



ریاضیات گسته

پایه دوازدهم

مؤلف:

رسول حاجیزاده



انتشارات خوشنویس

پیشگفتار ناشر

خنده و گریه

تا حالا شده توی یه مکان عمومی مثل رستوران، بانک و ... یه موضوع خنده‌داری براتون اتفاق یافته بخواید از ته دل بخندید، اونم در حد انفجار؟!! چی کار می‌کنید؟ خجالت رو می‌ذارید کنار و از ته دل می‌خندید اونم طوری که همه با خنده‌تون بخندن یا نه، یکم چاشی شو می‌آرید پایین طوری که چند فر اطرافتون بفهمن یا فقط به یه لبخند کوچک بسنده می‌کنید؟!

حالا اگر یه انتقام ناراحت کننده افاده باشه چی؛ گریه‌توشو پهون می‌کنید، یا به چند قشره اشک اکتفا می‌کنید، یا نه بیشتر، با چشمای گریون شروع می‌کنید تو خیابون قدم زدن!!

نمی‌دونم کدموشون منطقی به نظر میاد!!

از نظر شما کدومش درسته؟! خنده‌ای که باعث خنده دیگران بشه یا گریه‌ای که غم رو تو دل دیگران راه بد.

اگر خنده‌تون باعث شه که یه نحظه یه نفر از غم‌های دنیا رها شه، باید این کار رو بکنید یا نکنید؟! من که باشم می‌کنم (البته طوری که نودگی به نظر نیاد). اگر گریه‌تون باعث شه بغض دل یه نفر دیگه بترکه و اونم شروع کنه به گریه، باید این کار رو بکنید یا نکنید؟! من که بشم می‌کنم.

خب شاید بگید که چی؟!

احتمالاً هر کدوم از مالذت خنده‌هایی که با خنده‌ی خودمون ایجاد کردیم رو تجربه کردیم. چه حسن جالبی داره، وقتی بلند می‌خندي و همه به صدای خنده‌ی تو می‌خنلن، یکی از ته دل و بدون قضاوت تو، یکی با دلیل اینکه چه خوب! دلش شاده و یکی با این فکر که بابا اینم رد داده. ولی هر کدوم با هر دیدی با تو همراه می‌شن شروع می‌کنن به خنده‌دن.

حسن جالبیه اگر تجربه نکردید حتماً تو یه مکان و فضای مناسب امتحان کنید (نرید و سط مراسم عزاداری بعد بگیم حرفت جواب نداد).

هر کاری تو ش یه ندتی داره. اگر آدم ته دلش صاف و صادق باشه شاید کوچکترین کارش هم همراه با مالذت باشه.

شما تو چه چیزی استعداد دارید؟

من یکی از استعدادهای تو ریاضی پیدا کردم، همه یه استعداد یا توانایی ندارن، به قول اساتید علوم تریتی و اجتماعی، سی و چند شاخه‌ی توانایی و استعداد داریم که هر فردی می‌تونه توی چندتا از شاخه‌ها استعداد داشته باشه و هیچ کسی هم نیست که توی تمام شاخه‌ها توانایی داشته باشه. یکی استعداد ورزشی داره اونم نه تو همایی رشته‌ها یکی شناگر خویی، یکی فوتبالیست، یکی ژیمناست، یکی تیسیور و، یکی استعداد تو هنر تاشی داره، یکی مجسمه‌سازی، یکی بازیگری، یکی گلدوزی، یکی فرشبافی و، یکی استعداد ریاضی داره، یکی فیزیک، یکی تاریخ، یکی ادبیات و ...

گفتم یه انسان تک بعدی نیست ممکنه یه تاجر ورزشکار مهندس باشی مثل علی دایی یا پزشک آهنگساز خواننده باشی مثل محمد اصفهانی یا استادِ مجری برنامه‌سازِ مهندس باشی مثل عادل فردوسی‌پور یا ...

حالا اگر پرسید چطور باید استعدادهایتونو بشناسید می‌گم یکی از راههای مدرسه است که به دلیل سیستم آموزشی نادرست یا ناقص ممکنه تونه کمک لازم رو بهتون بکنه. ولی شما می‌تونید استعدادتونو با مطالعه، مشاوره، روابط اجتماعی، علایق و ... پیدا کنید.

خب یکی از توانایی‌ها و استعدادهایی که من در دوران مدرسه در خودم پیدا کردم ریاضیه، عاشق ریاضی‌ام شاید بهتر بگم گاهی دیوونه‌شم. خب بر طبق یه قاعده‌ی روانشناسی باید دوست و همکارایی داشته باشم که اونها هم عاشق یا دیوونه‌ی یه شاخه علمی باشن (بازم می‌گم صدرصد نیست). اونا هم علاقه، استعداد و آرامشون رو تو ریاضی، فیزیک، شیمی، هنر، ادبیات و ... یافتن. باز هم می‌گم ممکنه من همین آرامش، هیجان، عشق و ... رو تو گفتن شعر یا نوشتن متنی مثل همین متن هم داشته باشم (فکر نکنین یه آدم تک بعدی هستین هیچ آدمی تک بعدی نیست).

خوشخوان انتشاراتی ویژه‌ی دانش آموزان ممتاز

آره این شعار ما در بدلو تاسیس بود؛ وقتی که کسی زیاد به ممتازها اهمیت نمی‌داد! اگر هم بود در حد چند مدرسه و چند کتاب خاص. ما او مدیم که بکیم تو همه‌ی کشور ممتاز داریم نه فقط شهرهای بزرگ. خواستیم بگیم ممتازهایی که توی روستای گرم‌سیر و سردسیر هستین ما هواتونو داریم، چون خودمون هم از همون ریشه‌ایم. خب به مرور مثل هر شغل و حرفه‌ای دوستان دیگه هم وارد زمینه‌ی توجه به دانش‌آموزان ممتاز شدن (ما با ممتازها بودیم وقتی ممتاز بودن ملد نبود).

ما می‌نوشتم تا اونی که مثل خودمون عاشق درس و مبحث خاصیه سیرآب بشه. ما تایلیف می‌کردیم تا دانش‌آموزهای خوبمون هی دنبال این کتاب اون کتاب نرن و گذشت ...

ما به هدفمون رسیدیم، شدیم ویژه بودن یه روزایی شد در دسر، روزایی که به دلیل تغییر فرهنگ و شرایط درس خوندن (گاهی بی‌ارزش شدن ادامه تحصیل و کم علاقه‌ی به علم و بی‌ارزش شدن مدارج تحصیلی)، دانشگاه رفتن ساده‌تر از گذشته شدو کم بهتر (که چه خوب) و شکر که استرس کمتر شدو ای کاش کمتر بشه و روزی بر سه که روی دوش هیچ جو ونی استرس کنکور نباشه تا راحت به پرورش استعدادهای واقعیش فکر کنه و اونها رو فدای کنکور نکنه (ولی هنوز تشنه‌ها هستن).

بگذریم، پس از ۱۷ سال می‌خواهیم بگیم که ما نه تنها علاقه‌مندان هر شاخه‌ی علمی خاص مختص به دیرستان رو رها نکردیم بلکه می‌خواهیم روش آموزشی رو ارائه بدمیم تا هر دانش‌آموزشی با هر استعدادی بتونه در زمینه‌ی خاص در حد توانش (تاکید می‌کنم در حد نظرفتش و نه بیشتر) رشد کنه تا علاوه بر ایجاد علاقه در زمینه‌ی علمی مورد نظر، بتونیم راهی رو برای رسیدن به اهداف آینده‌اش باز کنیم. شاید ریاضی برای من شیرین باشه و برای شما سخت، فیزیک برای یکی شیرین باشه و برای دیگری سخت، ولی مهم این که یاد بگیریم رشد کنیم و راه رشد کردن رو یاد بگیریم. به قول یه جمله معروف ما می‌خواهیم به جای ماهی، ماهیگیری (روش حل، تذلل بردن و فکر کردن) رو به شما یاد بدمیم تا هر کسی به اندازه‌ی توانش بتونه از دریای بزرگ جلوی روش ماهی بگیره. یکی با یه ماهی خودشو سیر می‌کنه، یکی با چند تا خانواده شو و یکی با ماهی‌های بیشتری جامعه و فرهنگشو.

امیدوارم در سالی که پیش رو دارید کلی ماهی از دریای موفقیت بگیرید، کنکور آینده‌ی کسی رو نمی‌سازه شماید که آینده رو می‌سازید.

ساختار

کتاب‌های دوازدهمی که از انتشارات به چاپ رسیده، به شکل زیرند:

درسنامه: درسنامه‌ی هر فصل به صورت جلسه‌بندی به همراه مثال‌ها و تست‌های متنوع ارائه شده، تا ضمن عمق بخشی به مطالب موجود در کتاب درسی، دانش‌آموزهای عزیز رو برای امتحان‌های مختلف از جمله امتحان نهایی آماده کنن.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای: پرسش‌ها چهار دسته دارن:

۱. سطح ساده
۲. سطح متوسط
۳. سطح دشوار
۴. ترکیب سطوح

برای این‌که کتاب، برای بیشتر دانشآموزان قابل استفاده باشد، پرسش‌ها سطح‌بندی شده‌اند تا دانشآموزان متوسط به پایین نزوماً دنبال پرسش‌های سطح سخت نرن و دانشآموزهای متوسط به بالا وقت خودشونو برای پرسش‌های ساده خیلی سپری نکن. برای این‌که مهارت دوستای عزیز رو در تشخیص سوالات ساده، متوسط و سخت بالا بیریم، پرسش‌های ترکیب سطوح رو آورديم تا هر دانشآموزی بتوانه متناسب با سطح توافقیش سوالات مربوط به سلطھشو تشخیص بد.

پرسش‌های تكميلی فصل: چون بعد از تموم شدن هر جلسه دانشآموز با ذهنیت نکات همون بخش شروع به حل کردن سوالات می‌کنه، شاید این موضوع در نهایت ایده‌آل نباشد، چون هنر شما زمانی نشون داده می‌شه که بتوانید تشخیص بدید هر سوال برای کدام مبحث، پس با اوردن سوالات ترکیبی با یه تیر دو نشون زدیم یکی بالا بردن قدرت تشخیص مبحث مرتبط با سوال و دوم مرور فصل.

سوالات کنکور مرتبط با فصل: سعی کردیم سوالات کنکور داخل و خارج سال‌های اخیر مربوط به هر فصل رو برای شما جمع کیم تا با شکل سوالات کنکور هم آشنا بشید.

پاسخ کلیدی و تشریحی پرسش‌ها: هم پاسخ‌نامه‌ی کلیدی و هم تشریحی سوالات رو بعد از اتمام فصل آورديم، حتی برای بعضی از سوالات بیشتر از یک راه حل آورديم. راستی، همه به پاسخ‌نامه‌ی تشریحی حتما سر برزن!!!!!!

آزمون‌های سه‌گانه: در آخر هر فصل سه آزمون استاندارد برای کنکوریای عزیز آورديم تا سطح یادگیری مطالب رو برای خودشون بسنجن. راستی فقط جواب کلیدی رو داخل کتاب قرار دادیم تا خدایی نکرده اگر تو سوالی مشکل داشتید سعی کنید با جستجو داخل کتاب یا مراجعه به دیرتون به اون بخش مسلط بشین. (البته سعی می‌کنیم جواباً رو داخل سایت قرار بدم تا دوستایی که احیاناً مراجعه به دیر برashون سخته دچار مشکل نشن).

آخر

با تشکر از تمام دوستانی که ما رو در تالیف و چاپ این کتاب یاری کردند و با طلب عفو و بخشن برای نواقص و کاستی‌ها از شما، برای همه‌ی شما در زندگی موفقیت و سر بلندی رو از خداوند متعال خواستارم.

رسول حاجیزاده
مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلف

خدا را شاکرم که چندین سال است توفیق خدمت به دانشآموزان ممتاز این مرز و بوم را به اینجانب عطا کرده است. تدریس در مدارس ممتاز را با عشق و علاقه‌ی وافر و وصف ناشدنی شروع کردم و از همان اوایل دوره‌ی دانشجویی که در رشته‌ی مهندسی بر قم شغول به تحصیل بودم به موازات تحصیل، تدریس پیش‌های من شده بود و پس از اتمام دوره‌ی تحصیل شرایط چنان پیش رفت که تدریس را به شغل مهندسی ترجیح دهم. الحق و الانصاف، پس از گذشت نزدیک به سه دهه از شروع تدریس، نه تنها علاقه و عشقم کم نشده است، بیشتر هم شده است و از خداوندانخ خواسته‌ام که آخرین روز عمر من را در پای تخته قرار دهد. شوق دیگر انتقال آموخته‌هایم در ریاضی، به نسل بعد در قالب تالیف کتب آموزشی است. در نوشتن این کتب همیشه سعی داشته‌ام لذتی را که از ریاضیات می‌برم در قالب تالیف و تدوین به خواننده انتقال دهم و کتاب حاضر نیز از این امر مستثنی نیست.

شغل اولم که معلمی است زندگیم را دگرگون کرد چرا که در طول این سه دهه از نظر آموزش مطالب ریاضی من معلم بچه‌ها بودم ولی در عمل به اندازه‌ی همان سه دهه از تک‌تک آن عزیزان مطلب‌ها، معرفت‌ها و مرام‌ها یاد گرفته‌ام و در واقع آن‌ها معلم من بوده‌اند. اثر دعای خیرشان همیشه در زندگی‌ام جاری بوده و ان شاء... جاری خواهد بود، ولی در مورد شغل دومم که تایف است دل نگرانم چرا که توفیق دیدار حضوری با مخاطبین گرامی می‌سیر نیست و همیشه بیم آن را دارم که نکند مطلبی نایاب‌جا نوشته شود و یا در تعمیق مبحثی کوتاهی شده باشد و مخاطب با مخاطبینی دل آزرده شده و ناخرسندي‌ای از مولف به دل بگیرد که در این صورت به جای آن که ثواب کرده باشیم، کباب کرده‌ایم! ولی از طرف دیگر چون اعتقاد دارم هر آنچه از دل برآید بر دل بشیند، دل نگرانی‌ام کاهش پیدا کرده و با شوقي بیش از پیش به نگارشم ادامه می‌دهم، و امیدوار می‌شوم که هر چه در نوشته‌هایم خلوص و پاک بودن را رعایت کنم خدا نظر نطفی کرده و این نوشته‌ها را در نظر مخاطبین زیبا جلوه می‌دهد. البته این دلیل بر آن نمی‌شود که کتاب بی‌عیب و نقص باشد ولی امید است که عیوب مینیم باشد که تقاضا می‌شود بر ما بخشیده شود.

در نوشتن این کتاب به موارد زیر توجه شده است:

* هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است و این تقسیم‌بندی با تقسیم‌بندی کتاب درسی تقاووت دارد. از نظر ما هر جلسه به مقدار مباحثی اطلاق می‌شود که در انتهای آن مباحث بتوان به تعداد کافی به دانشآموز تمرین ارائه داد و آن‌ها را تا اتمام فصل منتظر نگذاشت.

* درس‌نامه‌های هر جلسه به اندازه‌ی کافی عمق داده شده‌اند و انتظار می‌رود دانشآموزان ممتاز با مطالعه‌ی آن‌ها که توان با مثال‌های متنوع است، مشکلی در فهم درس نداشته باشند. البته بدیهی است که مقداری از این مباحث جهت عمق بخشی مطالب است و قسمتی از آن‌ها چنان است که در ارزیابی‌های آموزش و پرورش مورد سوال قرار نمی‌گیرند، لذا اگر دانش‌آموزانی در درک بعضی از مباحث ناتوان باشد می‌تواند از آن‌ها گذر کند.

* در انتهای هر جلسه تعدادی سوال چهارگزینه‌ای ارائه شده است که به غیر از فصل صفر، در مورد مابقی جلسات همان‌طور که در پیشگفتار اشاره شده است سوالات به چهار گروه دسته‌بندی شده‌اند.

* به تمام پرسش‌های مورد اشاره پاسخ تشریحی توان با آموزش‌های لازم، داده شده است.

* در طراحی پرسش‌ها به ظاهر پا را فراتر از کتاب درسی گذاشت و حاشیه رفتایم که دلایل زیر را دارد (ابتدا شماره سوالات در کادری متفاوت قرار گرفته‌اند که اگر احیاناً دانشآموزی به اطلاعات عمومی ریاضی علاقه‌مند نباشد از آن‌ها گذر کند):

۱. ارائه‌ی برخی از مطالب در درک بیتر مبحثی از کتاب کمک قابل توجهی می‌کند. به عنوان مثال برای درک اصل شمول و عدم شمول که در فصل سوم کتاب درسی ارائه شده است حل معادلاتی مانند $x+y+z \geq 6$ با شرایط $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ می‌تواند کمک خوبی داشته باشند در حالی که مؤلفین گرامی کتاب درسی در پاورقی حل معادلات سیال اشاره کرده‌اند که از بیان چنین مثال‌هایی پرهیز شود!

