

مسایل برگزیده ریاضی

(از سراسر دنیا)



مترجم:
امیر آجرلو



انتشارات خوشه خوان

سرشناسه	:	هانسبرگر،راس،۱۹۲۹
عنوان و نام پدید آور	:	مسایل برگزیده ریاضی از سراسردنیا/مترجم:امیرآجرلو
مشخصات نشر	:	تهران : خوشخوان ۱۳۸۳
مشخصات ظاهری	:	
شابک	:	۹۶۴-۸۶۰۱-۵۶-۹
وضعیت فهرست‌نویسی	:	فیپا
موضوع	:	ریاضیات--مسایل ، تمرینها و غیره
موضوع	:	
رده بندی کنگره	:	QA۳۷/۲/ه۲۶م۵
رده بندی دیویی	:	۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی	:	۸۳/۱۵۰۱ م

انتشارات خوشخوان

مسایل برگزیده ریاضی (از سراسر دنیا)

عنوان	:	مسایل برگزیده ریاضی (از سراسر دنیا)
مترجم	:	امیر آجرلو
حروفچینی	:	
طراح جلد	:	علی عباسی
چاپ دوم	:	۱۴۰۱
تیراژ	:	۵۰۰
قیمت	:	۸۳۰۰۰ تومان
شابک	:	۹۶۴-۸۶۰۱-۵۶-۹

کلیه حقوق برای انتشارات خوشخوان محفوظ است.

تهران، خیابان انقلاب، خیابان فخررازی، بین روانمهر و لبافی نژاد، کوچه انوری،
پلاک ۱۹، انتشارات خوشخوان، تلفن : ۶۶۴۹۴۰۲۰

email : info@khoshkhan.ir | www.khoshkhan.ir

فهرست

مقدمه ناشر ۱
فصل ۱. پنج مسأله از ایرلند ۳
فصل ۲. یک مسأله معروف و قدیمی ۱۱
فصل ۳. سه مسأله از مسابقات اتووش ـ کورشاک ۱۷
فصل ۴. سه مسأله از المپیادهای ریاضی لهستان ۱۹۵۴ـ ۱۹۴۹ ..... ۲۳
فصل ۵. ده مسأله از المپیادهای آلمان شرقی ۲۷
فصل ٦. ۲۸ مسأله از مجله‌ی پی ـ مو ـ اپسیلون ۳۹
فصل ۷. مسأله‌هایی از مسابقات ریاضی اتریش ـ لهستان ۸۱
فصل ۸. ۱۹ مسأله از کوانتوم ۹۳
فصل ۹. سه مسأله از المپیادهای بلغارستان برای ۱۳ و ۱۴ ساله‌ها ۱۱۳
فصل ۱۰. مبارزه طلبی کازومانو ۱۱۷
فصل ۱۱. پنج مسأله‌ی ساده از المپیاد ریاضی لنینگراد سال ۱۹۸۴ ..... ۱۲۱
فصل ۱۲. یک سرگرمی حسابی ۱۲۵
فصل ۱۳. چند مسأله‌ی برگزیده از The Mathematical Gazette ۱۲۹
فصل ۱۴. سه مسأله از مسابقات ریاضی پاتنام ۱۹۹۴ ..... ۱۴۱
فصل ۱۵. نگاهی دوباره به مسأله‌ای از رومانی ۱۴۵
فصل ۱٦. سی مسأله‌ی متنوع ۱۴۷
فصل ۱۷. دو مسأله‌ی پیکارجو در ترکیبیات ۱۷۷
فصل ۱۸. یک مسأله استفاده نشده از المپیاد بین‌المللی ریاضی ۱۹۸۸ ..... ۱۸۵
فصل ۱۹. چهار مسأله از المپیاد بین المللی ریاضیات سال ۱۹۹۵ ..... ۱۹۱
فصل ۲۰. دو مسأله هندسه ۲۰۱
فصل ۲۱. یک مربع کامل دور از ذهن ۲۰۹

فصل ۲۲. دایره‌ی نه نقطه، قضیه‌ی کولیج، کانتور، ناپلئون و نقطه‌ی لانگ چمپس . ۲۱۱
فصل ۲۳. مسأله‌ای از فیلیپین ۲۲۱
فصل ۲۴. چهار راه حل از جورج اواجلوپولوس ۲۲۵
فصل ۲۵. مسأله‌ای از المپیاد ریاضی کانادا سال ۱۹۹۲ ..... ۲۳۵
فصل ۲۶. تابعی با رشد نمایی ۲۳۹
فصل ۲۷. تمرین‌ها ۲۴۳
فصل ۲۸. حل تمرین‌ها ۲۴۹

پیشگفتار ناشر

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده‌ای را در بارور کردن و شکفتن استعدادهای دانش‌آموزان ایفا می‌کنند و باید به جرأت ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقاط جهان را تا حد زیادی افزایش دهند. کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند، لذا لازم است درکنارکتاب‌های درسی، خلأ موجود خصوصاً برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود. در همین راستا **انتشارات خوشخوان** با استعانت از حضرت حق تعالی و به کمک تنی چند از اساتید و دبیران ممتاز ایران و نیز فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف که اغلب آنان در زمانی نه چندان دور، مدال‌آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده‌اند، کتاب‌هایی را تألیف و به دانش‌آموزان ارائه می‌نماید. امید است مورد پسند و استفاده‌ی دانش‌آموزان و دبیران این مرز و بوم قرار گیرند.

