۴] رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$f(x)=(x^۲-۹)q(x)+۹x+۳$$

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-۳$ و $x+۳$ به‌ترتیب برابر $f(۳)$ و $f(-۳)$ است. با جای‌گذاری در رابطه بالا داریم:

$$\begin{array}{l}r_۱=f(۳)=۳۰\\ r_۲=f(-۳)=-۲۴\end{array}\Rightarrow r_۱+r_۲=۶$$

۹۶. گزینه [۴] عبارت را $f(x)$ می‌نامیم. $f(x)$ بر $(x+۱)(x-۲)$ بخش‌پذیر است؛ پس بر $x+۱$ و $x-۲$ نیز بخش‌پذیر است:

$$\begin{cases}f(-۱)=۰\Rightarrow ۱-a+b-۴=۰\\ f(۲)=۰\Rightarrow ۱۶+۸a+۴b-۴=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+b=۳\\ ۲a+b=-۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\ b=۱\end{cases}\Rightarrow a+b=-۱$$

۹۷. گزینه [۲] باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $۲x-۴$ برابر $f(۲)$ است؛ پس $f(۲)=۷$. باقی‌مانده تقسیم $g(x)=۲f(x)$ بر $x-۲$ برابر $۲f(۲)=۱۴$ است.

راه دوم: در حالت خاص فرض کنید $f(x)=۷$ و مسئله را بررسی کنید.

۹۸. گزینه [۴] $a^{۱۶}+b^{۱۶}=(a^۲)^۸+(b^۲)^۸$

چون ۸ زوج است عبارت $a^{۱۶}+b^{۱۶}$ بر $a^۲+b^۲$ بخش‌پذیر نیست. به همین ترتیب چون $\frac{۸}{۲}$ و $\frac{۱۲}{۲}$ زوج‌اند، گزینه‌های «۲» و «۳» نادرست‌اند؛ اما:

$$a^{۱۸}+b^{۱۸}=(a^۲)^۹+(b^۲)^۹$$

پس این عبارت بر $a^۲+b^۲$ بخش‌پذیر است.

۹۹. گزینه [۱]

$$\begin{array}{l|l}
x^۵+۳x^۲+۲x+۳ & x^۲+۲x+۱\\ \cline{2-2}
\underline{x^۵+۲x^۴+x^۳} & x^۳-۲x^۲+۳x-۱\\
-۲x^۴-x^۳+۳x^۲+۲x+۳ & \\
\underline{-۲x^۴-۴x^۳-۲x^۲} & \\
\quad ۳x^۳+۵x^۲+۲x+۳ & \\
\quad \underline{۳x^۳+۶x^۲+۳x} & \\
\qquad -x^۲-x+۳ & \\
\qquad \vdots &
\end{array}$$

$$\Rightarrow Q(x)=x^۳-۲x^۲+۳x-۱\Rightarrow Q(۱)=۱$$