۲. ارائه‌ی این مطالب برای دانشآموزان ممتاز جذایت خاصی دارد که آن‌ها را پیش از پیش به ریاضیات علاقمندتر می‌کند.

۳. تجربه نشان داده است که طراحان کنکور نگاهی همانند مؤلفین کتاب درسی ندارند که سوالات را فقط در چارچوب مطالب کتب درسی طرح کنند. برای این مطلب مستندات فراوانی از سوالات کنکور در سنتوات قبل وجود دارد، به عنوان مثال در فصل تئوری اعداد در سال ۹۱ باقی مانده‌ی 10^5 بر ۱۱ خواسته شده بود که اگر کسی قضیه‌ی فرما را بله بوده خیلی سریع‌تر از بقیه جواب را انتخاب می‌کرد. در فصل گراف بارها انواع گراف‌ها خواسته شده بود که در کتاب درسی به تسع گراف‌ها بها داده نمی‌شد. در ترکیبیات نیز سوالاتی مانند حل نابرابری $5 \leq x+y+z \leq 7$ بارها در کنکور آمده است (که آخرین آن‌ها در سال ۹۷ مطرح شد) در حالی که در کتاب درسی به هیچ عنوان آموزش این مطلب موجود نبود.

در تایف و ویرایش این کتاب دوستان خوبم آقایان محمد جمال صادقی و فرشید باطنی کمک شایانی داشتند و همچنین در نمونه‌خوانی این اثر دوستان خوبم آقایان سجاد علیزاده و ارشیا شجاعی زحمات زیادی کشیدند که لازم می‌دانم کمال تشكر را داشته باشم و همچنین در آماده‌سازی و حروف چینی کتاب گروه فنی هیمه به سرپرستی دکتر اسماعیل یوسفی سنگ تمام گذاشتند که از آن عزیزان نیز قدردانی می‌شود.

در پایان از دییران و همکاران گرامی و نیز دانشآموزان عزیز تقاضا می‌شود تواصص و کمبودها را بمرأة بخشیده و اشتباهات و ایرادات احتمالی را از طریق ایمیل یا طرق دیگر به دست ما برسانند تا در چاپ‌های بعدی اصلاحات لازم صورت گیرد.

رسول حاجی‌زاده

تابستان ۱۳۹۷

فهرست مطالب

۱	استدلال‌های ریاضی	فصل صفر
۱۷	بخش‌پذیری و همنهشتی	فصل اول
۱۴۹	گراف و مدل‌سازی	فصل دوم
۲۶۵	ترکیبیات	فصل سوم

استدلال‌های ریاضی

فهرست مطالب فصل

جلسه‌ی اول: استدلال ریاضی ۲
مثال نقض ۲

استدلال استنتاجی یا اثبات مستقیم ۲

اثبات به شیوه‌ی اشباع (با در نظر گرفتن همه‌ی حالت‌ها) ۳

اثبات به شیوه‌ی برهان خلف ۴

اثبات‌های بازگشته ۴

پرسش‌های چهار گزینه‌ای درس جلسه‌ی اول ۵

پاسخ کلیدی پرسش‌های فصل ۰ ۱۰

پاسخ تشریحی پرسش‌های فصل ۰ ۱۱

سخنی با دانش آموزان عزیز و دیران گرامی

در کتاب درسی این درس نامه در سر فصل تئوری اعداد آمده است که به نظر می‌رسد مناسب نباشد چون هم عنوانش به تئوری اعداد نمی‌خورد و هم اهمیت تئوری اعداد را تحت الشاعع قرار می‌دهد. بنابراین برای رفع این دو عیب، این موضوع را جدا کرده و در قالب «فصل صفر» و پیش از ورود رسمی به ریاضیات گسته ارائه داده‌ایم. قالب و فرم این فصل با سایر فصول یکسان نیست و به حافظ کم اهمیت بودن این بحث، تمام پرسش‌های اعم از ساده، متوسط و دشوار یکجا مطرح شده (فقط تعدادی سوال که جنبه‌ی استدلال دارد و سطح‌شان از کنکور بالاتر است در انتهای پرسش‌های چهار گزینه‌ای گنجانده شده است. این سوالات معلومات عمومی‌ای از ریاضیات بوده و به بهانه‌ی استدلال در اینجا آورده شده‌اند). و سعی کرده‌ایم از این بحث که اکثر هم تکراری است، سریع گذر کنیم. در تگارش و تدوین این فصل، دوست بسیار خوبی آقای دکتر جمال صادقی کمک شایانی به اینجانب داشته‌اند. پیش‌اپیش اعتراض می‌کنیم که بعضی از سوالات ارائه شده در این فصل، برای کنکور سراسری استنداردهای لازم را ندارند و قصد بر آن بوده است تا به بهانه‌ی استدلال، دانش آموزان عزیزین با معلومات عمومی‌ای از ریاضیات آشنا شوند.

قبل از آن که انواع استدلال‌های ارائه شده را مورد بررسی قرار دهیم، یک استدلال نادرست ولی رایج را باد آوری می‌کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم حاصل ضرب هر چهار عدد متولی مضرب ۲۴ است.

ابتدایی‌ترین مطلبی که به ذهن خطرور می‌کند، آن است که صحبت مطلب را برای چند نمونه پیگردی کنیم:

- ۱, ۲, ۳, ۴: $a_1 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 = 24k$
- ۲, ۳, ۴, ۵: $a_2 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 = 24k$
- ۳, ۴, ۵, ۶: $a_3 = 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360 = 24k$
- ۴, ۵, ۶, ۷: $a_4 = 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 840 = 24k$
- ۵, ۶, ۷, ۸: $a_5 = 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 1680 = 24k$

⋮

درستی گزاره‌ی داده شده برای پنج سلسله از «چهار عدد متولی» بررسی شد ولی آیا می‌توانیم قضایت کنیم که گزاره‌ی فوق همیشه برقرار است؟ اگر چنین قضایتی کنیم آن‌گاه استدلال درستی انجام نشده است، چرا که ممکن است گزاره‌ای برای موردهای زیادی ارزش درستی داشته باشد ولی برای برخی (حتی یک مورد) از مقادیر برقرار نباشد. به گزاره‌ی دیگری به صورت زیر توجه کنید:

$n^2 + n + 41$ به ازای تمام مقادیر طبیعی برای n عددی اول است.

حاصل عبارت فوق به ازای $n = 5, 4, 3, 2, 1, \dots$ برای n به ترتیب برابر $161, 152, 147, 143, \dots$ می‌شود، که علی‌الظاهر همگی اولند ولی این برداشت و این استدلال ناصحیح است چرا که به ازای $n = 40$ برای n حاصل عبارت فوق برابر 1681 شده و عددی مرکب است، چون $1681 = 41^2 = 40^2 + 40 + 41 = 40^2 + 40 \cdot 2 + 40 \cdot 1$. بنابراین اگر گزاره‌ای برای $n = 40$ عدد از اعداد نخستین طبیعی برقرار باشد دلیلی بر درستی آن گزاره برای $n = 40$ نیست.

حال به سراغ استدلال‌هایی می‌رویم که پایه و اساس محکمی داشته و در محکمه‌ی ریاضی مورد قبول و پذیرش است.

مثال نقض

این نوع استدلال برای رد درستی یک گزاره در حالت کلی به‌کار می‌رود. در بحث قبلی برای رد درستی گزاره «عدد $n^2 + n + 41$ به ازای تمام مقادیر طبیعی برای n عددی اول است» مثال نقض $n = 40$ وجود دارد.

برای «هر عدد طبیعی دو رقمی را می‌توان به صورت مجموع چندین (بیش از یک) عدد طبیعی متولی نوشت» مثال نقض بیاورید.

حل. اعداد $10, 11, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$ را به‌طور زیر می‌توان به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متولی نوشت:

$$\begin{array}{lll} 10 = 1 + 2 + 3 + 4 & 11 = 5 + 6 & 12 = 3 + 4 + 5 \\ 13 = 8 + 7 & 14 = 2 + 3 + 4 + 5 & 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{array}$$

ولی هرچه نلاش کنید عدد 16 را به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متولی نمی‌توان نوشت، بنابراین عدد 16 برای گزاره‌ی باد شده مثال نقض محسوب می‌شود.

استدلال استنتاجی یا اثبات مستقیم

استفاده از گزاره‌های درست قبلي، اعم از گزاره‌هایی که بدیهی هستند یا درستی آن‌ها قبلاً اثبات شده است و نتیجه‌گرفتن گزاره‌ی درست جدید را اثبات مستقیم گویند.

ثابت کنید مجموع اعداد طبیعی از 1 تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

حل. می‌دانیم اتحاد $1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$ با $x + 1 + 1 + \dots + 1 = x^n$ (یعنی $x^n = 1 + 1 + \dots + 1$) همیشه برقرار است. از آن اتحاد به تعداد n بار استفاده می‌کنیم:



$$\begin{aligned}x &= 1: \quad 2^1 - 1^1 = 2(1) + 1 \\x &= 2: \quad 2^2 - 1^2 = 2(2) + 1 \\x &= 3: \quad 2^3 - 1^3 = 2(3) + 1 \\&\vdots \\x &= n: \quad (n+1)^2 - n^2 = 2(n) + 1\end{aligned}$$

حال همه‌ی عبارات فوق را با هم جمع می‌کنیم، معلوم است که در سمت چپ $2^n - 1^n$ از سطر اول با $2^n - 1^n$ از سطر دوم با $3^n - 1^n$ از سطر سوم، ... حذف شده و در سمت چپ فقط $(n+1)^2 - n^2$ از سطر آخر و $2^n - 1^n$ از سطر اول باقی می‌مانند، بنابراین:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - 1^n &= 2[1+2+3+\cdots+n] + n \\ \Rightarrow n^2 + 2n &= 2[1+2+3+\cdots+n] + n \Rightarrow 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

مثال ۳

با استفاده از اثبات مستقیم، ثابت کنید عدد $16^n - 1^n$ به ازای تمام مقادیر طبیعی برای n عددی مرکب است.

حل. از اتحاد $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \cdots + a^1b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم.

$$16^n - 1^n = (16 - 1)[\cdots] = 15k$$

همان‌طور که مشخص است عدد فوق همیشه مضرب ۱۵ است و عددی که مضرب ۱۵ باشد، مرکب بودنش واضح است.

مثال ۴

به شیوه‌ی اثبات مستقیم ثابت کنید مربع هر عدد فرد طبیعی در تقسیم بر ۸ باقی مانده‌ی ۱ دارد.

حل. می‌دانیم هر عدد طبیعی فرد به فرم $1 - 2k$ است، بنابراین:

$$? = (1 - 2k)^2 = 1^2 - 4k + 4k^2 = 4k(k - 1) + 1$$

چون حاصل ضرب هر دو عدد متوالی از جمله $k(1 - k)$ عددی زوج است، پس: $4(2q) + 1 = 8q + 1$ عددی زوج است، در بیان اینکه $k(1 - k)$ زوج است به این صورت استدلال می‌شود که با k زوج است که در این صورت $k(1 - k)$ عامل زوج دارد و با k فرد است که در این صورت $1 - k$ زوج شده و باز هم $k(1 - k)$ عامل زوج دارد. در زوج و فرد گرفتن k از استدلالی کمک گرفته شده است که در زیر بیشتر توضیح داده می‌شود:

شیوه‌ی اشباع (با در نظر گرفتن همه‌ی حالت‌ها)

گاهی اوقات برای اثبات درستی یک گزینه بهتر است تمامی حالات ممکن را به تعدادی حالت کوچک‌تر افزایش دهد و مسئله را در هر حالت کوچک‌تر اثبات کرد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۵

ثابت کنید مربع هر عددی به فرم $1 + 6k + A = 6k + 1$ در تقسیم بر ۲۴ باقی مانده‌ی ۱ دارد.

حل. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:
(الف) عددی زوج باشد، که در این صورت:

$$k = 2q \Rightarrow A = 12q + 1 \Rightarrow A^2 = 144q^2 + 24q + 1 = 24t + 1$$

(ب) عدد فردی باشد، که در این صورت:

$$\begin{aligned}k = 2q + 1 \Rightarrow A &= 12q + 7 \Rightarrow A^2 = 144q^2 + 168q + 49 \\&= 24[6q^2 + 7q + 2] + 1 = 24t + 1\end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در هر دو حالت به درستی گزاره‌ی داده شده پی می‌بریم و چون اجتماع اعداد زوج و فرد، تمام اعداد صحیح می‌شود، بنابراین اثبات برای تمامی حالات انجام شده است و حالت اشیاع رخ داده است.

مثال ۶

ثابت کنید عدد n^5 به ازای جمیع مقادیر طبیعی برای n مضرب ۵ است.

حل. عدد n به یکی از فرم‌های $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$ و یا $5k+5$ است و در ضمن عدد n^5 به صورت $(n+1)(n^4+1)$ است.

قابل تجزیه است، بنابراین پنج حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(الف) $n = 5k$ که در این صورت عامل دوم از سمت چپ مضرب ۵ بوده و اثبات تمام است.

(ب) $n = 5k+1$ که در این صورت عامل اول از سمت چپ مضرب ۵ بوده و اثبات تمام است.

(ج) $n = 5k+2$ که در این صورت عامل آخر یعنی $1 + n^4$ مضرب ۵ شده و اثبات تمام می‌شود:

$$n^4 + 1 = (5k+2)^4 + 1 = 25k^4 + 20k^3 + 4k^2 + 1 = 5(5k^4 + 4k^3 + 1) = 5q$$

(د) $n = 5k+3$ که در این صورت نیز عامل $1 + n^4$ مضرب ۵ شده و اثبات تمام می‌شود.

(ه) $n = 5k+4$ که در این صورت عامل سوم از سمت چپ مضرب ۵ بوده و اثبات تمام می‌شود.

با حالت‌بندی اثبات به درستی تمام می‌شود، چون اجتماع پنج حالت در نظر گرفته شده تمام اعداد طبیعی می‌شود.

اثباتات به شیوه‌ی برهان خلف

در این شیوه فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد و با استفاده از منطقی درست و گزاره‌های درست دیگر به تناقض می‌رسیم (این تناقض می‌تواند بر علیه یک گزاره‌ی درست دیگر با علیه فرض مساله باشد) که در این صورت تناقض ایجاد شده معلوم می‌کند برقرار نبودن حکم غلط و برقراری آن مسجیل است.

مثال ۷

با علم به این که مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست، ثابت کنید مجموع عدد گویای a و عدد گنگی مانند r عددی گنگ می‌شود.

حل. می‌خواهیم ثابت کنیم $a+r$ گنگ است. فرض می‌کنیم خلاف آن برقرار باشد یعنی $a+r$ گویا باشد، در این صورت:

$$a+r = -a - (-a) \Rightarrow a+r = -a - (-a) = -a = \text{گویا}$$

معلوم است که جمله‌ی به دست آمده تناقض است، چون r که عددی گنگ بود با یک عدد گویا برابر شده است، بنابراین گویا بودن $a+r$ غلط و گنگ بودن آن صحیح است.

اثباتات‌های بازگشتی

با توجه به این که از درستی گزاره‌ی ترکیبی $P \Leftrightarrow Q$ معلوم می‌شود که دو گزاره‌ی P و Q هم ارزشند، بنابراین بعضی از موقع ناچار می‌شوند حکم داده شده را چندین مرحله ساده کنیم و به یک عبارتی برسیم که درستی با نادرستی آن مسجیل است، به شرط آن که تمام روابط، بازگشت‌پذیر باشند معلوم می‌شود که حکم داده شده نیز ارزشی برای گزاره‌ی آخر دارد.

مثال ۸

برای هر سه عدد حقیقی a , b و c ثابت کنید نابرابری $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ همیشه برقرار است.

$$[a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc] \Leftrightarrow [a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow [2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow [a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow [(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 + c^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow [(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0]$$

درستی گزاره‌ی آخر به خاطر نامنفی بودن مربع عبارات واضح است و چون تمام نتیجه‌گیری‌ها دو طرفه هستند، بنابراین گزاره‌ی اولیه نیز ارزش درستی دارد.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس جلسه‌ی اول



پرسش‌های ترکیب سطوح درس جلسه‌ی اول

۱ کدام یک از گزاره‌های زیر مثال نقض دارد؟

(۱) هر مرتع یک لوزی است.

(۲) هر عدد اول و بزرگتر از ۲، فرد است.
۳) هر مثال متساوی الاضلاع، متساوی الساقین است.