فصل ۱

پنج مسأله از ایرلند

مسایل این فصل از امتحانات انتخاب تیم المپیاد ریاضی ایرلند برای شرکت در مسابقات جهانی سال ۱۹۹۰ انتخاب شده است.

۱) دنباله‌ی اعداد غیرمربع، همان‌طور که از نامش پیداست، با حذف اعداد مربع کامل از دنباله‌ی اعداد طبیعی بدست می‌آید:

$$۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۷, ۱۸, \ldots$$

ثابت کنید n امین عدد غیرمربع از رابطه‌ی $\left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{۱}{۲} \right\rfloor$ بدست می‌آید، که در آن $\lfloor x \rfloor$ نشان دهنده بزرگ‌ترین عدد صحیح نابیشتر از x است.

n امین عدد غیرمربع کامل را t_n می‌نامیم. روشن است که هر عدد غیرمربع، بین دو عدد مربع کامل متوالی قرار می‌گیرد. فرض کنید:

$$m^۲ < t_n < (m+۱)^۲$$

لذا از میان اعداد $\{۱, ۲, \ldots, t_n\}$، m عدد مربع کامل و n عدد غیرمربع کامل هستند و بنابراین

$$t_n = m + n$$

می‌دانیم برای هر عدد صحیح k، $\lfloor k+x \rfloor = k + \lfloor x \rfloor$، پس برای اثبات درستی رابطه‌ی $t_n = \lfloor n + \sqrt{n} + \frac{۱}{۲} \rfloor$ کافیست نشان دهیم:

$$m = \lfloor \sqrt{n} + \frac{۱}{۲} \rfloor$$

که معادل است با این‌که

$$\begin{aligned} m &\le \sqrt{n} + \frac{۱}{۲} < m + ۱ \\ m - \frac{۱}{۲} &\le \sqrt{n} < m + \frac{۱}{۲} \\ m^۲ - m + \frac{۱}{۴} &\le n < m^۲ + m + \frac{۱}{۴} \end{aligned}$$

که با توجه به صحیح بودن n و m معادل است با

$$m^۲ - m + ۱ \le n \le m^۲ + m$$

اما این رابطه بلافاصله از شرط روی t_n بدست می‌آید:

$$m^۲ < t_n < (m+۱)^۲$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} m^۲ &< m + n < m^۲ + ۲m + ۱ \\ m^۲ - m &< n < m^۲ + m + ۱ \end{aligned}$$

و

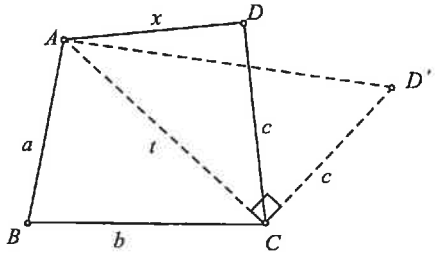
$$m^۲ - m + ۱ \le n \le m^۲ + m$$

۲) سه ضلع از چهارضلعی محدب $ABCD$ دارای طول‌های $AB = a$، $BC = b$ و $CD = c$ می‌باشند. اگر مساحت این چهارضلعی حداکثر مقدار ممکن باشد، نشان دهید x، طول ضلع چهارم این چهارضلعی، در معادله‌ی زیر صدق می‌کند.

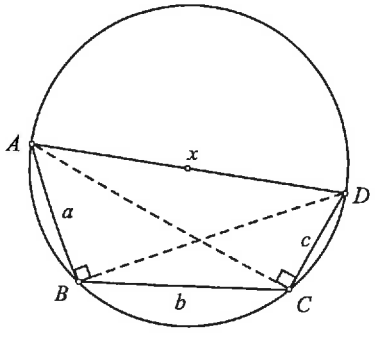
$$x^۳ - (a^۲ + b^۲ + c^۲)x - ۲abc = ۰$$

ادعا می‌کنیم در چهارضلعی $ABCD$ با بیشترین مساحت $\angle ACD = ۹۰^\circ$. زیرا در غیر این‌صورت اگر نقطه‌ی D' را مطابق شکل (۱) چنان انتخاب کنیم که $CD' = CD = c$ و $\angle ACD' = ۹۰^\circ$، در این‌صورت

$$S_{ACD'} = \frac{۱}{۲}c \cdot AC \cdot \sin ۹۰^\circ > \frac{۱}{۲}c \cdot AC \cdot \sin \angle ACD = S_{ACD}$$



شکل ۱



شکل ۲

و در نتیجه مساحت چهارضلعی $ABCD'$ از مساحت چهارضلعی $ABCD$ بیشتر خواهد شد. بنابراین در چهارضلعی $ABCD$ با حداکثر مساحت ممکن، زاویه $\angle ACD$ باید قائمه باشد. به طور مشابه باید داشته باشیم $\angle ABC = ۹۰^\circ$. بنابراین چهار رأس این چهارضلعی، مطابق شکل (۲)، بر روی دایره‌ای به قطر $AD = x$ واقعند. حال با استفاده از قضیه بطلمیوس در این چهارضلعی داریم:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