۴) کدام دو عدد کلیت حکم «مجموع مربعات هر دو عدد، عددی اول است» را نقض می‌کنند؟

۱) ۱ و ۲

۲) ۳ و ۵

۳) ۲ و ۴

۴) ۱ و ۱

۵) برای گزاره‌ی «عدد $1 - 3^n$ به ازای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ برای n مرکب است» کدام عدد مثال نقض است؟

۶) مثال نقض ندارد
(۱) ۷
(۲) ۸
(۳) ۱۰
(۴) ۴

۷) کدام یک از اعداد زیر برای گزاره‌ی «اگر مجموع ارقام عددی به ۱۱ بخش‌پذیر باشد آنگاه خود آن عدد نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر است» مثال نقض است؟

۸) ۹۹
(۱) ۵۶۶۵
(۲) ۵۶۶۵
(۳) ۵۶۶۵
(۴) ۵۷۶۱

۹) در استدلال یک قضیه فرض کردایم که حکم برقرار است و پس از یک دسته اعمال مجاز به یک رابطه‌ی بدیهی و یا فرض قضیه رسیده‌ایم. برای تکمیل اثبات لازم است کدام مورد برقرار باشد؟

(۱) اثبات قضیه کامل است و نیاز به فرض دیگری نیست.

(۲) مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر باشند.

(۳) یک مثال نقض که در شرایط مسئله صدق و از آن حکم قضیه نتیجه شود مورد نیاز است.

(۴) یک مثال نقض ارائه شود.

۱۰) در اثبات یک مسئله به شیوه‌ی برهان خلف:

(۱) ثابت می‌کنند خلاف حکم نادرست است.

(۲) ثابت می‌کنند فرض نادرست است.

(۳) ثابت می‌کنند حکم نادرست است.

۱۱) کدام یک از اعداد زیر کلیت حکم «عددی که در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ی ۱ بیاورد مربع کامل است» را رد می‌کند؟

۱۲) ۸۹
(۱) ۱۲۰
(۲) ۲۶
(۳) ۲۵
(۴) ۱

۱۳) کدام یک از گزاره‌های زیر مثال نقض ندارد؟

(۱) به ازای تمام اعداد حقیقی برای a, b, c و $a > bc$ و $a > ac$ آنگاه $b > a$.

(۲) اگر p اول باشد آنگاه $p + n$ تواند اول باشد.

(۳) برای هر عدد حقیقی نامنفی برای x نابرابری $x^3 \leq x$ برقرار است.

(۴) برای هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۱ برای x ، نابرابری $x < \frac{1}{x}$ برقرار است.

۱۴) برای اثبات درستی گزاره‌ی «مربع هیچ عدد طبیعی‌ای به‌فرم $5k + 2$ نیست» به شیوه‌ی اشباع، برای n چند حالت مختلف در نظر گرفته می‌شود؟

۱۵) ۵
(۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۲
(۴) ۱

۱۰ چه تعداد از گزاره‌های زیر، ارزش درستی دارند؟

— مجموع مکعبات سه عدد متولی، مضرب ۹ است.

— مجموع معکوس‌های شش عدد طبیعی فرد، می‌تواند ۱ باشد. — اگر عددی فرد باشد، مکعب آن نیز فرد است.

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

۱۱ کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی (بیش از یک عدد) متولی نوشت» را نقض می‌کند؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

۱۲ اثبات کدام قضیه‌ی زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد^۱

۱) عدد $\sqrt{5}$ گنگ است.

۲) از یک نقطه بیرون یک خط فقط یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.

۳) در یک صفحه از نقطه‌ی مفروض فقط یک خط می‌توان بر خط مفروض عمود کرد.

۴) مربع هر عدد طبیعی فرد، از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.

۱۳

برای کدام یک از گزاره‌های زیر مثال نقض وجود دارد؟

۱) مجموع دو عددگنگ، گنگ است.

۲) حاصل ضرب عددی گویای غیر صفر در گنگ، گنگ است.

۱۴ در اثبات نابرابری $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ به ازای a و b از مشتبه شیوه‌ی بازگشته، رابطه‌ی بدیهی که در پایان حاصل می‌شود کدام است؟

۱) $|a - b| \geq 1$

۲) $a + b \geq 0$

۳) $(a - b)^2 \geq 0$

۴) $(a + b)^2 \geq 0$

۱۵ با فرض این که n^2 مضرب ۶ است می‌خواهیم ثابت کنیم n نیز مضرب ۶ است. در این صورت کدام روش مناسب‌تر است؟

۱) مثال نقض ۲) برهان خلف ۳) روش اشباع ۴) استدلال بازگشته

۱۶

برای اثبات درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر برهان خلف مناسب‌تر است؟

— مجموع دو عدد گویا، عددی گویاست.

— حاصل ضرب دو عدد زوج، مضرب ۴ است.

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

۱۷ چه تعداد از گزاره‌های زیر ارزش درستی دارند؟

— اعداد گنگ و گویای وجود دارد که در هم ضرب شده و حاصل گویا شود.

— اعداد گنگی مانند a و b موجودند که قرینه‌ی هم نبوده و مجموعشان گویا شود.

— مجموع یک عدد گنگ و یک عدد گویا همیشه گنگ می‌شود.

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) صفر

۱۸ درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان، با مثال نقض رد کرد.

$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ برای هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

— حاصل ضرب هر سه عدد طبیعی متولی مضرب ۶ است. — مربع هر عدد فرد، فرد است.

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

۱) این پرسش، سؤال کنکور سال ۸۶ بوده و ابهاماتی نظر این که گزاره‌ی اشاره شده در گرینه‌ی ۲، اصل است و قضیه نیست، به این خاطر عوض نشده است که سؤال عیناً ذکر شده باشد.





۱۹ اگر α و β هر دو گنگ بوده ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، آنگاه چه تعداد از اعداد $\beta - \alpha$, $\alpha + 2\beta$, $2\alpha + 2\beta$ و $3\alpha + 2\beta$ حتماً گنگ هستند؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

درستی کدام یک از گزاره‌های زیر را با مثال نقض نمی‌توان رد کرد؟

۱) اعداد طبیعی x و y وجود دارد که $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

۲) حاصل ضرب پنج عدد متوالی، بر 120° بخشیده است.

۳) اگر برای سه مجموعه A , B و C تساوی $A \cup B = A \cup C$ برقرار باشد، آنگاه $B = C$ است.

۴) مجموع ۶ عدد متوالی ضرب ۶ است.

چه تعداد از ترکیب‌های شرطی زیر درست هستند؟ ($a, b \in \mathbb{R}$)

- $a = b \Leftrightarrow a^r = b^r$
- $a = b \Leftrightarrow a^r = b^r$
- $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$
- $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) عدد گنگی وجود دارد که به توان گنگ رسیده و گویا شود.

۲) عدد گویایی وجود دارد که در عدد گویایی ضرب و حاصل گنگ شود.

۳) عدد گنگی وجود ندارد که به توان گویای رسیده و گویا شود.

۴) عدد گویایی وجود ندارد که در عدد گنگ ضرب شده و حاصل گویا شود.

درستی کدام یک از گزاره‌های زیر را می‌توان با استفاده از مثال نقض رد کرد؟

۱) هر چهار ضلعی ای که قطرهایش هم دیگر را نصف کنند متوازی الاضلاع است.

۲) مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ی ۱ دارد.

۳) هر عدد اول فردی به یکی از دو صورت $1 - 2^n$ یا $1 + 2^n$ است. ($n \in \mathbb{N}$)

۴) مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ی ۱ دارد.

کدام عدد کلیت حکم «عدد $2 + p^{p+1}$ به ازای تمام مقادیر اول p عددی مرکب است» را نقض می‌کند؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

برای کدام یک از احکام زیر نمی‌توان مثال نقض آورد:

۱) برای هر عدد حقیقی x تابعی $x^2 \leq x$ برقرار است.

۲) اگر $y \geq x$ آنگاه $1 + \frac{y}{x} \leq 2$.

۳) اگر n عدد صحیح زوج باشد آنگاه $1 + n^2$ بزرگ‌تر از ۵ است.

۴) برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$, تابعی $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{n}$ برقرار است.

اثبات درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر به شیوه‌ی برهان خلف مناسب‌تر است.

— اگر x عدد گنگ باشد آنگاه $\frac{1}{x}$ هم گنگ است.

— میانگین پنج عدد طبیعی متوالی عدد وسطی است.

— اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $1 + 4k$ مربع کامل است.

— حاصل ضرب عددی به فرم $4k + 6$ در عدد دیگری به فرم $5 + 6k'$ به صورت $2 + 6k''$ می‌شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



۲۷

در چه تعداد از حالات زیر دو گزاره‌ی P و Q هم ارزند:

- | | | |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $x : P$
برابر ۱ است
$x^2 : Q$
برابر ۱ است | $n : P$
مضرب ۴ است
$n^2 : Q$
مضرب ۸ است | $n : P$
زوج است
$n^2 : Q$
زوج است |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------|

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

۲۸

درستی کدام یک از گزاره‌های زیر را با مثال نقض می‌توان رد کرد؟

(۱) مجموع ۱۳۹۸ عدد طبیعی متولی بر ۱۳۹۸ بخش‌پذیر است.

(۲) مجموع هر ۱۳۹۷ عدد فرد، عددی فرد است.

(۳) اگر حاصل ضرب چهار عدد طبیعی متولی k باشد، آنگاه $1 + k + k^2 + k^3$ مربع کامل است.

(۴) حاصل ضرب سه عدد زوج متولی، بر ۴۸ بخش‌پذیر است.

درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر را نمی‌توان با مثال نقض رد کرد؟

— حاصل ضرب چهار عدد طبیعی متولی بزرگ‌تر از ۱، بر ۱۲۰ بخش‌پذیر است.

— برای هر عدد اول p ، عدد $1 - 2^p$ اول است.

— اگر حاصل ضرب چهار عدد صحیح، فرد باشد، آنگاه مجموع مربعات آن‌ها زوج است.

— مجموع سه عدد زوج متولی، بر ۶ بخش‌پذیر است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۰ (۱)

۳۰

درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان با مثال نقض رد کرد؟

— مجموع سه عدد طبیعی متولی بر ۳ بخش‌پذیر است.

— برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $1 - 2^n$ اول است.

— اگر a گنج باشد، آنگاه $7 + 3a + a^2$ نیز گنج است.

— میانگین شش عدد طبیعی متولی، برابر میانگین دو عدد وسط است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۰ (۱)

۳۱

درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان با مثال نقض رد کرد؟

— عبارت $1 + 8k^2$ به ازای هیچ مقدار طبیعی k بزرگ‌تر از ۱ مربع کامل نیست.

— اگر حاصل ضرب ۶ عدد حقیقی برابر ۰ شود، آنگاه حداقل یکی از آن شش عدد، صفر است.

— اگر a_1, a_2, a_3 و b_1, b_2, b_3 همان اعداد ولی با ترتیبی دیگر باشند، آنگاه حاصل $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج است.

— اختلاف مربعات دو عدد فرد، بر ۸ بخش‌پذیر است.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

۳۲

اگر گزاره‌ی $\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{x}{2(3n+2)}$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n برقرار باشد، آنگاه x کدام است؟

۱ (۲)

$2n - 1$ (۴)

۰ (۱)

$2n - 2$ (۳)

۳۳

برای ... گزاره‌ی « $41 + n + n^2$ برای همه اعداد طبیعی n که مضرب ۴۱ نیستند، عددی اول است» از ... می‌توان استفاده کرد.

(۱) رد - برهان خلف

(۲) اثبات - در نظر گرفتن همهی حالات

(۳) اثبات - در نظر گرفتن همهی حالات





درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر را نمی‌توان با برهان خلف اثبات کرد؟ ۳۴

- اگر تابع f در $x = a$ پیوسته و لی تابع g در a نپیوسته باشد، آنگاه $f + g$ در $x = a$ نپیوسته است.

- حاصل ضرب دو عدد گنگ متمایز عددی گنگ است.

- حاصل جمع دو عدد گنگ که قرینه‌ی هم نیستند، گنگ است.

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

چند زوج مرتب مانند (a, b) از اعداد حقیقی و نااصر وجود دارد به طوری که تساوی $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ برقرار باشد؟ ۳۵

۱) شمار

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

برای اثبات این‌که از بین اعداد $n+1$, $n+2$ و $n+3$ یکی بر ۳ بخشیده است، از کدام رابطه‌ی هم‌ارزی استفاده می‌کنیم؟ ۳۶

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \quad ۱)$$

$$(p \vee q \vee r) \Rightarrow s \equiv (p \Rightarrow s) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge (r \Rightarrow s) \quad ۲)$$

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \quad ۳)$$

$$(p \vee q \vee r) \Rightarrow s \equiv (p \Rightarrow s) \vee (q \Rightarrow s) \vee (r \Rightarrow s) \quad ۴)$$

اگر $y^3 + x^2 + y^3 + 1 = xy + x + y^3$ کدام است؟ ۳۷

۱) عددی گنگ

۲) ۳

۳) ۲

برای اثبات درستی گزاره‌ی «اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آنگاه $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ » در آخرین مرحله به چه تعداد از گزاره‌های زیر می‌توانیم بررسیم؟ ۳۸

$$\bullet \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 + \frac{3a^2}{4} \geq 0. \quad \bullet (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0. \quad \bullet (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0.$$

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

برای اثبات درستی گزاره‌ی «اگر $a > 0$ آنگاه $\frac{1}{a} \geq 2$ در آخرین مرحله به کدام گزاره می‌رسیم؟ ۳۹

$$a^2 + 1 \geq 0. \quad (a - 1)^2 \geq 0. \quad a^2 \geq 0. \quad (a + 1)^2 \geq 0. \quad ۱)$$

فرض کنید می‌خواهیم با در نظر گرفتن همه‌ی حالات اثبات کنیم که عدد $2n^2 - 5n + 6$ عددی فرد است. اگر $n = 2k - 1$ باشد، آنگاه باید نشان دهیم کدامیک از عبارات زیر عددی فرد است؟ ۴۰

$$4k^2 - 9k + 3 \quad 4k^2 - 12k + 9 \quad 4k^2 - 14k + 13 \quad 4k^2 - 10k + 7 \quad ۱)$$

فرض کنید a عددی گویا و b عددی گنگ باشد به طوری که ab عددی گویا باشد. حاصل $a^3 + ab^2 + a^3$ کدام است؟ ۴۱

۱) ۲

۲) ۱

۳) به طور یکتا به دست نمی‌آید. ۴) چنین چیزی امکان ندارد

در مورد حاصل $k^3 - k$ چه تعداد از موارد زیر هم‌واره ارزش درستی دارند؟ ۴۲

- اگر k فرد باشد آنگاه آن عبارت مضرب ۱۲ بوده ولی ممکن است مضرب ۲۴ نباشد.

- اگر k زوج بوده و بزرگ‌تر از ۲ باشد، آنگاه آن عبارت مضرب ۱۲ است.

- اگر k مضرب ۴ باشد آنگاه آن عبارت مضرب ۱۲ است.

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

چه تعداد از زوج مرتب‌هایی مانند (a, b) از اعداد صحیح با شرایط $10 \leq a, b \leq 10$ وجود دارد به طوری که تساوی $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ برقرار باشد؟ ۴۳

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

به ازای چند مقدار طبیعی n در بازدی $[1401, 1497]$ مجموع n عدد طبیعی متولی حتماً مضرب n می‌شود؟ ۴۴

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱



۴۵) گزاره‌ی «عدد $1 + 2^n$ به ازای همه‌ی عددهای طبیعی برای n , عددی اول است» در مجموعه اعداد طبیعی از ۱ تا ۵ چند مثال نقض دارد؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

* پرسش‌های خیلی دشوار! درس جلسه‌ی اول

۴۶) چند عدد طبیعی مانند n در بازه‌ی $[1397, 2018]$ وجود دارد که $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی زوج شود؟

۱) ۲۱۲

۲) ۳۱۱

۳) ۳۱۰

۴) ۳۰۹

۴۷) اگر $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ و $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, آنگاه چند مجموعه برای A وجود دارد که مثال نقض گزاره‌ی «اگر برای سه مجموعه‌ی A , B و C تساوی $A \cup C = A \cup B$ برقرار باشد آنگاه تساوی $B = C$ نیز برقرار است» باشد؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

۴۸) چند سه‌تایی مرتب (a, b, c) از اعداد صحیح و ناصل فر $5 \leq a, b, c \leq 5$ – وجود دارد که تساوی $a + b + c = a \cdot b \cdot c$ برقرار باشد؟

۱) ۳۳۰

۲) ۳۰۰

۳) ۲۷۰

۴) ۲۴۰

۴۹) فرض کنید $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ اعدادی صحیح بوده و b_1, b_2, \dots, b_n هم همان اعداد بوده ولی با ترتیبی دیگر, به ازای چند مقدار طبیعی در بازه‌ی $[1397, 1400]$ حاصل $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdots (a_n - b_n) = 0$ حتماً زوج است؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

۵۰) چند عدد صحیح n در بازه‌ی $[1365, 1397]$ وجود دارد که تساوی زیر برقرار باشد:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0, \quad a_i \in \{-1, 1\}$$

۱) ۳۳

۲) ۱۷

۳) ۱۶

۴) ۸

پاسخ کلیدی پرسش‌های فصل *



- ۱) ۱ ۲ ۳ ۴
۲) ۱ ۲ ۳ ۴
۳) ۱ ۲ ۳ ۴
۴) ۱ ۲ ۳ ۴
۵) ۱ ۲ ۳ ۴
۶) ۱ ۲ ۳ ۴
۷) ۱ ۲ ۳ ۴
۸) ۱ ۲ ۳ ۴
۹) ۱ ۲ ۳ ۴
۱۰) ۱ ۲ ۳ ۴

- ۱۱) ۱ ۲ ۳ ۴
۱۲) ۱ ۲ ۳ ۴
۱۳) ۱ ۲ ۳ ۴
۱۴) ۱ ۲ ۳ ۴
۱۵) ۱ ۲ ۳ ۴
۱۶) ۱ ۲ ۳ ۴
۱۷) ۱ ۲ ۳ ۴
۱۸) ۱ ۲ ۳ ۴
۱۹) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۰) ۱ ۲ ۳ ۴

- ۲۱) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۲) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۳) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۴) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۵) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۶) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۷) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۸) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۹) ۱ ۲ ۳ ۴
۳۰) ۱ ۲ ۳ ۴

- ۲۱) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۲) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۳) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۴) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۵) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۶) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۷) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۸) ۱ ۲ ۳ ۴
۲۹) ۱ ۲ ۳ ۴
۳۰) ۱ ۲ ۳ ۴

- ۴۱) ۱ ۲ ۳ ۴
۴۲) ۱ ۲ ۳ ۴
۴۳) ۱ ۲ ۳ ۴
۴۴) ۱ ۲ ۳ ۴
۴۵) ۱ ۲ ۳ ۴
۴۶) ۱ ۲ ۳ ۴
۴۷) ۱ ۲ ۳ ۴
۴۸) ۱ ۲ ۳ ۴
۴۹) ۱ ۲ ۳ ۴
۵۰) ۱ ۲ ۳ ۴

*) این سوالات در سطح سوالات کنکور نیستند, فقط قصد برآن است که با تعدادی استدلال آشنا شوید.





اگر $n = 5k + 1$ آن‌گاه

$$n = 25k^3 + 10k + 1$$

اگر $n = 5k + 2$ آن‌گاه

$$n = 25k^3 + 20k + 4 = 5k' + 4$$

اگر $n = 5k + 3$ آن‌گاه

$$n = 25k^3 + 20k + 9 = 5k' + 9$$

اگر $n = 5k + 4$ آن‌گاه

$$n = 25k^3 + 20k + 16 = 5k' + 16$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود مربع یک عدد صحیح هرگز به فرم $5k + 2$ یا $5k + 3$ نمی‌شود.

۱۰

فقط گزاره‌ی سوم ارزش نادرستی دارد. آنرا با برهان خلف ثابت می‌کنیم. آن ۶ عدد را a, b, c, d, e, f در نظر بگیرید:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$$

$$bcdef + acdef + abdef + abcef + abcdf + abcde \\ = abcdef$$

۶ عبارت نوشته شده درست چپ تساوی فوقی، فرد بوده و درنتیجه حاصل جمع آن‌ها زوج است در حالی که سمت راست تساوی عددی فرد است.

اثبات درستی سه گزاره دیگر به صورت زیر است.

$$?_1 = k^3 + (k+1)^3 = 2k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

$$= 2k^3 + 3k(k+1) + 1 \\ \text{زوج}$$

فرد + زوج

$$?_2 = k^3 + (k+1)^3 + (k-1)^3 \\ = k^3 + k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + k^3 - 3k^3 + 3k - 1 \\ = 3k^3 + 6k = 3k(k^2 + 2)$$

اگر k مضرب ۳ باشد، آن‌گاه حاصل مضرب ۹ می‌شود و اگر k در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ی ۱ یا ۲ داشته باشد، آن‌گاه $k^2 + 2$ مضرب ۳ شده و باز حاصل آن عبارت، مضرب ۹ خواهد شد. (شیوه‌ی اخیر در نظر گرفتن تمام حالات است).

$$?_4 = (2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = \text{فرد}$$

۱

توان دوم و سوم عدد ۱ با هم مساوی بوده و مثال نقضی برای درستی گزینه‌ی ۴ است.

۲

$$5^3 + 3^3 = 25 + 9 = 34 \neq 36$$

۳

3^n همیشه زوج بوده و اگر $2 \leq n$ آن‌گاه مخالف ۲ بوده و مرکب است.

۴

مجموع ارقام ۵۶ بر ۱۱ بخش‌بندی است ولی ۵۶ بر ۱۱ بخش‌بندی نیست.

۵

ممکن است مراحله‌ای برگشت پذیر نباشد، مثلاً از گزاره‌ی « $x = 2$ » گزاره‌ی « $x = 4$ » نتیجه می‌شود ولی عکس آن درست نیست. بنابراین برای تکمیل اثبات لازم است ثابت شود که تمام مراحل برگشت پذیرند.

۶

در اثبات یک مسئله به شیوه‌ی برهان خلف، فرض می‌کنیم حکم درست باشد، سپس با استفاده از آن و با بهره‌گیری از یک سری منطق و استدلال درست، به خلاف فرض یا خلاف یک جمله‌ی بدیهی و یا خلاف یک گزاره‌ی اثبات شده قابلی می‌رسیم که در این صورت معلوم می‌شود این تناقض از جایی ناشی شده است که «**خلاف حکم را درست در نظر گرفته‌ایم**» و معلوم می‌شود خلاف حکم نادرست و خود حکم درست است.

۷

عدد $8k + 1$ به فرم $8k + 1$ است ولی مربع کامل نیست.
بر روی این موضوع خیلی مسلط شوید که:

— مربع هر عدد فردی در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ی ۱ دارد ولی عکس آن درست نیست یعنی اگر عددی در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ی ۱ داشته باشد دلیلی ندارد که مربع کامل باشد.

۸

برای گزاره‌ی ۱ مثال نقض $a = 2, b = 4$ و $c = -1$ وجود دارد.

برای گزاره‌ی ۲ مثال نقض $p = 2$ وجود دارد.

برای گزاره‌ی ۳ مثال نقض $\frac{1}{x} = 2$ وجود دارد.

۹

کافی است n را $5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$ و $5k + 5$ در نظر گرفته و مسئله را حل کنید.

$$n^3 = 5k^3 + 15k^2 + 25k + 5 = 5k' + 5$$

۱۱

فقط اعداد به فرم $\frac{a}{b}$ را نمی‌توان به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متواالی نوشت، ولی بقیه اعداد را به اشکال زیر می‌توان نوشت:

$$40 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$$46 = 10 + 11 + 12 + 13$$

$$56 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$

این سؤال استاندارد نیست، فقط قصد آن است که به عنوان اطلاعات عمومی در نظر داشته باشید که فقط اعداد به فرم $\frac{a}{b}$ را نمی‌توان به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متواالی نوشت (اثبات این موضوع در المپیاد ریاضی سال ۱۳۶۶ مطرح شده بود).

۱۲

اثبات گزاره موجود در گزینه ۴ بدون برهان خلف و به صورت مستقیم انجام پذیر است.

برای اثبات گنگ بودن $\sqrt{5}$ به شیوه برهان خلف به موارد زیر توجه کنید:
 — عدد گویا عددی است که بتوان آن را به صورت $\frac{a}{b} (b \neq 0)$ که در این صورت a و b اعداد صحیحی هستند نوشت در غیر این صورت آن عدد را گنک گویند. بنابراین هر عدد حقیقی یا گویاست یا گنگ.

— دو عدد n و n^k در تجزیه به حاصل ضرب عوامل اول پایه‌های یکسانی دارند بنابراین اگر عددی مانند n را به توان طبیعی k برسانید پایه‌های اول آن تغییر نکرده و فقط توان هر یک از پایه‌های آن k برابر می‌شود.
 — **اثبات:** اگر $\sqrt{5}$ گویا باشد آنگاه به صورت $\frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{Z})$ است a و b را آنقدر ساده می‌کنیم تا به کسر $\frac{a'}{b'}$ برسیم که در آن صورت a' و b' نسبت به هم اول باشند، پس:

$$\sqrt{5} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow a' = \sqrt{5}b' \Rightarrow a'^2 = 5b'^2 = 5k$$

چون مربع a' مضرب ۵ است پس خود a' نیز مضرب ۵ می‌شود:

$$a' = 5q \Rightarrow (5q)^2 = 5b'^2 \Rightarrow 25q^2 = 5b'^2 \Rightarrow 5q^2 = b'^2$$

چون مربع b' مضرب ۵ است پس خود b' نیز مضرب ۵ خواهد بود و اینکه هم a' و هم b' مضرب ۵ شده‌اند با نسبت به هم اول بودنشان در تضاد است و این به آن معناست که گویا بودن $\sqrt{5}$ غلط و گنگ بودن آن درست است.

۱۳

۱. مجموع دو عدد گنگ $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ برابر صفر است.

درستی سایر گزاره‌ها را اثبات می‌کنیم:

$$r + r' = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{q}{k}$$

۱۴

لازم به ذکر است که حاصل ضرب هر دو عدد صحیحی صحیح است.

و نیز حاصل جمع هر دو عدد صحیحی عدد صحیح است.

$$r \cdot r' = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{q}{k}$$

$$3. \text{ گویا } = \frac{q}{k}$$

$$4. \text{ گنگ } = \frac{a}{b}, \quad \alpha = \beta \quad (r = \text{ گویا }, \quad \alpha = \frac{c}{d})$$

با برهان خلف ثابت می‌کنیم. اگر β گویا باشد آنگاه آن را $\frac{c}{d}$ در نظر گرفته و خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} \cdot \alpha = \frac{c}{d} \Rightarrow \alpha = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{bc}{ad} = \frac{q}{k} = \text{ گویا}$$

چون عدد گنگ α با عدد گویای $\frac{q}{k}$ برابر شده است و این تناقض است یعنی گویا بودن β غلط و گنگ بودن آن درست است.

۱۴

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

۱۵

اگر n مضرب ۶ نباشد آنگاه حداقل یکی از دو عامل ۲ یا ۳ را ندارد، بنابراین n^2 نیز حداقل یکی از دو عامل ۲ یا ۳ را نداشته و در نتیجه مضرب ۶ نخواهد بود.

۱۶

همه‌ی گزاره‌ها به راحتی به شیوه‌ی مستقیم قابل اثبات هستند.

۱۷

هر سه گزاره ارزش درستی دارد. برای درستی گزاره‌ی اول، مثال $\alpha = \sqrt{2}$ و $\beta = \sqrt{2}$ وجود دارد. برای درستی گزاره‌ی دوم مثال $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ و $\beta = 3 - \sqrt{2}$ وجود دارد. گزاره‌ی سوم نیز یا شیوه‌ی برهان خلف به راحتی اثبات شدنی است.

۱۸

فقط گزاره‌ی دوم مثال نقض دارد و به صورت $x = 4$ و $y = 9$.

۱۹

هر سه گنگ هستند و همگی به راحتی با برهان خلف ثابت می‌شوند که به نایندگی آخری را اثبات می‌کنیم:

فرض می‌کنیم $3\alpha + 2\beta$ گویا باشد، چون $3\alpha + 3\beta$ نیز گویاست، پس تناقض آنها یعنی β نیز گویا می‌شود که تناقض است.

۲۰

گزاره‌ای را باید انتخاب کنیم که همیشه درست بوده و مثال نقضی نداشته باشد.

گزاره‌ی ۱ همیشه نادرست است.

گزاره‌ی ۲ همیشه درست است و به عنوان اطلاعات عمومی، بدانید که حاصل ضرب هر m عدد طبیعی متواالی مضرب $m!$ است (اثبات آنرا لازم نیست بدانید).



(صورت هر کسر (به غیر از اولی) با مخرج کسر قبل خودش ساده شده است)

۲۶

فقط اثبات گزاره‌ی اول به شیوه‌ی برهان خلف مناسب‌تر است.

اثبات گزاره‌ی سوم به صورت مستقیم:

$$\begin{aligned} k &= n(n+1) \\ \Rightarrow 4k+1 &= 4n(n+1)+1 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= (2n+1)^2 \end{aligned}$$

مربع کامل

اثبات گزاره‌ی چهارم به صورت مستقیم:

$$\begin{aligned} ? &= (6k+4)(6k'+5) \\ &= 36kk' + 30k + 24k' + 20 \\ &= 36kk' + 30k + 24k' + 18 + 2 \\ &= 6k'' + 2 \end{aligned}$$

۲۷

فقط در حالت آخر دو گزاره هم ارز نیستند چون ممکن است x^2 برابر ۱ باشد ولی x برابر ۱ نباشد.

۲۸

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۳۹۸ برابر

$$\frac{1398 \times 1399}{2} = 699 \times 1399$$

است که مضرب ۱۳۹۸ نیست. در واقع اگر n فرد باشد، مجموع n عدد متولی بر n بخش‌پذیر است. ولی اگر n زوج باشد، مجموع n عدد متولی بر n بخش‌پذیر نیست.

— حاصل جمع فرد تا عدد فرد، عددی فرد می‌شود.

— اگر چهار عدد طبیعی را $-1, n, -n$ و $n+2$ در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} k+1 &= (n-1)(n(n+1)(n+2)+1) \\ &= n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 1 = (n^2 + n - 1)^2 \end{aligned}$$

— در بین هر سه عدد زوج متولی، حتماً یکی مضرب ۳ است. در بین هر سه عدد زوج متولی، حداقل یکی مضرب ۴ است. بنابراین حاصل ضرب هر سه عدد زوج متولی مضرب $3 \times 2^3 \times 2^1 = 72$ یعنی ۴۸ است.

۲۹

برای گزاره‌ی اول مثال نقض $9 \times 8 \times 7 \times 6$ وجود دارد که مضرب ۱۲۰ نیست.

گزاره‌ی ۳ مثال نقض دارد، به عنوان مثال:

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{2, 3\}, \quad C = \{3\}$$

گزاره‌ی ۴ مثال نقض دارد، به عنوان مثال:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \neq 6k$$

۲۱

برای گزاره‌ی دوم و سوم از سمت چپ به ترتیب مثال نقض $a = 2, b = -3$ و « $a = 2, b = -2$ » وجود دارد.

۲۲

می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است (از طریق برهان خلف اثبات می‌شود). اگر $\sqrt{2}$ گویا شود مثال مورد نظر همین است و اما اگر $\sqrt{2}$ گنگ باشد، مثال مورد نظر به صورت $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ (می‌شود که حاصل آن $(\sqrt{2})^2$ یعنی ۲ است).

عدم درستی گزینه‌ی ۲. عدد اول را $\frac{p}{q}$ و عدد دوم را $\frac{p'}{q'}$ در نظر می‌گیریم که حاصل ضرب آن دو عدد $\frac{pp'}{qq'}$ شده و عددی گویا می‌شود و هرگز نمی‌تواند گنگ باشد.

عدم درستی گزینه‌ی ۳. مثال نقض مورد نظر $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ است که در آن $\sqrt{2}$ گنگ و ۲ گویا است.

عدم درستی گزینه‌ی ۴. عدد گویای مورد نظر برای مثال نقض را برابر $\sqrt{2}$ در نظر بگیرید.

۲۳

عدد ۲۳ اول است ولی نه به صورت $1 - 2^n$ است و نه به صورت $1 + 2^n$.

اثبات گزینه‌ی ۲ به حالت درنظر گرفتن تمام حالات:

I. اگر عدد اول به فرم $1 + 3k$ باشد آنگاه مربع آن به فرم $9k^2 + 6k + 1$ شده و به صورت $1 + 3q + 3q + 1$ قابل نگارش است.

II. اگر عدد اول به فرم $2 + 3k$ باشد آنگاه مربع آن به فرم $9k^2 + 12k + 4$ یا به فرم $1 + 3q + 3q + 1$ باز به فرم $1 + 3q + 3q + 1$ قابل نگارش است.

۲۴

عدد $2^m + 3^n$ عدد مرکبی نیست.

۲۵

برای گزینه‌ی ۱ مثال نقض $\frac{1}{x} = y$ وجود دارد.

برای گزینه‌ی ۲ مثال نقض $-2 = y$ وجود دارد.

برای گزینه‌ی ۳ مثال نقض $4 = n$ وجود دارد.

گزینه‌ی ۴ به صورت زیر اثبات می‌شود:

$$\text{سمت راست} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$



$\frac{1}{\lambda} = \frac{x}{16}$ در می‌آید یعنی $2 = x$ که در این صورت نیز گزینه‌های ۲ و ۴ رد می‌شوند.