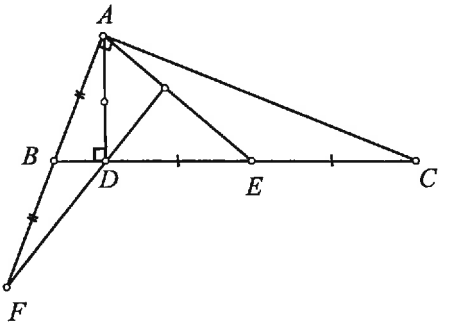
بنابراین

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x^۲ - c^۲} \cdot \sqrt{x^۲ - a^۲} = ac + bx \ , \\
&(x^۲ - c^۲) \cdot (x^۲ - a^۲) = (ac + bx)^۲ \ , \\
&x^۴ - (a^۲ + c^۲)x^۲ + a^۲c^۲ = a^۲c^۲ + ۲abcx + b^۲x^۲ \ , \\
&x^۴ - (a^۲ + b^۲ + c^۲)x^۲ - ۲abcx = ۰
\end{aligned}$$

و از آن‌جایی که $x \neq ۰$، بدست می‌آید:

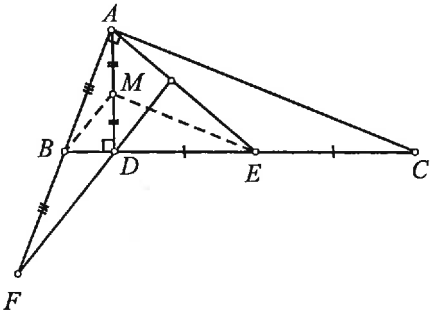
$$x^۳ - (a^۲ + b^۲ + c^۲)x - ۲abc = ۰$$

۳) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\triangle}{ABC}$، D پای ارتفاع نظیر رأس A و E وسط DC است. AB را از طرف B به اندازه‌ی خود امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی F بدست آید (شکل ۳). ثابت کنید FD و AE بر هم عمودند.



شکل ۳

با دیدن نقاط میانی DC و AF، به نظر می‌رسد که استفاده از نقاط میانی سایر پاره‌خط‌ها می‌تواند مفید باشد. نقطه‌ی M وسط AD را در نظر می‌گیریم (شکل ۴). پاره‌خط EM اوساط دو ضلع از مثلث $\overset{\triangle}{ADC}$ را به هم وصل می‌کند و بنابراین با ضلع AC موازی است. اما AC بر AB عمود است و در نتیجه EM نیز بر AB عمود خواهد بود.



شکل ۴

حال به مثلث $\overset{\triangle}{ABE}$ توجه کنید. بنابر مطالب گفته شده EM و AD دو ارتفاع از این مثلث هستند. لذا نقطه‌ی M در واقع مرکز ارتفاعی مثلث $\overset{\triangle}{ABE}$ است. بنابراین BM ارتفاع سوم مثلث $\overset{\triangle}{ABE}$ خواهد بود. پس BM بر AE عمود

است. اما از آن‌جایی که B و M اوساط دو ضلع از مثلث $\overset{\triangle}{AFD}$ هستند، لذا BM با FD موازی است و بنابراین FD نیز بر AE عمود خواهد بود.

۴) برای هر عدد طبیعی $n \geq ۳$، نشان دهید:

$$S_n = \frac{۱}{۳^۳} + \frac{۱}{۴^۳} + \cdots + \frac{۱}{n^۳} < \frac{۱}{۱۲}$$

از آن‌جایی که

$$(k-۱)(k+۱) = k^۲ - ۱ < k^۲$$

پس

$$(k-۱)k(k+۱) < k^۳$$

و

$$\frac{۱}{(k-۱)k(k+۱)} > \frac{۱}{k^۳}$$

بنابراین

$$S_n < \frac{۱}{۲\times۳\times۴} + \frac{۱}{۳\times۴\times۵} + \cdots + \frac{۱}{(n-۱)n(n+۱)} = \sum_{k=۳}^{n} \frac{۱}{(k-۱)k(k+۱)}$$

مسلماً علاقه‌مندیم که مجموع فوق را در صورت امکان محاسبه کنیم. برای محاسبه‌ی این مجموع‌ها، سعی می‌کنیم کسر مربوط به مجموع را چنان تفکیک کنیم که مجموع به یک سری تلسکوپی تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}\frac{۱}{(k-۱)k(k+۱)} &= \frac{۱}{k}\cdot\frac{۱}{(k-۱)(k+۱)} = \frac{۱}{۲k}\cdot\frac{(k+۱)-(k-۱)}{(k-۱)(k+۱)} \\ &= \frac{۱}{۲k}\left(\frac{۱}{k-۱} - \frac{۱}{k+۱}\right) \\ &= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{(k-۱)k} - \frac{۱}{k(k+۱)}\right)\end{aligned}$$

بنابراین

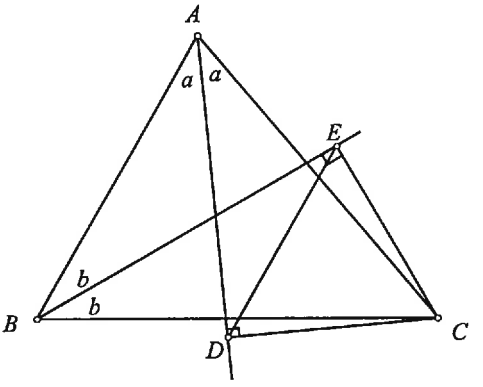
$$s_n < \frac{۱}{۲}\sum_{k=۳}^{n}\left(\frac{۱}{(k-۱)k} - \frac{۱}{k(k+۱)}\right)$$

مجموع فوق، یک مجموع تلسکوپی است، و به راحتی قابل محاسبه است.

$$s_n < \frac{۱}{۲}\left(\left(\frac{۱}{۲\times ۳}-\frac{۱}{۳\times ۴}\right)+\left(\frac{۱}{۳\times ۴}-\frac{۱}{۴\times ۵}\right)+\cdots+\left(\frac{۱}{(n-۱)n}-\frac{۱}{n(n+۱)}\right)\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲\times ۳}-\frac{۱}{n(n+۱)}\right) < \frac{۱}{۱۲}$$

که همان نتیجه‌ی مطلوب ماست.