برای گزاره‌ی دوم مثال نقطی $11 = p$ وجود دارد، چون $1 - 2^{11} = 2^{20} - 2^7$ بخش پذیر است.

اگر حاصل ضرب چهار عدد صحیح، عددی فرد باشد، آنگاه هر چهار عدد فرد، عددی زوج می‌شود.

اگر سه عدد زوج متوالی را $2 - 2k, 2k + 2$ در نظر بگیریم، مجموع عشان $6k$ شده و مضرب ۶ بودن آن همیشگی است.

عبارت $41 = n^2 + n + 40$ به ازای $n = 40 + 1 + 40 + 41 + 40 + 40^2$ به صورت $40^2 + 40 + 41 + 40 + 1 + 40 + 1$ در می‌آید که مرکب بوده و اول نیست، یعنی گزاره‌ی داده شده ارزش نادرستی دارد و با مثال نقط مشخص می‌شود.

۳۳ ۴ ۳ ✓ ۱

گزاره‌های دوم و سوم ارزش نادرستی دارند.

۳۴ ۴ ۳ ✓ ۱

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b} \\ \Rightarrow (a+b)^2 &= ab \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0 \\ \Rightarrow a^2 + b^2 + (a+b)^2 &= 0. \end{aligned}$$

معادله‌ی بدست آمده در مجموعه اعداد حقیقی غیر صفر، جوابی ندارد.

۳۵ ۴ ۳ ✓ ۲

به عنوان مثال فرض کنید بخواهیم ثابت کنیم که عدد $n^3 - n$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n ، مضرب ۳ است. با در نظر گرفتن تمام حالات می‌خواهیم ثابت کنیم «اگر $n = 3k + 1$ با $n = 3k + 2$ با $n = 3k + 3$ با $n^3 - n$ مضرب ۳ است». ولی یاد گرفتید به جای اثبات آن گزاره، به شیوه‌ی زیر عمل کنید:

اگر $n = 3k + 1$ با $n^3 - n$ مضرب ۳ است و اگر $n = 3k + 2$ با $n^3 - n$ مضرب ۳ است و بالاخره اگر $n = 3k + 3$ با $n^3 - n$ مضرب ۳ است.

استدلال‌های فوق هم ارز یکدیگرند که در گزینه‌ی ۲ بیان شده است.

۳۶ ۴ ۳ ✓ ۱

$$x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2 = 2xy + 2x + 2y$$

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow x = y = 1$$

۳۷ ۴ ۳ ✓ ۲

هر سه گزاره به راحتی قابل حصولند. زیرا ساده شده‌ی هر سه، همان عبارت اولیه می‌شود و همه‌ی نتیجه‌گیری‌ها نیز برگشت پذیرند.

۳۸ ۴ ۳ ✓ ۱

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Rightarrow (a-1)^2 \geq 0.$$

۳۹ ۴ ۳ ✓ ۱

$$n = 2k - 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow n^2 - 5n + 7 &= (2k-1)^2 - 5(2k-1) + 7 \\ &= 4k^2 - 14k + 13 \end{aligned}$$

اگر آن اعداد را $1 - k, k + 1$ در نظر بگیریم، آنگاه مجموع آن‌ها $2k$ شده، و مضرب ۳ بودن آن همیشگی است.

گزاره‌ی داده شده به ازای $n = 4$ برقرار نیست.

اگر عبارت داده شده را به صورت $\frac{19}{4} + \frac{3}{2}(a + \frac{3}{2})$ در نظر بگیریم، آنگاه حاصل آن عبارت به ازای $a = \sqrt{2} - \frac{3}{2}$ که عددی گنگ است، گویا می‌شود.

اگر اعداد را $2 - 1, k, k + 1, k - 1$ در نظر بگیرید، به درستی گزاره‌ی داده شده پی خواهد برد.

۴ ۳ ✓ ۱

عبارت داده شده به ازای $k = 6$ برابر 289 می‌شود که مربع 17 است.

✓

با برهان خلف به راحتی ثابت می‌کنیم:

اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ فرد باشد آنگاه حاصل هر سه عبارت $(a_1 - b_1), (a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ فرد خواهد شد:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 - b_1 = \text{فرد} \\ a_2 - b_2 = \text{فرد} \\ a_3 - b_3 = \text{فرد} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) =$$

$$\text{فرد} \Rightarrow 0 =$$

تساوی به دست آمده تناقض است، بنابراین فرد بودن عبارت داده شده، غلط و زوج بودن آن صحیح است. لازم به ذکر است که در تساوی‌های فوق از این دو مطلب استفاده شده است که اولاً مجموع سه عدد فرد عددی فرد می‌شود و ثانیاً $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ با $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ برابر است.

چون مربع هر عدد فردی به فرم $1 + 8k$ است، بنابراین $? = a - b = (1 + 8k) - (1 + 8k') = 8q$

۴ ۳ ✓ ۲

اگر $1 = n$ آنگاه تساوی به صورت $\frac{1}{10} = \frac{x}{10}$ در می‌آید، یعنی $x = 1$ که در این صورت گزینه‌ی ۳ رد می‌شود. اگر $2 = n$ آنگاه تساوی به صورت





$$n = 4k + 2 \Rightarrow ? = \frac{(4k+2)(4k+3)}{4}$$

فرد = $(2k+1)^2(4k+3)^2$

$$n = 4k + 3 \Rightarrow ? = \frac{(4k+3)(4k+4)}{4}$$

زوج = $4(4k+3)^2(k+1)^2$

لازم به یادآوری است که $3 \cdot 4k + 1 - 4q$ همان ۱ است و دو نمایش از یک عدد هستند.

✓ 3 2 1

برای آنگاه تساوی $A \cup C = A \cup B$ برقرار باشد، باید A هر یک از اعضاء ۱، ۵، ۶ و ۷ را داشته باشد، ولی در مورد سه عضو دیگر هر یک را می‌تواند داشته باشد و یا نه.

✓ 3 2 1

47

$$\frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) = 0$$

باید حداقل دو عدد از بین سه عدد a و b و c قرینه باشند:

دقیقاً دو جفت قرینه باشند + دقیقاً یک جفت قرینه باشند = ?

$$= \binom{3}{2} \times 10 \times 1 \times 8 + \binom{3}{1} \times 10 \times 1$$

$$= 240 + 30 = 270$$

✓ 3 2 1

48

با برهان خالق ثابت می‌شود که حاصل عبارت داده شده به ازای n های فرد حتماً زوج است:

اگر حاصل فرد باشد، آنگاه تمام پرانترها باید فرد باشند:

$$a_1 - b_1 = \text{فرد}, a_2 - b_2 = \text{فرد}, \dots, a_n - b_n = \text{فرد}$$

$$\Rightarrow \sum (a_i - b_i) = 0 \Rightarrow \text{مجموع } n \text{ عدد فرد} = 0$$

که تساوی بدست آمده تناقض است.

اگر n زوج باشد، می‌توان نصف اعداد را فرد و نصف دیگر را زوج در نظر گرفته و در هر پرانتر یکی از مؤلفه‌ها را فرد و دیگری را زوج بنویسید تا تمام پرانترها فرد باشند.

✓ 3 2 1

50

حاصل $a_i a_j$ یا ۱ است با -1 ، بنابراین برای آنکه حاصل داده شده برابر صفر شود، لازم است نصف $a_i a_j$ ها برابر ۱ و نصف دیگر -1 شود و آن موقعی میسر می‌شود که n زوج باشد (حوالستان باشد که زوج بودن n شرط لازم است نه شرط کافی!). از طرف دیگر، چون حاصل ضرب تمام عبارات موجود در سمت چپ تساوی برابر $(a_1)^2 \dots (a_n)^2$ است، بنابراین آن حاصل برابر ۱ می‌شود، به این معنا که در بین $a_i a_j$ ها باید تعداد زوجی (-1) باشد. چون تعداد $a_i a_j$ هایی که -1 بودند $\frac{n}{2}$ بود، بنابراین لازم است $\frac{n}{2}$ زوج باشد و آن موقعی میسر می‌شود که n مضرب ۴ باشد. در بین اعداد ۱۳۶۵ تا ۱۳۹۷ به تعداد ۸ عدد مضرب ۴ وجود دارد.

✓ 3 2 1

41

اگر a گویا، b گنگ و ab گویا باشد، آنگاه a حتماً صفر است، پس:

$$? = ab^3 + a^3 + 3 = 0 + 0 + 3 = 3$$

✓ 3 2 1

42

عبارت داده شده به صورت $(k-1)k(k+1)$ است که حاصل ضرب سه عدد متوالی است که در این صورت به ازای k فرد، آن عبارت حتماً مضرب ۲۴ است، زیرا $1-k+1$ و $k+1$ دو عدد زوج متوالی می‌شوند که در بین دو عدد زوج متوالی حتماً یکی مضرب ۴ است. پس عبارت داده شده حداقل سه تا عامل ۲ و یک عامل ۳ را داشته و مضرب ۲۴ می‌شود.

اگر k زوج باشد، برای عددی مانند $6 = k$ حاصل آن عبارت مضرب ۱۲ نمی‌شود. و بالاخره، اگر k مضرب ۴ باشد، از آنجایی که از سه عدد متوالی حتماً یکی مضرب ۳ است، آن عبارت حتماً مضرب ۱۲ می‌شود.

✓ 3 2 1

43

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 2ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ و } b = 0.$$

اگر $a = 0$ آنگاه b تعداد ۲۱ مقدار به خود می‌پذیرد و اگر $b = 0$ آنگاه a تعداد ۲۱ مقدار به خود می‌پذیرد که حالت $(0, 0)$ در هر دو شمارش شده است.

✓ 3 2 1

44

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = n \times \frac{n+1}{2}$$

بنابراین اگر $\frac{n+1}{2}$ صحیح باشد آنگاه حاصل به دست آمده، مضرب n خواهد بود. $\frac{n+1}{2}$ وقتی صحیح است که n عددی فرد باشد.

✓ 3 2 1

45

به ازای $n = 5$ عدد $1 + 2 + 3 + \dots + n$ به دست می‌آید که در فصل همنهشتی می‌توانید ثابت کنید این عدد برابر 64 بخش پذیر است.

این سؤال نیز استاندارد نبوده و برای افزایش اطلاعات عمومی داده شده است و آن این که $1 + 2 + 3 + \dots + 2^{2n}$ عددی اول نیست. (اگر $2^{2n} + 1$ ها عددی اول هستند و اولین 2^n که در توان 2 قرار گیرد و حاصل مرکب شود است، یعنی $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{2n}$ همگی اول هستند).

✓ 3 2 1

46

حاصل عبارات داده شده وقتی زوج است که n به صورت $4k$ یا $4k-1$ باشد که 3^{10} تا از اعداد داده شده این خاصیت را دارند.

$$zوج = \frac{16k^2(4k+1)^2}{4} = 4k^2(4k+1)^2$$

$$n = 4k+1 \Rightarrow ? = \frac{(4k+1)^2(4k+2)^2}{4}$$

$$= (4k+1)^2(2k+1)^2$$



فصل ۱

بخش پذیری و همنهشتی

فهرست مطالب فصل

جلسه‌ی اول: بخش پذیری در اعداد صحیح ۱۹

خواص بخش پذیری و عاد کردن ۲۱ پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس جلسه‌ی اول ۲۲

جلسه‌ی دوم: کار برد هایی از بخش پذیری ۲۹

کار برد بخش پذیری در اتحادها ۲۹ مفاهیم ب.م.م و ک.م.م از روی بخش پذیری ۳۱

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس جلسه‌ی دوم ۳۷

جلسه‌ی سوم: تقسیم ۴۲

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس جلسه‌ی سوم ۴۴

جلسه‌ی چهارم: کار برد هایی از تقسیم ۴۹

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس جلسه‌ی چهارم ۵۳

جلسه‌ی پنجم: همنهشتی و ویژگی‌های اولیه‌ی آن ۵۶

همنهشتی ۵۶ خواص همنهشتی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس جلسه‌ی پنجم ۶۴

جلسه‌ی ششم: دسته‌های همنهشتی و حل معادلات سیال به فرم c ۷۰ $ax + by = c$

دسته‌های همنهشتی ۷۰ حل معادله سیال به صورت

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس جلسه‌ی ششم ۷۳

جلسه‌ی هفتم: قضایای فرمایه، اویلر، ویلسون و رقم یکان اعداد توان دار ۷۷

قضایی اویلر ۷۸ قضایی ویلسون

رقم یکان اعداد توان دار ۷۹ پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس جلسه‌ی هفتم ۸۱

جلسه‌ی هشتم: نمایش اعداد صحیح و بخش پذیری اعداد بر $2, 3, 4, \dots$ ۸۴

بخش پذیری اعداد بر $2, 3, 4, \dots$ ۸۴ پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس جلسه‌ی هشتم ۸۷

سوالات کنکور مرتبط با فصل ۱ ۹۰ پرسش‌های تکمیلی فصل ۱ ۹۴

پاسخ تشرییحی پرسش‌های فصل ۱ ۱۰۲ پاسخ کلیدی پرسش‌های فصل ۱ ۱۰۵

آزمون‌های سه‌گانه‌ی فصل ۱ ۱۴۴ پاسخ کلیدی آزمون‌های سه‌گانه‌ی فصل ۱ ۱۴۸

سخنی با دانش آموز

بهطور حتم از لحظه‌ای که شمارش را در دوران طفولیت یاد گرفتید آشناییتان با تئوری اعداد شکل گرفته است و در نتیجه قسمتی از مطلب این بخش برایتان آشنا بوده و تکراری است. در واقع در این بخش مطالبی از نظریه‌ی اعداد که از دوران ابتدایی به بعد خواهد اید جمع‌بندی شده و بعضاً به همان زبان قبل و بعضاً به زبان جدید مانند همنشته برایتان معرفی خواهد شد.

در طبود فصل تمام پارامترهایی مانند $a, m, l, m, k, d, c, b, \dots$ که استفاده شده باشند عددی صحیح بوده و در اغلب اوقات صحیح بودن آن ذکر نمی‌شود ولی شما باید بنا بر همین گذاشته و مساله را پیش بپرسید. البته در بعضی اوقات آن اعداد خاص‌تر بوده و طبیعی هستند که در آن صورت حتماً ذکر می‌شود.

سخنی با دبیر

همان طور که اطلاع دارید بحث نظریه‌ی اعداد از قدیم تا به حال در کتب درسی جاخوش کرده و با تغییر نظام‌های آموزشی، هرگز این بحث از کتب درسی حذف نشده است، از طرف دیگر دائم‌های این بحث بسیار وسیع بوده و نمی‌توان به درستی نقطه‌ی شروع و پایان این بحث را برای داشت آموزان نشانه‌گذاری کرد. بنابراین بسیار مشاهده شده است که در کنکور سراسری سوالاتی از این بحث مطرح شده است که آن را به هیچ عنوان به موضوع و یا صفحه‌ی خاصی از کتاب درسی نمی‌توان ارجاع داد. به عنوان مثال در نظام قبلی بحث «تعمیم» بسیار ساده و روان در حد دو صفحه در کتاب درسی مطالابی بیان شده بود در حالی که از همان بحث سوالات بسیار پیچیده‌ای در کنکور سراسری مطرح می‌شد و نیز در همان کتاب بدون تدریس «مبنا» در یکی از تصریف‌های کتاب تبدیل عددی از مبنای 10 به غیر 10 مطرح می‌شود و همین امر سبب می‌شود سوالات بسیار پیچیده‌ای در کنکور مطرح شود و یا این که تعداد صفرهای موجود در انتهاي $!n$ چقدر است، در هیچ کجا کتاب درسی وجود نداشته است در حالی که در کنکور سراسری سال ۱۳۹۰ تعداد صفرهای انتهاي عدد $!75$ خواسته شده بود. لذا اینجا بی کند با تکیه بر تجربه این نقطه‌ی شروع و پایان را معلم و یا مولفی بر عهده بگیرد. این کار را ما در سال ۱۳۸۴ انجام دادیم و با نگارش و قالیف کتاب «ریاضیات گستره و علوم پایه مرتبه با آن» (که تا سال ۱۳۹۶ بالغ بر ۵۰ بار تجدید چاپ شد) مطالب جامع و کامل در آن حوزه مخصوصاً تئوری اعداد، ارائه شد. در سال‌های اولیه و نیز آخریه! فروش کتاب به کندی پیش می‌رفت، اولی به حاضر آن که خیلی از همکاران محترم با دین مباحثی که به ظاهر در کتاب درسی نبوده‌اند (همانند بحث تعداد صفرهای موجود در انتهاي $!n$) که برای اولین بار در کتاب ما بیان شد و پس از آن که در کنکور آزاد یا سراسری سوالی به میان آمد همکاران دیگر این بحث را نیز به کتابشان افزودند، علیه کتاب گارد مخالف گرفتند و پس از دو سالهای با مطرح شدن خیلی از مباحث موجود در کتاب کمک آموزشی ما در کنکور، خوشبختانه این گارد منفی برداشته شده و تبدیل به تبلیغ و خوشگویی از کتاب شد. اما دلیل کندی فروش در سال‌های اخیر هم باز همکاران گرامی بودند، خیلی از آن‌ها با اتفاقی که به پنده داشتند ابراز می‌کردند که چرا علی‌رغم گذشت بیش از یک دهه از تالیف کتاب آن را بازنویسی نمی‌کنید؟ جوابی که برای این عزیزان داشتم تا به صورت مستند و سوال به سوال از سال ۱۳۸۴ تا آن تاریخ را برایشان تشریح کردم و موجود بودن تکنک آن‌ها (عینتاً و یا با تشابه‌های بالای $\%$) در کتاب را یادآور می‌شم. آن پیروگواران قانون شده و از تبلیغ منفی دست می‌کشیدند ولی چون تعداد همکارانی که در این مورد با ما ارتباط برقرار کرده و تبادل نظر می‌کردند بسیار کم بود، طبیعتاً عددی زیادی از آنان با همان تکنک که کتاب از سال ۱۳۸۴ تا به حال بازنویسی شده است متأسفانه گاردنی گرفته و کتاب را برای داشت آموزشان توصیه نمی‌کردند. البته لازم به ذکر است که آخرین این سوالات که عینتاً در کنکور ذکر شده سال ۱۳۹۶ بود (در لحظه‌ی نوشتن این متن به تاریخ $9/7/3/8$ هنوز کنکور 97 برگزار نشده است) که به شرح ذیل است:

خوشخوان (مثال ۹ صفحه‌ی ۹۰): اگر $1 + 2n + 5 = 2n + 1 + 6n + 1 + 9n + 25 = 14n^2$.

سوال کنکور سراسری خارج ۹۶: اگر عدد طبیعی به صورت $1 + 2n + 5$ بخش پذیر باشد، باقی مانده عدد طبیعی به صورت $1 + 9n + 25$ بود، عدد کدام است؟

در مورد تشابه فوق یکی از نظرات زیر وجود دارد:

۱. اعداد انتخابی طراح محترم به صورت اتفاقی با اعداد ما مطابقت پیدا کرده است!

۲. کتاب خوشخوان برخلاف نظر عده‌ای از همکاران گرامی هنوز معتبر بوده و مورد توجه است!

۳. مولف خوشخوان و طراح کنکور هر دو از یک مرجع سوال انتخاب کردند که اگر چنین باشد نیز واقع‌بینی مولف را نشان می‌دهد.

...

در همنشته به قضایای فرم، اویلر و ولیسون اشاره شده است خواهشمند است به این موضوع توجه کنید که هدف ارائه‌ی مطلب خارج از کتاب نیست بلکه با این قضایا بعضی از سوالات همنشته به صورت میان‌بر حل می‌شوند.



جلسه‌ی اول: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

۱

عدد صحیح a را بر عدد صحیح b بخش‌پذیر گویند هرگاه عدد صحیحی مانند q چنان یافت شود که $q \times b = a$. بخش‌پذیری a بر b را به صورت $b|a$ نمایش داده و آن را به یکی از صورت‌های زیر می‌خوانند.

عدد b عدد a را می‌شمارد. ●

عدد a مضربی از عدد b است. ●

قرارداد. چون بی‌شمار عدد صحیح مانند q یافت می‌شود که در تساوی $q \times = 0$ صدق کند با براین می‌پذیریم که عدد صفر خودش را عاد می‌کند یعنی 0 . این قرارداد با تعریف بخش‌پذیری سازگار است.

اگر عدد صحیح b مقسوم‌علیه‌ی از عدد صحیح a نباشد آن را به صورت a/b نمایش می‌دهند.

مجموعه مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد 90 را بنویسید.

حل. مجموعه مقسوم‌علیه‌های مثبت 90 به شکل زیر هستند که الگوریتم نوشتار آن در ادامه $\{1, 3, 5, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$ توضیح داده شده است:

همان‌طور که مشاهده می‌کنید مقسوم‌علیه‌های مثبت هر عددی از جمله 90 دو به دو جفت هم شده و حاصل ضربشان 90 می‌شود. بنابراین با تشخیص مقسوم‌علیه‌های کوچک‌یک عدد، مقسوم‌علیه‌های بزرگ‌آن خود به خود به دست می‌آید.

می‌دانیم $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$ پنایر این اگر عدد n مانند تساوی $b \cdot a = n$ په صورت حاصل‌شروع دو عدد طبیعی مثبت a و b نوشته شود آن‌گاه یکی از آن دو عدد از \sqrt{n} بیشتر و دیگری از \sqrt{n} کمتر است. در مثال قبل چون $\sqrt{90} \approx 9.5$ پنایر در هر چهارت مورد اشاره‌ای یکی از اعداد $9/5$ بیشتر و دیگری از $9/5$ کمتر است. یعنی پرای پیدا کردن مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد n اگر مقسوم‌علیه‌های کوچک‌تریا متساوی \sqrt{n} باقی شود مقسوم‌علیه‌های پنایر قدر از \sqrt{n} زیر پر احتی پیدا خواهد شد.

اگر n مربع کامل باشد آن‌گاه چون یکی از مقسوم‌علیه‌ها \sqrt{n} می‌شود که چهارت ندارد آن‌گاه تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن عددی فرد، و در غیره این صورت تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن روج خواهد بود.

نکته ۱

چند عدد طبیعی مانند k یافت می‌شود که $k|96$ و $k|180$.

حل. به سبک اشاره شده در مثال ۱، D_{96} و D_{180} را بنویسیم:

$$D_{96} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96\}$$

$$D_{180} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180\}$$

$$\Rightarrow ? = D_{96} \cap D_{180} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

لازم به ذکر است که بعد از بیان بحث ب.م.م و ک.م.م برای حل چنین سؤالاتی راه حل راحت‌تری بیان خواهد شد.

نکته ۲

تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت کدامیک از اعداد زیر برابر 15 است؟

۷۰۰ (۱)

۴۰۰ (۳)

۶۰۰ (۲)

۸۰۰ (۱)

۴ ۲ ۱

در این سؤال هدف تأکید بر نکته ۲ است که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت اعداد مربع کامل، فرد است. در بین گزینه‌ها فقط 400 مربع کامل است.

تست ۱

چند عدد طبیعی مانند k وجود دارد که $|108| \geq k \geq |24|$

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

 ۱ ۲ ۳ ۴

$$D_{108} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108\}$$

$$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$? = |D_{108} \cap D_{24}| = |D_{108} - D_{24}| = |D_{108}| - |D_{108} \cap D_{24}|$$

$$= 12 - |\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}| = 12 - 6 = 6$$

تعداد ارقام عدد حاصل ضرب تمام مقسوم علیه های مثبت عدد 108 به کدام نزدیکتر است؟

۴۲ (۴)

۲۴ (۳)

۳۲ (۲)

۱۶ (۱)

 ۱ ۲ ۳ ۴

تاکید این سؤال به این است که در مثال ۱ حاصل ضرب هر دو عدد موجود در یک جفت همان 90 می شود. بنابراین در آن سؤال چون تعداد مقسوم علیه های مثبت برابر 12 یعنی 6 جفت به دست آمد بنابراین حاصل ضرب تمام مقسوم علیه های مثبت 90 برابر 90 به دست می آید و به نکته زیر می رسیم:

اگر تعداد مقسوم علیه های مثبت عدد n پر اپر n باشد آن گاه حاصل ضرب تمام مقسوم علیه های مثبت عدد n پر اپر \sqrt{n}^k یا \sqrt{n}^k مُواهد شد (نگران این موضوع کن: یعنی تعداد مقسوم علیه های مثبت n فرد پاشد، نه اشید چون در این صورت n مربيع کامل شده و \sqrt{n} عددی طبیعی است).

مجموعه مقسوم علیه های 108 به شکل زیر است:

$$D_{108} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 48, 56, 63, 72, 84, 112, 126, 144, 168, 252, 336, 504, 108\}$$

همان طور که مشخص است عدد 108 دارای 30 مقسوم علیه مثبت است، بنابراین طبق نکته ۳ حاصل ضرب تمام آن مقسوم علیه ها برابر 108^{15} است که اگر 108 را تقریباً 100 در نظر بگیریم عدد حاصل 10^{45} خواهد شد که عددی 46 رقمی است.

اگر عدد n به صورت $n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdots P_k^{\alpha_k}$ په محاصل ضرب عوامل اول چنین شده باشد آن گاه تعداد مقسوم علیه های مثبت آن پر اپر

($\alpha_1 + 1$).($\alpha_2 + 1$). \cdots .($\alpha_k + 1$)).

با توجه به نکته فوق در تست قبل تعداد مقسوم علیه های عدد 108 با توجه به تجزیه ای آن که به صورت $2^4 \times 3^2 \times 7^1$ است برابر $(1+1).(1+2).(1+4)$ یعنی 30 به دست می آید و نیازی به نوشتن تمام مقسوم علیه های آن نیست.

با توجه به نکته ۴ درستی نکته ۲ را بار دیگر درک خواهید کرد به این صورت که اگر تعداد مقسوم علیه های مثبت n عددی فرد باشد آن گاه تمام $(\alpha_i + 1)$ ها فرد شده و در نتیجه همه α_i ها زوج خواهند شد و زوج بودن تمام توان ها در تجزیه ای عدد به حاصل ضرب عوامل اول به آن معناست که آن عدد مربيع کامل است.



مثال ۳

مجموع تمام مقسوم علیه های مثبت عدد $7^3 \times 3^4$ را بیابید.

حل. با توجه به نکته ۴ معلوم می شود که عدد داده شده به تعداد 4×5 یعنی ۲۰ مقسوم علیه مثبت دارد که به شکل زیرند:

$$\begin{array}{cccccc} 3^0 \times 7^0 & 3^1 \times 7^0 & 3^2 \times 7^0 & 3^3 \times 7^0 & 3^4 \times 7^0 \\ 3^0 \times 7^1 & 3^1 \times 7^1 & 3^2 \times 7^1 & 3^3 \times 7^1 & 3^4 \times 7^1 \\ 3^0 \times 7^2 & 3^1 \times 7^2 & 3^2 \times 7^2 & 3^3 \times 7^2 & 3^4 \times 7^2 \\ 3^0 \times 7^3 & 3^1 \times 7^3 & 3^2 \times 7^3 & 3^3 \times 7^3 & 3^4 \times 7^3 \end{array}$$

مجموع اعداد ستون اول برابر $\frac{7^4 - 1}{7 - 1} = 3^1, 3^2, \dots$ و ستون پنجم برابر $\frac{7^4 - 1}{7 - 1} = 3^0$ و مجموع کل آنها برابر $(\frac{7^4 - 1}{7 - 1}) (\frac{7^4 - 1}{7 - 1})$ می شود.

نکته ۵

اگر عدد n به صورت $n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdots P_k^{\alpha_k}$ باشد آن‌گاه مجموع تمام مقسوم علیه های مثبت n برابر $\left(\frac{P_1^{\alpha_1+1} - 1}{P_1 - 1}\right) \cdot \left(\frac{P_2^{\alpha_2+1} - 1}{P_2 - 1}\right) \cdots \left(\frac{P_k^{\alpha_k+1} - 1}{P_k - 1}\right)$ خواهد شد.

تست ۴

مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی سه رقمی مانند n که در رابطه $3 - 7|11n$ صدق کند کدام است؟

۲۴ (۴)

۲۳ (۳)

۲۲ (۲)

۲۱ (۱)

۴ ۳ ۲ ۱ ✓

برای حل نرمال و دلپسند امثال این سوال‌ها یک راه حل در قسمت تقسیم و یک راه حل در قسمت همنهشتی ارائه خواهد شد ولی در این قسمت قصد بر آن است که با سعی و خطای پیش رفته و اعداد را از ۹۹۹، به پایین امتحان کنید تا به اولین پاسخ دست پیدا کنید. اولین عدد مورد نظر ۹۹۳ پیدا می شود که مجموع ارقامش ۲۱ است.

خواص بخش‌پذیری و عاد کردن

اگر a, b, c, d و m, k اعداد صحیح و n عددی طبیعی باشند آن‌گاه:

یعنی هر عدد صحیحی حداقل ۴ تا مقسوم علیه دارد، ۱ - خود عدد، قرینهٔ عدد. تنها اعدادی که از این امر مستثنی هستند ۱ و ۱ - است که هر کدام فقط دو مقسوم علیه ۱ و ۱ - را دارند. این‌که هر عددی خودش را عاد می‌کند خاصیت بازنایی عاد کردن می‌گویند.

یعنی $^\circ$ بر همهٔ اعداد صحیح (از جملهٔ خودش) بخش‌پذیر است.

یعنی تنها عددی که بر صفر بخش‌پذیر است خود صفر است.

• $a|b \wedge b|a \Rightarrow |a| = |b|$

• $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$ (خاصیت تعدی)

• $a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$

• $a|b \Leftrightarrow a^n|b^n$

• $a|b \wedge b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$

• $a|b \Rightarrow a|kb, k.a|k.b$

• $k.a|k.b \wedge k \neq 0 \Rightarrow a|b$

• $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|m.b + k.c$



ویژگی آخر را به این صورت بیان می‌کنند که اگر a هر دو عدد b و c را عاد کند هر ترکیب خطی صحیح b و c را نیز عاد خواهد کرد.
ازین ویژگی‌های فوق درستی ویژگی آخر را اثبات می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = a \cdot q \Rightarrow m \cdot b = a \cdot mq \\ a|c \Rightarrow c = a \cdot q' \Rightarrow k \cdot c = a \cdot kq' \end{array} \right\} \Rightarrow mb + kc = a \cdot (mq + kq') \Rightarrow mb + kc = a \cdot q'' \Rightarrow a|mb + kc$$

اثبات هر یک از سایر ویژگی‌ها به سادگی انجام پذیر است فقط اثبات $a|b^n$ از روی $a|b$ کمی دشوار است که کتاب درسی انتظاری برای بلد بودن آن ندارد.

تست ۵

اگر $k \equiv 24 \pmod{96}$ و $k \equiv 18 \pmod{180}$ آنگاه برای k چند مقدار صحیح یافت می‌شود؟

۱۸ (۴) ۱۶ (۳) ۱۵ (۲) ۱۲ (۱)

۴ ✓ ۲ ۱

$24|k \Rightarrow k = 24q \Rightarrow 24q \equiv 96 \pmod{96} \Rightarrow q \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 40\}$

تست ۶

مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار طبیعی ممکن برای k که در رابطه $7k - 3 \equiv 180 \pmod{180}$ صدق کند کدام است؟

۱۲ (۴) ۱۰ (۳) ۹ (۲) ۸ (۱)

۴ ۲ ✓ ۱

۳ - $7k$ را مساوی تک تک مقسوم‌علیه‌های 180 (از بزرگ به کوچک) قرار می‌دهیم تا برای k مقدار طبیعی یافت شود:

$$7k - 3 = 180 \Rightarrow 7k = 183 \Rightarrow k \notin \mathbb{Z}$$

$$7k - 3 = 90 \Rightarrow 7k = 93 \Rightarrow k \notin \mathbb{Z}$$

$$7k - 3 = 60 \Rightarrow 7k = 63 \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$$

مثال ۴ بزرگ‌ترین عدد طبیعی k را چنان بیابید که در رابطه $11k - 7 \equiv 32k + 5 \pmod{11}$ صدق کند.

حل. به راه حل زیر خوب توجه کنید، اساس کار ویژگی آخر از عاد کردن است. علاوه بر رابطه داده شده در صورت سؤال از رابطه بدهی بیاید نیز استفاده می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 11k - 7 \equiv 32k + 5 \\ 11k - 7 \equiv 11k - 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times 11 \\ \times (-32) \end{array} \Rightarrow 11k - 7 \equiv 279$$

بنابراین $7 - 11k$ باید یکی از مقسوم‌علیه‌های 279 باشد که همانند تست ۶ عمل می‌کنیم:

$$11k - 7 = 279 \Rightarrow 11k = 286 \Rightarrow k = 26$$

همان‌طور که دیده می‌شود $7 - 11 \times 26 = 279$ یعنی 279 مقسوم‌علیه‌ی از $5 + 32 \times 26 = 837$ است.