۵) فرض کنید عمودهای مرسوم از رأس C بر نیمسازهای زوایای A و B از مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، آنها را، مطابق شکل ۵، در D و E قطع کنند. نشان دهید DE و AB با هم موازی‌اند.



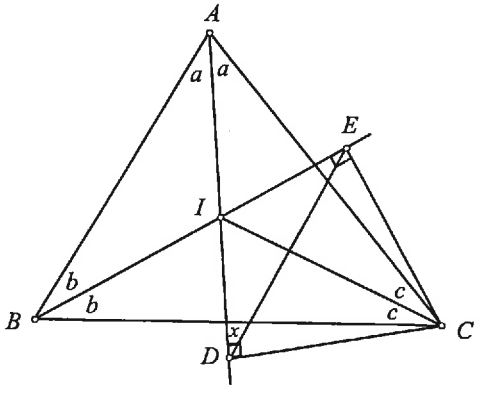
شکل ۵

برای اثبات توازی این دو خط کافیست نشان دهیم $\angle BAD = \angle ADE$ قرار می‌دهیم

$$\angle A = ۲a, \angle B = ۲b, \angle C = ۲c, \angle ADE = x$$

پس باید نشان دهیم $x = a$. نیمسازهای زوایای A و B، مطابق شکل ٦، همدیگر را در I، مرکز دایره محاطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، قطع می‌کنند. بنابراین IC نیمساز زاویه C

خواهد بود.



شکل ٦

اکنون دقت کنید که چهارضلعی $IDCE$ محاطی است و لذا

$$x = \angle ICE = \angle BCE - c = ۹۰ - b - c$$

اما از طرف دیگر $a + b + c = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{۲} = ۹۰^\circ$ و بنابراین

$$x = ۹۰ - b - c = a$$

که توازی AB و DE را نتیجه می‌دهد.

فصل ۲

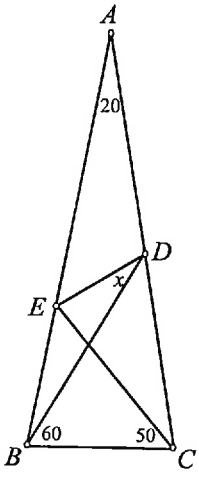
یک مسأله معروف و قدیمی

مسأله زیر، که به صورت فریب‌انگیزی سخت به نظر می‌رسد، برای خود دوران هیجان انگیزی داشته است.

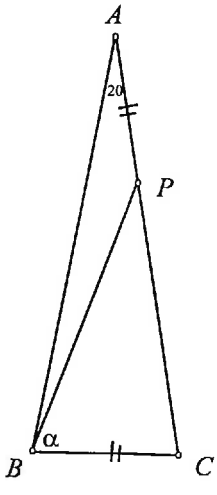
در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، $AB = AC$ و $\angle A = ۲۰^\circ$ (شکل ۱). نقاط D و E روی AC و AB چنان انتخاب شده‌اند که $\angle DBC = ۶۰^\circ$ و $\angle ECB = ۵۰^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی $\angle EDB = x$ را بدست آورید.

این مسأله موضوع مقاله‌ای جذاب تحت عنوان «نه راه حل برای یک مسأله» می‌باشد که به سال ۱۹۹۴ در مجله کوانتوم به چاپ رسیده است. در انتهای این مقاله صورتی تغییر یافته از این مساله به عنوان تمرین گذاشته شده است. موضوع این فصل کتاب، بررسی این تمرین است که سه راه حل متنوع و جذاب برای آن ارائه خواهیم کرد.

در مثلث متساوی الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$، که $AB = AC$ و $\angle A = ۲۰^\circ$، نقطه P مطابق شکل ۲ روی AC چنان انتخاب شده است که $AP = BC$. اندازه‌ی زاویه‌ی $\alpha = \angle PBC$ را بدست آورید.



شکل ۱



شکل ۲

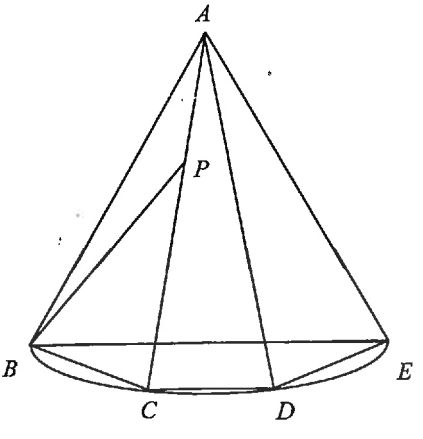
این مسأله جذاب و دوست داشتنی از طرف یک دانش‌آموز پایه نهم پیشنهاد شده بود.

راه حل اول متعلق است به ولادیمیر دابروسکی، از دانشگاه ایالتی مسکو، که به سال ۱۹۹۴ در مجله کوانتوم به چاپ رسیده است.

۱) راه حل دابروسکی (Dubrovsky)

می‌دانیم که اندازه هر یک از زاویه‌های B و C برابر $\frac{1}{2}(180 - 20) = 80$ می‌باشد. دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB می‌زنیم. دو وتر CD و DE را هم اندازه با BC روی دایره جدا می‌کنیم (شکل ۳). در این صورت زاویه رأس $\angle BAE$ برابر $3 \times 20 = 60$ خواهد شد که با توجه به برابری AB و AE، متساوی الاضلاع بودن مثلث $\overset{\triangle}{ABE}$ را نتیجه می‌دهد. پس $AB = BE$ از طرفی می‌دانیم

$$\angle BAP = \angle BED = 20$$



شکل ۳

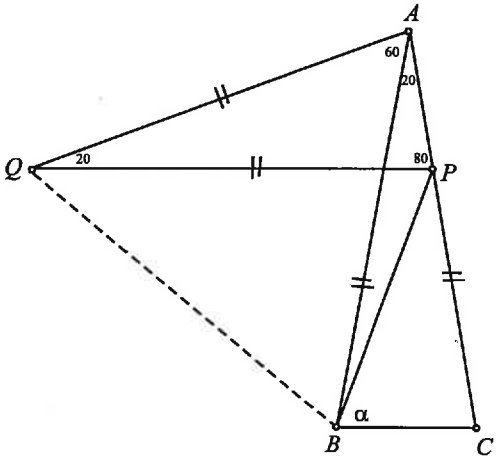
هم‌چنین $AP = BC = DE$. بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{BAP}$ و $\overset{\triangle}{BED}$ به حالت (ض‌زض) با هم برابرند و لذا

$$\angle ABP = \angle EBD = 10 \Rightarrow \alpha = \angle PBC = 80 - 10 = 70$$

حال توجه شما را به راه حل هوشمندانه‌ی دیگری از یان‌مک‌گی، هم دانشگاهی آقای هانسبرگر، جلب می‌کنیم.

۲) راه حل مک‌گی (McGee)

ایده این راه حل در بنا کردن مثلثی مساوی با مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ به قاعده AP است .



شکل ۴

با کمی دقت می‌توان دریافت که AGB مثلثی است متساوی الاضلاع. زیرا $QA = AB$ و

$$\begin{aligned}\angle QAB &= \angle QAP - \angle BAC \\ &= ۸۰ - ۲۰ \\ &= ۶۰\end{aligned}$$

بنابراین $\angle BQP = ۶۰ - ۲۰ = ۴۰$ و هم‌چنین $QB = QP$. لذا

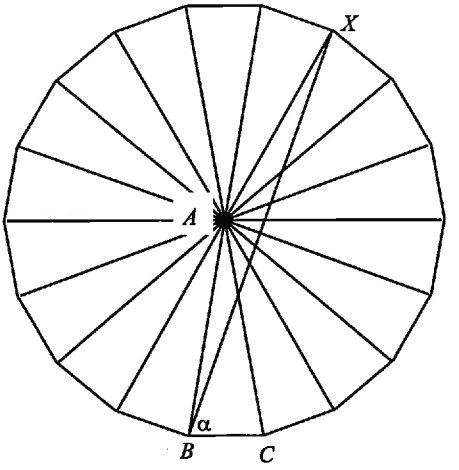
$$\angle QBP = \frac{۱}{۲}(۱۸۰ - ۴۰) = ۷۰$$

که نتیجه می‌دهد $\angle ABP = ۷۰ - ۶۰ = ۱۰$ و $\alpha = ۸۰ - ۱ = ۷۰$

۳) راه حل سوم

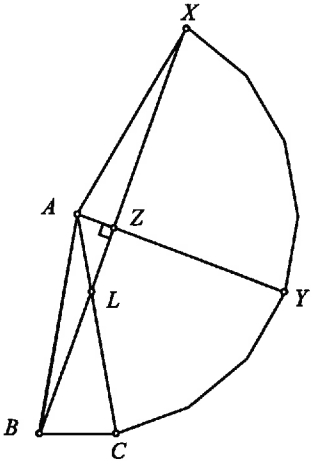
ایده این راه حل از روشی که آقای تامسون، از تاکومای واشنگتن، برای حل مسأله اصلی (که در ابتدای این فصل بیان کردیم) ارائه کرده گرفته شده است. مشروح راه آقای تامسون برای مسأله اصلی را می‌توانید در کتاب گوهرهای ریاضی، جلد دوم، ببینید.

به مرکز A و شعاع AB دایره‌ای رسم کرده و آن را توسط ۱۸ وتر مساوی BC، تکه‌تکه می‌کنیم (شکل ۵)

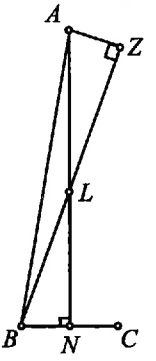


شکل ۵

به این ترتیب ۱۸ کپی از مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ کنار هم قرار می‌گیرند. به هشتمین کپی از مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ که رأس آن را با X مشخص کرده‌ایم دقت کنید. اگر بتوانیم ثابت کنیم که امتداد BP از X می‌گذرد، مسأله به سادگی تمام حل می‌شود. زیرا در این صورت با توجه به متساوی الساقین بودن BAX و این‌که $\angle BAX = ۸ \times ۲۰ = ۱۶۰^\circ$ نتیجه می‌گیریم $\angle ABP = ۱۰$ و از آن‌جا $\alpha = ۷۰^\circ$. حال چطور می‌توان ثابت کرد که BP از X می‌گذرد؟ به جای اثبات این مطلب، B را به X متصل می‌کنیم تا BX، AC را در L قطع کند (شکل ۶). حال اگر نشان دهیم که $AL = BC$، در این‌صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم که $P = L$ و هم‌خطی B، P و X ثابت می‌شود.