مثال ۵ اگر برای اعداد طبیعی x و y هر دو رابطه $x|y$ و $y|4x - 3y$ برقرار باشند آنگاه حاصل $\frac{x}{y}$ را بیابید.

$$y|x \Rightarrow x = k \cdot y$$

$$4x - 3y \mid 4x - 3y \Rightarrow 4ky \mid 4ky - 3y \Rightarrow 4k + 2 \mid 4k - 3$$



از طرف دیگر می‌دانیم $2|3k + 2$ ، بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} 3k + 2 | 3k + 2 \\ 3k + 2 | 4k - 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times(+4) \\ \times(-2) \end{array} \Rightarrow 3k + 2 | 17 \Rightarrow \begin{cases} 3k + 2 = 17 \Rightarrow k = 5 \\ 3k + 2 = 1 \Rightarrow k \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین فقط جواب $k = 5$ قابل قبول است.

اگر a و b اعداد صحیح باشند آن‌گاه ارزش درستی گزاره‌های شرطی زیر را بررسی کنید.

I) $a|b \Rightarrow a^r|b^r$

II) $a^r|b^r \Rightarrow a|b$

III) $a^v|b^{vv} \Rightarrow a^{rv}|b^{vv}$

IV) $a^{rv}|b^{vv} \Rightarrow a^v|b^{vv}$

مثال ۶

حل. اثبات درستی گزاره‌ی I:

مثال نقض برای گزاره‌ی II:

مثال نقض برای گزاره‌ی III:

اثبات درستی گزاره‌ی IV:

$$a|b \stackrel{\text{I}}{\Rightarrow} a^r|b^r \stackrel{\text{X} b^r}{\Rightarrow} a^r|b^r \times b \Rightarrow a^r|b^r$$

$$a = 8 = 2^3, b = 4 = 2^2 : (2^3)^r | (2^2)^r \wedge 2^r | 2^r$$

$$a = 2^{11}, b = 2^7 : (2^{11})^r | (2^7)^{11} \wedge (2^{11})^r | (2^7)^{11}$$

$$a^{rv}|b^{vv} \stackrel{\text{IV}}{\Rightarrow} a^{rv}|b^{vv} \stackrel{\text{X} b^v}{\Rightarrow} a^{rv}|b^{vv} \stackrel{\text{V} v}{\Rightarrow} a^v|b^{vv}$$

با استفاده از مثال قویل گذشت می‌شود که اگر $a^m|b^n$ نتیجه شود آن‌گاه $a|b$ بروابه است و پدیده عکس.

تمرینات

مثال ۷

در هر یک از موارد زیر تمام مقادیر صحیح n را چنان باید که حاصل عبارت داده شده عددی صحیح باشد:

$$\text{I)} \frac{3n+2}{3n+2} \quad \text{II)} \frac{3n+2}{n+5} \quad \text{III)} \frac{2n^2+3n-1}{n-2} \quad \text{IV)} \frac{7n-1}{3n+2}$$

حل. $2 + 3n$ را برابر با یک‌ایک مقسوم‌علیه‌های ۳۵ قرار داده و در هر مورد مقدار n صحیح را در صورت وجود پیدا می‌کنیم:

I) $3n + 2 = 35 \Rightarrow n = 11 \checkmark \quad 3n + 2 = -35 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z}$

$3n + 2 = 7 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z} \quad 3n + 2 = -7 \Rightarrow n = -3 \checkmark$

$3n + 2 = 5 \Rightarrow n = 1 \checkmark \quad 3n + 2 = -5 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z}$

$3n + 2 = 1 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z} \quad 3n + 2 = -1 \Rightarrow n = -1 \checkmark$

II) $\left. \begin{array}{l} n+5|3n+2 \\ n+5|n+5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times(-1) \\ \times 3 \end{array} \Rightarrow n+5|13$

$n+5 = 13 \Rightarrow n = 8 \checkmark \quad n+5 = -13 \Rightarrow n = -18 \checkmark$

$n+5 = 1 \Rightarrow n = -4 \checkmark \quad n+5 = -1 \Rightarrow n = -6 \checkmark$

III) $\left. \begin{array}{l} n-2|2n^2+2n-1 \\ n-2|n-2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times 1 \\ \times(-2n) \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n-2|7n-1 \\ n-2|n-2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times 1 \\ \times(-7) \end{array} \Rightarrow n-2|13$

$n-2 = 13 \Rightarrow n = 15 \checkmark \quad n-2 = -13 \Rightarrow n = -11 \checkmark$

$n-2 = 1 \Rightarrow n = 3 \checkmark \quad n-2 = -1 \Rightarrow n = 1 \checkmark$

IV) $\left. \begin{array}{l} 3n+2|7n-1 \\ 3n+2|3n+2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times(-2) \\ \times 4 \end{array} \Rightarrow 3n+2|17$

$3n+2 = 17 \Rightarrow n = 5 \checkmark \quad 3n+2 = -17 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z}$

$3n+2 = 1 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z} \quad 3n+2 = -1 \Rightarrow n = -1 \checkmark$





پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس جلسه‌ی اول



پرسش‌های سطح ساده درس جلسه‌ی اول

۱ اگر $a - b | a$ آنگاه:

$$a - b | b \quad (4)$$

$$a | b \quad (3)$$

$$b | a - b \quad (2)$$

$$a | a - b \quad (1)$$

۲ کدامیک از گزاره‌های زیر ارزش درستی دارد؟

$$(a | b + c) \Rightarrow (a | b \wedge a | c) \quad (2)$$

$$ab | c \Rightarrow (a | c \wedge b | c) \quad (4)$$

$$(a | b + c) \Rightarrow (a | b \vee a | c) \quad (1)$$

$$(a + b | c) \Rightarrow (b | c \vee a | c) \quad (3)$$

۳ اگر اعداد طبیعی a, b و c چنان باشند که $a | b^2$ و $a | ac$ آنگاه:

$$c | a \quad (4)$$

$$b | a \quad (3)$$

$$c | b \quad (2)$$

$$a | c \quad (1)$$

۴ اگر a, b و c سه عدد طبیعی چنان باشند که $c | a - b$ و $a | b$ آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

$$c | b \quad (4)$$

$$c | a \quad (3)$$

$$a | c \quad (2)$$

$$b | c \quad (1)$$

۵ کدامیک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

$$c | a \quad (1) \quad \text{اگر } b | a \text{ یا } 2b + 3c | a \text{ آنگاه}$$

$$(1) \quad \text{اگر } a | b \text{ یا } 2b + 3c | a \text{ آنگاه}$$

$$c | a \quad (4) \quad \text{اگر } b | a \text{ و } 7bc | a \text{ آنگاه}$$

$$(3) \quad \text{اگر } a | b \text{ و } a | 7bc \text{ آنگاه}$$

۶ اگر دو عدد صحیح a و b چنان باشند که $a - b | a + b$ آنگاه کدام گزاره ارزش همواره درستی ندارد؟

$$a - b | 3a + 7b \quad (4)$$

$$a - b | 2a \quad (3)$$

$$a - b | 4a + 2b \quad (2)$$

$$a - b | 4a + b \quad (1)$$

۷ کدامیک از گزاره‌های زیر در حالت کلی درست نیست؟

$$a^\delta | b^\delta \Rightarrow a^\gamma | b^\gamma \quad (2)$$

$$a | b \Rightarrow a^\delta | b^\gamma \quad (1)$$

$$a | 5a + 7b \Rightarrow a | b \quad (4)$$

$$a | b \Rightarrow a | 5a + 7b \quad (3)$$

۸ اگر $11 | 5a + 3b$ آنگاه باقی مانده‌ی تقسیم $27a - 8b$ بر ۱۱ کدام است؟

$$8 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

۹ اگر $2a + 5b | 3a - 2b$ آنگاه کدامیک از اعداد زیر مضربی از $2a + 5b$ است؟

$$35b \quad (4)$$

$$18b \quad (3)$$

$$15b \quad (2)$$

$$38b \quad (1)$$

۱۰ چند عدد صحیح مانند n وجود دارد به‌طوری که $5n - 2 | 72$ است؟

$$8 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۱۱ چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد به‌طوری که $n^2 + 2 | 150$ است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۱۲ روش منحنی $y = \frac{2x+1}{x+3}$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

$$8 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۱۳ برای چند عدد صحیح مانند n رابطه‌ی $1 - 2 | 2n^2 + 2 | 3n + 1$ برقرار است؟

$$4 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$





کدامیک از گزاره‌های زیر برای اعداد صحیح غیر صفر a , b و c ارزش درستی ندارد؟

$$a|b \Rightarrow a|bc \quad (4)$$

$$abc|1 \Rightarrow |a|=1 \quad (3)$$

$$a|b \Rightarrow ac|b \quad (2)$$

$$ab|c \Rightarrow a|c \quad (1)$$

$$24 \quad (4)$$

$$18 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

چند عدد مشتت a مضرب ۱۸ وجود دارد که $|a| \leq 2700$

$$7|a^r + b^r \quad (4)$$

$$7|a^r + b \quad (3)$$

$$7|5a - 2b \quad (2)$$

$$7|7a + 3b \quad (1)$$

اگر $a - b$ آنگاه کدام رابطه ارزش درستی دارد؟

$$a - b| \lambda a - 2b \quad (4)$$

$$a - b| 8a + b \quad (3)$$

$$a - b| 2a + 4b \quad (2)$$

$$a - b| 5a + b \quad (1)$$

اگر bc آنگاه کدام گزاره ممکن است نادرست باشد؟ ($\circ \neq \square$)

$$b|3c + b \quad (4)$$

$$c|5b \quad (3)$$

$$2c|3b \quad (2)$$

$$b|2c \quad (1)$$

اگر اعداد طبیعی a , b و c چنان باشند که $a^2|b^3$ و $c^2|ac^3$ آنگاه چه تعداد از گزاره‌های زیر ارزش درستی دارند:

- I) $a|c$ II) $b|c$ III) $a|b$ IV) $a^r|c$

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

از گزاره‌ی $a^3|b^5$ کدامیک از گزاره‌های زیر نتیجه می‌شود؟

$$a^{12}|b^{23} \quad (4)$$

$$a^{13}|b^{19} \quad (3)$$

$$a^{10}|b^{17} \quad (2)$$

$$a^7|b^{11} \quad (1)$$

شرط $a^5|b^3$ چه نوع شرطی برای $a^7|b^5$ است؟

$$4 \quad (\text{نه لازم و نه کافی})$$

$$3 \quad (\text{هم لازم و هم کافی})$$

$$2 \quad (\text{کافی})$$

$$1 \quad (\text{لازم})$$

چند عدد طبیعی فرد و مضرب ۳ وجود دارد که عدد 3000 را عاد کنند؟

$$6 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

کدام گزاره ارزش درستی ندارد؟

$$\forall n \in \mathbb{N} : 6|n^{10} - n^{18} \quad (2)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2|n^{10} + n^{11} \quad (1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : 12|n^4 - n^2 \quad (4)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : 5|n^{10} - n^{15} \quad (3)$$

اگر $12|14x + 15y$ آنگاه کدام رابطه ممکن است نادرست باشد؟

$$4|y \quad (4)$$

$$6|2x + 3y \quad (3)$$

$$3|x \quad (2)$$

$$2|y \quad (1)$$

اگر $11|8a - 3b + k$ و $7|a + 4b + 11$ آنگاه کمترین مقدار طبیعی k کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

به ازای چند مقدار طبیعی برای n حاصل $\frac{5n-2}{3n+1}$ عددی صحیح می‌شود؟

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

اگر $3n + 2|7n + 2$ آنگاه کدامیک از گزاره‌های زیر لزوماً ارزش درستی ندارد؟

$$3n + 2|2n + 3 \quad (4)$$

$$3n + 2|n - 1 \quad (3)$$

$$3n + 2|3n + 7 \quad (2)$$

$$3n + 2|5n + 2 \quad (1)$$

- چند عدد صحیح مانند n وجود دارد که $5 - n^4 - 2$ بخش پذیر باشد؟ ۲۸
 ۶ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)
 بزرگ‌ترین عدد طبیعی n که عبارت $19 + 4n^3 + 4|n|^4$ را به گزاره‌ای درست تبدیل می‌کند کدام رقم یکان را دارد؟ ۲۹
 ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
 اگر a و $28|a|$ آن‌گاه برای a چند جواب طبیعی پیدا می‌شود؟ ۳۰
 ۸ (۴) ۶ (۳) ۴ (۲) ۳ (۱)

پرسش‌های سطح دشوار درس جلسه‌ی اول

- عدد 10800 چند مقسوم‌علیه بزرگ‌تر از 721 و کوچک‌تر از 1079 دارد؟ ۳۱
 ۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) ۰ (۱)
 چند عدد طبیعی وجود دارد که مقسوم‌علیه حداقل یکی از دو عدد 72 یا 84 باشدند؟ ۳۲
 ۱۶ (۴) ۱۸ (۳) ۲۰ (۲) ۲۴ (۱)
 چند عدد طبیعی سه رقمی مانند k وجود دارد به‌طوری که $k|7200$ و $24|k$ باشدند؟ ۳۳
 ۱۲ (۴) ۱۰ (۳) ۹ (۲) ۸ (۱)
 چند عدد طبیعی مانند d وجود دارد به‌طوری که $d|1200$ و $24|d$ باشدند؟ ۳۴
 ۲۱ (۴) ۲۴ (۳) ۲۵ (۲) ۲۸ (۱)
 به ازای چند مقدار صحیح a رابطه‌ی $a^2 + 10a + 9|a + 1$ برقرار است؟ ۳۵
 ۲ (۳) ۱ (۲) ۰ (۱)
 اگر c آن‌گاه کدام‌یک از گزاره‌های زیر می‌تواند نادرست باشد؟ ۳۶
 $a + b|3a - c$ (۴) $a + b|2a + b - c$ (۳) $a + b|2b + 2c$ (۲) $a + b|a - c$ (۱)
 اگر a و b به ترتیب زوج و فرد بوده $a + 3b|3a - b$ آن‌گاه چه تعداد از گزاره‌های زیر ارزش درستی دارند؟ ۳۷
 • $a + 3b|8a - b$ • $a + 3b|3a + 4b$ • $a + 3b|4a + b$
 ۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) ۰ (۱)
 اگر k آن‌گاه k را کدام‌یک از اعداد زیر انتخاب کنیم تا $10x + ky$ نیز مضرب 11 شود؟ ۳۸
 ۹ (۴) ۸ (۳) ۵ (۲) ۲ (۱)
 چند عدد طبیعی دورقمی وجود دارد که $1 + 2n + 2|n - 7$ باشدند؟ ۳۹
 ۶ (۴) ۵ (۳) ۴ (۲) ۳ (۱)
 چند سه تایی مرتب با مؤلفه‌های متمایز مانند (a, b, c) از اعداد یک رقمی وجود دارد که هر سه رابطه‌ی $a|b$, $b|c$ و $a^2|c$ برقرار باشند؟ ۴۰
 ۹ (۴) ۸ (۳) ۷ (۲) ۶ (۱)
 چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد به‌طوری که $\frac{n^3 + 5n^2 + 48}{n^2} \in \mathbb{N}$ ۴۱
 ۴ (۴) ۶ (۳) ۳ (۲) ۸ (۱)
 اگر a عدد فردی باشد آن‌گاه بزرگ‌ترین عددی که $a^8 - 3a^7 - a^6 + 3a^5 - 3a^4 - a^3$ همواره بر آن بخش پذیر است کدام است؟ ۴۲
 ۸ (۴) ۴۸ (۳) ۱۶ (۲) ۲۴ (۱)



چند نقطه با مختصات صحیح بر روی منحنی $x^4 + 5y - yx + 4 = 0$ قرار دارد؟ ۴۳

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی n به‌طوری که $100|n^3 + 10|n^2 + n + 10$ کدام است؟ ۴۴

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

به ازای چند مقام صحیح برای n حاصل هر دو عبارت $\frac{30}{7n+1}$ و $\frac{18}{5n-1}$ عددی صحیح می‌شود؟ ۴۵

۳ (۴) بیش از

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پرسش‌های ترکیب سطوح درس جلسه‌ی اول

اگر $b|a + b$ و $a|b - b|a$ آنگاه کدام گزاره ارزش همیشه درستی دارد؟ ۴۶

۵ | $a + 2b$ (۴)

۲ | b (۳)

۶ | b (۲)

۳ | a (۱)

اگر $a|b^2$ و $b^3|c$ آنگاه کدام درست است؟ ۴۷

$a^r|b$ (۴)

$b^s|c$ (۳)

$a|c$ (۲)

$c|a$ (۱)

اگر دو عدد صحیح a و b چنان باشند که $a - b|a$ آنگاه چه تعداد از گزاره‌های زیر ارزش درستی دارند؟ ۴۸

$a - b|a + 2b$ و $a - b|a + b$ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

اگر $a|c$ و $b|d$ آنگاه چه تعداد از گزاره‌های زیر ارزش درستی دارند؟ ۴۹

- $a + b|c + d$
- $a + b|cd$
- $ab|cd$
- $ab|c + d$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

اگر $a|\Delta a + d$ و $a|c \cdot a|b$ آنگاه: ۵۰

$a^r|b^s + c^t d^u$ (۴)