شکل ۶



شکل ۷

حال به شکل ٦ دقت کنید. از آن‌جا که از B تا Y، ۴ کپی از مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قرار دارد، پس $\angle BAY = ۴ \times ۲۰ = ۸۰$ و لذا

$$\begin{aligned}\angle LAZ &= \angle BAZ - \angle BAL \\ &= ۸۰ - ۲۰ \\ &= ٦۰\end{aligned}$$

به این ترتیب مثلث $\overset{\triangle}{ALZ}$ مثلثی با زوایای (۹۰ و ٦۰ و ۳۰) است و در نتیجه $AL = ۲AZ$. این می‌ماند که نشان دهیم $BC = ۲AZ$. برای اثبات این رابطه و اتمام حل مسأله کافیست ارتفاع AN از مثلث متساوی الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم کنیم (شکل ۷). این ارتفاع BC را نصف می‌کند لذا کافیست نشان دهیم $BN = AZ$ که این هم فوراً از تساوی دو مثلث $\overset{\triangle}{ABN}$ و $\overset{\triangle}{BZA}$ نتیجه می‌شود؛ زیرا هر دو مثلث دارای زوایای ۸۰ و ۹۰ بوده و ضلع AB را نیز در اشتراک دارند.

فصل ۳

سه مسأله از مسابقات اتووش ـ کورشاک

۱) (مسابقات اتووش ـ کورشاک سال ۱۹۵۳)

اگر n یک عدد طبیعی و d مقسوم علیهی از $2n^2$ باشد، ثابت کنید $n^2 + d$ نمی‌تواند یک مربع کامل باشد.

از آن‌جایی که d مقسوم علیهی از $2n^2$ است، به ازای عددی طبیعی مثل k داریم $2n^2 = dk$. حال اگر $n^2 + d$ بخواهد مربع کامل باشد، $k^2(n^2 + d)$ هم باید مربع کامل باشد، اما

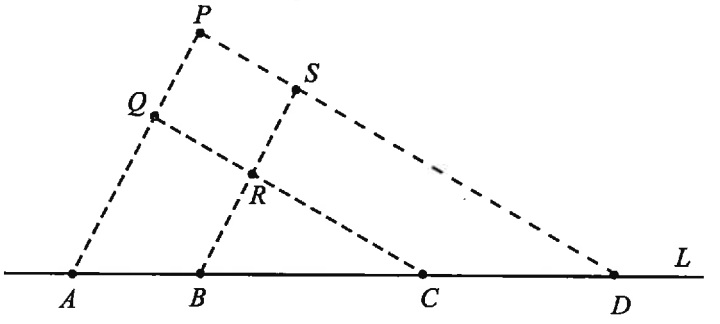
$$\begin{aligned} k^2(n^2 + d) &= k^2n^2 + k^2d \\ &= k^2n^2 + k(2n^2) \\ &= n^2(k^2 + 2k) \\ &= n^2[(k+1)^2 - 1] \end{aligned}$$

بنابراین $(k+1)^2 - 1$ باید مربع کامل باشد. اما می‌دانیم که دو عدد طبیعی متوالی هر دو نمی‌توانند مربع کامل باشند؛ لذا از آن‌جایی که $(k+1)^2$ مربع کامل است، بنابراین $(k+1)^2 - 1$ نمی‌تواند مربع کامل باشد. تناقض حاصل درستی حکم مسأله را روش می‌سازد.

۲) (مسابقات اتووش ـ کورشاک سال ۱۸۹۸)

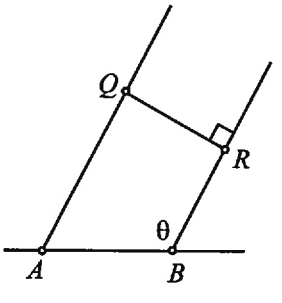
چهار نقطه‌ی A، B، C و D به همین ترتیب روی خط L داده شده‌اند. مربع $PQRS$ را چنان بسازید که اضلاع آن (و یا امتداد آنها) از این چهار نقطه بگذرند. به بیان دقیق‌تر، نقاط A و B به ترتیب روی اضلاع PQ و RS (و یا امتداد آنها) و مشابهاً

نقاط C و D روی اضلاع QR و PS واقع شوند (شکل ۱).