$a^v|\Delta cd$ (۳)

$a^w|bcd$ (۲)

$a^x|\Delta bc$ (۱)

اگر آنگاه چه تعداد از گزاره‌های زیر ارزش درستی دارند؟ ۵۱

- $8a + 11b|c$
- $2a + 3b|c$
- $7a + 10b|c$

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

اگر $7a|4a + 5b$ آنگاه: ۵۲

$7a|\Delta b$ (۴)

$a|\Delta b$ (۳)

$a|\Delta$ (۲)

$a|b$ (۱)

اگر $a^k|b^5$ و $a^3|b^5$ آنگاه کدام بک از گزاره‌های زیر ارزش درستی دارد؟ ۵۳

$ac^r|b^s d^t$ (۴)

$ac^v|b^s d^t$ (۳)

$a^w c^x | b^y d^z$ (۲)

$a^u c^v | b^w d^x$ (۱)

اگر $!10^{2k}|a$ آنگاه k_{\max} کدام است؟ ۵۴

۵ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

چند عدد صحیح مانند n وجود دارد که هم $n + 3|24$ و هم $n - 1|35$ ۵۵

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



۵۶

چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد به‌طوری که $5 + 1|n^3 + 1$ بیش از ۳

۲(۲)

۱(۱)

۵۷

به ازای چند مقدار صحیح برای n حاصل $\frac{2n+1}{n-3}$ عددی صحیح می‌شود؟

۸(۴)

۶(۳)

۲(۱)

۵۸

چند عدد صحیح مانند n وجود دارد به‌طوری که $\frac{3n+1}{7n+2}$ نیز عددی صحیح باشد؟

۶(۴)

۴(۳)

۲(۱)

۵۹

مجموع کمترین و بیشترین مقدار طبیعی ممکن برای x برای آنکه $\frac{5x^2 + 2x - 9}{2x + 1}$ عددی صحیح باشد کدام است؟

۱۹(۴)

۱۸(۳)

۱۷(۲)

۱۶(۱)

۶۰

چند نقطه با مختصات طبیعی روی منحنی $0 = 11 - 9x - y - 2xy$ قرار دارد؟

۴(۴)

۲(۳)

۱(۲)

۰(۱)



کاربرد بخش‌پذیری در اتحادها

به اتحادهای زیر توجه کنید:

۱. به ازای جمیع مقادیر طبیعی برای n اتحاد زیر برقرار است:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^1b^{n-1})$$

۲. به ازای مقادیر زوج طبیعی برای n اتحاد زیر برقرار است:

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1}b^0 - a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 - \cdots - a^1b^{n-1})$$

۳. به ازای مقادیر فرد طبیعی برای n اتحاد زیر برقرار است:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1}b^0 - a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 - \cdots + a^1b^{n-1})$$

با توجه به اتحادهای فوق به نکته‌ی زیر خواهیم رسید:

اگر a و b اعداد صحیح دلخواهی باشند آن‌گاه:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a - b | a^n - b^n, \quad \forall n \in \mathbb{E} : a + b | a^n - b^n, \quad \forall n \in \mathbb{O} : a + b | a^n + b^n$$

نکته

۷

مثال ۸ باقی‌مانده‌ی تقسیم $2^{36} - 3^{36}$ بر ۳۵ را بجایی.

حل. عدد $2^{36} - 3^{36}$ به خاطر زوج بودن توان هم بر $(2 - 3)$ یعنی ۱ و هم بر $(2 + 3)$ یعنی ۵ بخش‌پذیر است.

اگر عدد $2^{36} - 3^{36}$ را به صورت $418 - 918$ بنویسیم، باز به خاطر زوج بودن توان آن عدد هم بر $(9 - 4)$ یعنی ۵ و هم بر $(9 + 4)$ یعنی ۱۳ بخش‌پذیر است. اگر عدد $2^{36} - 3^{36}$ را به صورت $27^{12} - 8^{12}$ بنویسیم مانند حالات قبل به خاطر زوج بودن توان عدد حاصل هم بر $(27 - 8)$ یعنی ۱۹ بخش‌پذیر است و هم بر $(27 + 8)$ یعنی ۳۵. بنابراین عدد داده شده بر ۳۵ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده‌ی خواسته شده صفر است.

مثال ۹ عدد $2^{138} - 1$ به چه تعداد از اعداد ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۳ و ۳۵ بخش‌پذیر است؟

حل.

$$2^{138} - 1 = 2^{138} - 1^{138} \Rightarrow \begin{cases} (2 - 1) = 1 & \checkmark \\ (2 + 1) = 3 & \checkmark \end{cases}$$

$$2^{138} - 1 = 4^{69} - 1^{69} \Rightarrow \begin{cases} (4 - 1) = 3 & \checkmark \\ (4 + 1) = 5 & \checkmark \end{cases}$$

$$2^{138} - 1 = 8^{46} - 1^{46} \Rightarrow \begin{cases} (8 - 1) = 7 & \checkmark \\ (8 + 1) = 9 & \checkmark \end{cases}$$

$$2^{138} - 1 = 16^{34} - 1^{34} \Rightarrow (16 - 1) = 15 \checkmark$$

توجه: چون در عبارت اخیر توان فرد شد دیگر نمی‌توان نتیجه‌گرفت که عدد حاصل بر $a + b$ یعنی ۱۷ نیز بخش‌پذیر است.



توجه: اگر عددی هم بر ۳ بخش پذیر باشد و هم بر ۵، معلوم است که آن عدد بر ۱۵ نیز بخش پذیر است، بنابراین بخش پذیر بودن بر ۱۵ را می‌شد قبل از نوشتۀ های قبلی نتیجه گرفت. با همین نگاه چون عدد داده شده هم بر ۵ بخش پذیر است و هم بر ۷ بنابراین بر ۳۵ نیز بخش پذیر است.

$$1^{18^\circ} - 1 = (1^8)^{13^\circ} - 1^{13^\circ} = 64^{13^\circ} - 1^{13^\circ} \Rightarrow \begin{cases} (64 - 1) = 63 \\ (64 + 1) = 65 \end{cases}$$

توجه: اگر عددی بر m بخش پذیر باشد آن‌گاه به تمام مقسوم علیه‌های m نیز بخش پذیر است بنابراین به خاطر بخش پذیر بودن عدد داده شده بر 65 معلوم می‌شود که عدد داده شده به تمام مقسوم علیه‌های 65 از جمله 13 بخش پذیر است.

قبل از ارائه‌ی راه حل لازم است بدانید که حل این نوع از سوالات در قسمت همنشستی به راحتی انجام خواهد شد. فقط در این قسمت قصد بر آن است که مطلب نوشته شده در نکته‌ی ۷ بیشتر تعمیق شود.

$$A = 2^{1347} = 2^r \times 2^{1340} = 2^r \times (2^s)^{480} = 4 \times 1^{480}$$

$$= 4[1^{480} - 1^{480} + 1] = 4 \times (4k + 1) = 4k' + 4$$

نحو شناسی دهد که عدد A در تقسیم بر ۷ باقیمانده‌ی ۴ دارد.

تست ✓ عدد $1 + 2^n$ بخش‌پذیر است، برای n چند مقدار طبیعی دو رقمی یافت می‌شود؟

10 (4)

14 (1)

۸۴

Y ()

سعی می‌کنیم جواب این سوال را کامل و قانع‌کننده ارائه دهیم:
 می‌دانیم $1 + 2^6 = 65$ بنا برای دنباله n هستیم که گزاره‌ی $1 + 1 \cdot 2^n + 1 \cdot 2^{n-1} + \dots + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ را به گزاره‌ای درست تبدیل کند با توجه به می‌دانیم $a + b + ab + b^2 + ab^2 + \dots + b^{k-1} + ab^{k-1} + a \cdot b^k$ به ازای k های طبیعی فرد، اگر n را مضارب فرد k در نظر بگیریم آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 2^{\varphi} + \nu |(2^{\varphi})^1 + (1)^1 &\Rightarrow n = 8 \\ 2^{\varphi} + \nu |(2^{\varphi})^2 + (1)^2 &\Rightarrow n = 18, \quad 2^{\varphi} + \nu |(2^{\varphi})^3 + (1)^3 \Rightarrow n = 36 \\ 2^{\varphi} + \nu |(2^{\varphi})^4 + (1)^4 &\Rightarrow n = 42, \quad 2^{\varphi} + \nu |(2^{\varphi})^5 + (1)^5 \Rightarrow n = 54 \\ 2^{\varphi} + \nu |(2^{\varphi})^{11} + (1)^{11} &\Rightarrow n = 66, \quad 2^{\varphi} + \nu |(2^{\varphi})^{13} + (1)^{13} \Rightarrow n = 78 \\ 2^{\varphi} + \nu |(2^{\varphi})^{15} + (1)^{15} &\Rightarrow n = 90, \quad \dots \end{aligned}$$

حال ثابت می‌کنیم به غیر از اعداد فوق برای n ، اعداد دیگری در لابهای آن‌ها نمی‌توانند جواب باشند. با برهان خلف پیش می‌رویم:

فرض می‌کنیم عدد m به غیر از اعداد داده شده به جای n صدق کند. بزرگ‌ترین عدد کوچک‌تر از m که مضرب فردی از ۶ است را در نظر می‌گیریم (مثلًا $6k$ ، معلوم است که $12 < m - 6k = l$ ، حال داریم:

$$\left. \begin{array}{l} r^s + 1|r^{sk} + 1 \\ r^s + 1|r^m + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow r^s + 1|r^m - r^{sk} \Rightarrow r^s + 1|r^{sk}(r^l - 1)$$

برای آنکه $(1 - 2^{k-1})$ بر $(1 + 2^k)$ بخش پذیر باشد لازم است $1 - 2^{k-1}$ بر $1 + 2^k$ بخش پذیر باشد که تناقض است چون همچویک از اعداد $1 - 1, 2^1, 2^2, \dots, 2^{k-1}$ بخش پذیر نستند.



مفاهیم ب.م.م و ک.م.م از روی بخش پذیری

ب.م.م: مجموعه مقسوم علیه‌های مشترک دو عدد ۱۶۸ و ۲۶۴ را می‌نویسیم:

$$D_{168} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 42, 56, 112, 168\}$$

$$D_{264} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 22, 33, 44, 66, 132, 264\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید ۸ عدد طبیعی وجود دارد که در هر دو عبارت $a|168$ و $a|264$ به جای a صدق کنند که بزرگ‌ترین آن‌ها عدد ۲۴ است. ۲۴ را بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک ۱۶۸ و ۲۶۴ نامیده و آن را به صورت $\text{GCD}(168, 264)$ نمایش می‌دهند. معلوم است که سایر مقسوم علیه‌های مشترک یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲، ۲۴ و ۴۸ همگی خود مقسوم علیه‌ی از ب.م.م ۱۶۸ و ۲۶۴ محسوب می‌شوند و می‌توان نکات زیر را نتیجه گرفت:

اگر عددی هم مقسوم علیه a باشد و هم مقسوم علیه b , آن‌گاه آن عدد مقسوم علیه‌ی (a, b) هم آن دو عدد حداچیده‌پود، یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} x|a \\ x|b \end{array} \right\} \Leftrightarrow x|(a, b)$$

لازم په ذکر است که نتیجه‌گیری فوق دو طرفة است.

اگر ب.م.م دو عدد a و b برابر ۱ باشد آن‌گاه آن دو عدد را مستباين یا نسبت به هم اول گویند.

$$\boxed{\begin{aligned} a &= a'.d \\ b &= b'.d \\ (a', b') &= 1 \end{aligned}} \Leftrightarrow$$

اگر $(a, b) = d$ آن‌گاه هم a مضرب d است و هم b مضرب d است یعنی $a = a'.d$ و $b = b'.d$ و در ضمن پایید دو ضریب a' و b' نسبت به هم اول باشند چون (اگر a' و b' مشترکی پیدا ندارند) $t > 1$ پخشش‌پذیر باشند آن‌گاه هم a و هم b هر دو پر $t.d$ پخشش‌پذیر می‌شوند که در آن صورت d مقسوم علیه مشترکی از a و b می‌شود و پابهمنم پومند d در تضاد است، پنهان نیست:

بزرگ‌ترین شمارنده مشترک دو عدد a و b برابر 490 است. آن دو عدد چند شمارنده مشترک مشتبت دارند؟

۱۶ (۴)

۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

۴ ۳ ✓ ۱

طبق نکته ۱ تمام مقسوم علیه‌های مشتبت 490 جوابند:

$$D_{490} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 49, 70, 98, 245, 490\}$$

دو عدد طبیعی a و 210 چنانند که $15 = (a, 210)$ برای a چند مقدار طبیعی کوچک‌تر از 210 پیدا می‌شود؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۱۳ (۲)

۱۴ (۱)

✓ ۳ ۲ ۱

$$(a, 210) = 15 \Rightarrow \begin{cases} a = a' \times 15 \\ 210 = 14 \times 15 \\ (a', 14) = 1 \end{cases}$$

چون $210 < a < 14$ پس a از 14 و تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از 14 که نسبت به 14 اول هستند عبارتند از $1, 3, 5, 7, 9, 11$ و 13 .

نکته ۸

نکته ۹

تست ۸

تست ۹

مثال ۱۱

چند عدد طبیعی مانند k یافت می‌شود که $k|1500$ و $k|3600$

حل. طبق نکته‌ی ۸ تمام مقسوم علیه‌های مشبّت $(1500, 3600)$ جواب مسئله‌اند:

$$1500 = 2^2 \times 5^3 \times 3^1 \\ 3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \Rightarrow (1500, 3600) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 300$$

عدد 300 به تعداد 18 مقسوم علیه مشبّت دارد. لازم به یادآوری است که:

- برای پیدا کردن ب.م.م دو عدد، آن‌ها را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم که در این صورت ب.م.م دو عدد عبارت خواهد بود با عدد حاصل از ضرب عوامل اول مشترک با توان کمتر.

- برای پیدا کردن تعداد مقسوم علیه‌های مشبّت عدد 300 از نکته‌ی ۴ استفاده شده است.

مثال ۱۲

چند عدد طبیعی وجود دارد که:

(الف) هم مقسوم علیه 1848 باشد و هم مقسوم علیه 3276

(ب) مقسوم علیه 1848 باشد ولی مقسوم علیه 3276 نباشد؟

حل. اگر مجموعه مقسوم علیه‌های طبیعی 1848 را A و مجموعه مقسوم علیه‌های طبیعی 3276 را B بنامیم آن‌گاه:

$$1848 = 2^3 \times 3^1 \times 7^1 \times 11^1 \Rightarrow |A| = 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$3276 = 2^2 \times 3^2 \times 7^1 \times 13^1 \Rightarrow |B| = 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$$

$$(1848, 3276) = 2^2 \times 3^1 \times 7^1 \Rightarrow |A \cap B| = 3 \times 2 \times 2 = 12$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$? = |A \cap B| = 12 \quad \text{(الف)}$$

$$? = |A \cap \overline{B}| = |A - B| = |A| - |A \cap B| = 32 - 12 = 20 \quad \text{(ب)}$$

مثال ۱۳

چند جفت عدد طبیعی وجود دارد که ب.م.شان 12 و مجموعشان 168 باشد؟

حل. از نکته‌ی ۹ استفاده می‌کنیم:

$$a + b = 168 \Rightarrow (a' + b').d = 168 \Rightarrow (a' + b') \times 12 = 168$$

$$\Rightarrow a' + b' = 14 \Rightarrow \{a', b'\} = \{13, 1\} \text{ یا } \{11, 3\} \text{ یا } \{9, 5\}$$

$$\Rightarrow \{a, b\} = \{156, 12\} \text{ یا } \{132, 36\} \text{ یا } \{108, 60\}$$

مثال ۱۴

اگر $d = d(5n + 3, 3n - 2)$ آن‌گاه تمام مقادیری که d می‌تواند داشته باشد را بیابید.

حل.

$$\left. \begin{array}{l} d|5n + 3 \\ d|3n - 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times 3 \\ \times (-5) \end{array} \Rightarrow d|19 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 19$$

لازم به ذکر است که ویژگی آخر از ویژگی‌های بخش‌بذری یک نتیجه‌گیری یک طرفه است یعنی از $a|m.b + n.c$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ و $b|c$ در استفاده از چنین نتیجه‌گیری‌هایی باید جانب احتیاط را رعایت کرد به این صورت که ممکن است در مجموعه جواب‌های ایجاد شده جوابی خارجی ایجاد شود، بنابراین باید درستی هر دو جواب 1 و 19 را $d = 19$ تأیید شوند:

$$n = 2 \Rightarrow ? = (13, 4) = 1 \Rightarrow d = 1 \checkmark$$

$$n = 7 \Rightarrow ? = (38, 19) = 19 \Rightarrow d = 19 \checkmark$$