شکل ۱

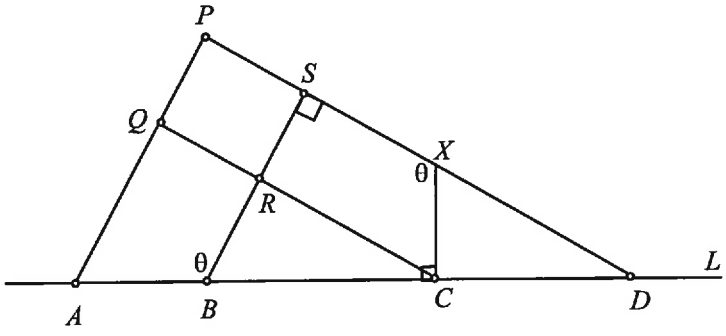
از امتداد دادن اضلاع مقابل یک مستطیل، دو خط موازی در صفحه که ما آن‌را یک «نوار» می‌نامیم بوجود می‌آید. بنابراین یک مربع دو نوار با اندازه‌های مساوی در صفحه را مشخص می‌کند. لذا برای حل این مسأله باید دو نوار مساوی و عمود بر هم، یکی از نقاط A و B و دیگری از نقاط C و D بگذرانیم. اما چه معیاری برای برابری اندازه‌ی دو نوار (یعنی فاصله دو خط موازی تشکیل دهنده‌ی آنها) وجود دارد؟ به شکل ۲ دقت کنید. این شکل نواری را نشان می‌دهد که پاره‌خط AB را درون خود محدود کرده و با آن زاویه θ می‌سازد. اندازه‌ی این نوار یعنی QR به سادگی از روی طول AB و اندازه‌ی زاویه θ قابل محاسبه است ($QR = AB \cdot \sin\theta$). بنابراین دو نوار که دارای وترهای با طول یکسان بوده و با آنها زاویه‌های مساوی بسازند، حتماً با هم برابرند.



شکل ۲

با در نظر داشتن این مطلب، در نقطه‌ی C عمودی بر خط L رسم

کنید تا PS را در X قطع کند (شکل ۳).



شکل ۳

قائمه بودن زوایای C و S محاطی بودن چهار ضلعی $SBCX$ را ایجاب می‌کند، لذا

$$\angle ABS = \angle CXP = \theta$$

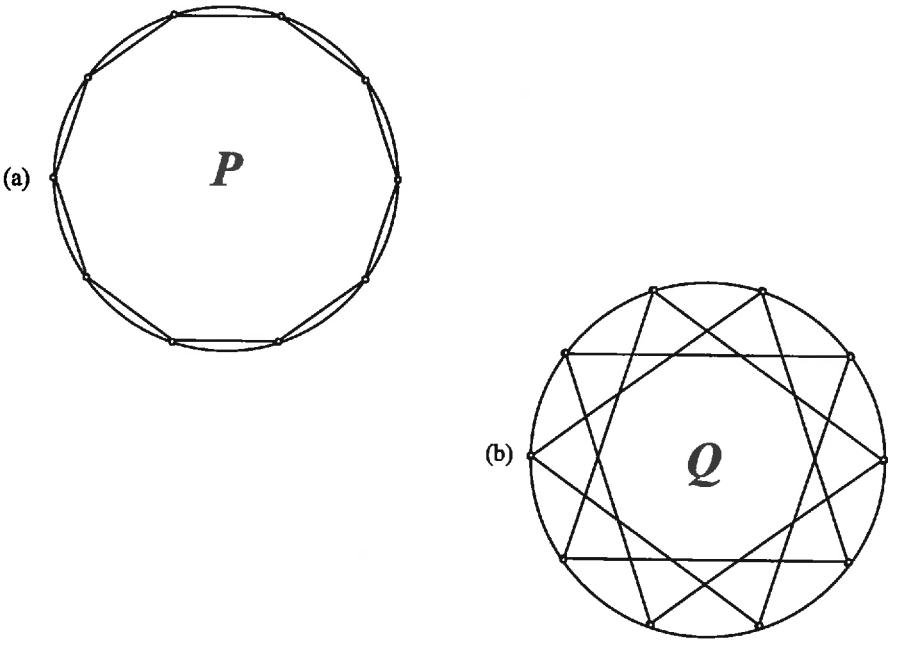
یعنی دو نوار گذرا از (A, B) و (C, D) با دو وتر AB و CX زوایای یکسانی می‌سازند. بنابراین برای مساوی بودن این دو نوار باید داشته باشیم $CX = AB$.

به این ترتیب کلید اصلی حل این مسأله را بدست آوردیم. برای رسم مربع خواسته شده، ابتدا در نقطه‌ی C عمودی بر L رسم کرده و آن‌را تا نقطه X ادامه می‌دهیم به طوری‌که $CX = AB$.

D را به X وصل کرده و از C نیز خطی موازی DX می‌کشیم تا به این ترتیب نوار گذرا از C و D ایجاد شود. سپس از نقاط A و B خطوطی عمود بر این نوار رسم می‌کنیم تا به این ترتیب نوار گذرا از A و B نیز ایجاد شود. حال، طبق بحث‌های انجام شده در قبل، روشن است که چهار نقطه‌ی برخورد این دو نوار رئوس مربع خواسته شده را مشخص می‌کنند.

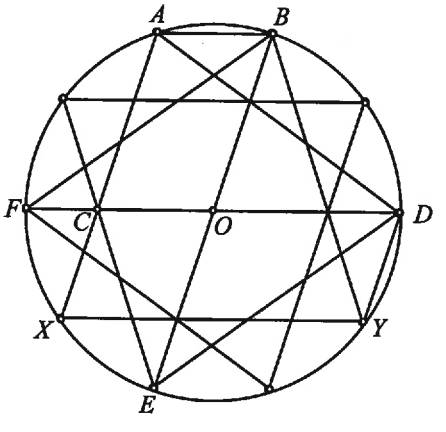
۳) (مسابقات اتووش ـ کورشاک سال ۱۹۰۸)

یک دایره و ده نقطه روی محیط آن به فاصله‌های مساوی از یکدیگر در نظر بگیرید. اگر این نقاط را متوالیاً به هم وصل کنیم، یک ده ضلعی منتظم مانند P ایجاد خواهد شد و اگر هر نقطه را به سومین نقطه بعد از آن وصل کنیم، یک ده ضلعی منتظم خود متقاطع مانند Q بوجود خواهد آمد (شکل ۴).



شکل ۴

ثابت کنید که اختلاف بین طول یک ضلع Q و طول یک ضلع P برابر شعاع این دایره است.



شکل ۵

در شکل ۵، AB ضلعی از P و XY ضلعی از Q است. به وضوح BE و FD قطرهای این دایره‌اند. از آن‌جایی که نقاط روی دایره به فاصله‌های مساوی قرار

دارند، لذا به روشنی سه وتر AX، BE و DY با هم موازی خواهند بود. بنابراین هر دو چهار ضلعی $ABOC$ و $CXYD$ متوازی الاضلاع هستند و در نتیجه اختلاف بین AB و XY با اختلاف بین CO و CD، یعنی شعاع دایره، برابر خواهد بود.

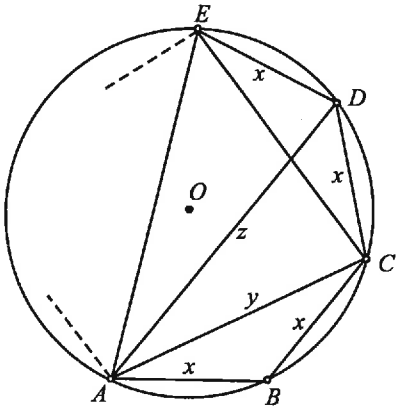
فصل ۴

سه مسأله از المپیادهای ریاضی لهستان ۱۹۵۴ـ ۱۹۴۹

۱) اگر A، B، C و D چهار رأس متوالی از یک چند ضلعی منتظم باشند، به طوری که

$$\frac{۱}{AB} = \frac{۱}{AC} + \frac{۱}{AD}$$

در این صورت تعداد اضلاع آن را بیابید.



شکل ۱

این چند ضلعی منتظم مسلماً یک مربع نیست، زیرا در یک مربع AB و AD برابر بوده و شرط داده شده برقرار نخواهد شد. بنابراین این چند ضلعی حداقل یک رأس دیگر مانند E بعد از D دارد. هم‌چنین چون این چند ضلعی منتظم است، محاطی نیز هست (شکل ۱).

طول ضلع چند ضلعی را x بگیرید. هم‌چنین قرار دهید $AC = y$ و $AD = z$. به این ترتیب شرط داده شده در مسأله معادل است با:

$$\frac{۱}{x} = \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z}$$

و یا

$$yz = xy + xz \qquad (۱)$$

با استفاده از قضیه‌ی بطلمیوس در چهار ضلعی $ACDE$ بدست می‌آوریم:

$$AE \cdot x + xy = EC \cdot z$$

و با توجه به تقارن $EC = AC = y$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} AE \cdot x + xy &= yz \\ &= xy + xz \quad \text{(طبق ۱)} \end{aligned}$$

که می‌دهد

$$AE \cdot x = xz$$

و یا

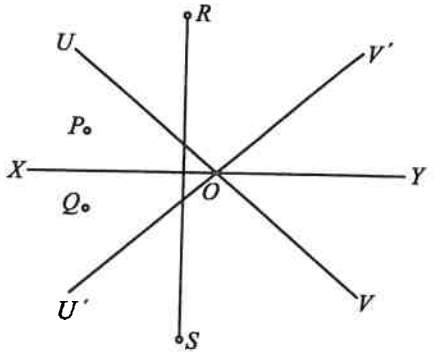
$$AE = z = AD$$

یعنی نقطه A از دو نقطه‌ی D و E به یک فاصله است و لذا روی عمود منصف DE قرار دارد. اما عمودمنصف DE از نقطه‌ی O، مرکز دایره، نیز می‌گذرد. بنابراین می‌توان چنین نتیجه گرفت که خط AO این چند ضلعی منتظم را نصف می‌کند و در نتیجه این چند ضلعی $۲ \times ۳ + ۱ = ۷$ ضلع دارد.

۲) اگر شکلی در صفحه دقیقاً دو محور تقارن داشته باشد، ثابت کنید این دو محور تقارن باید بر هم عمود باشند.

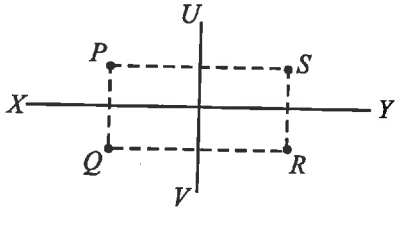
P را نقطه‌ای از شکل F در صفحه که دو محور تقارن XY و UV دارد بگیرید. حال فرض کنید XY و UV بر هم عمود نباشند. XY و UV یا متقاطعند یا موازی. ما حالتی را بررسی می‌کنیم که XY و UV متقاطع باشند، البته حالت توازی هم مشابهاً قابل بررسی است که آن را به عهده شما می‌گذاریم. پس فرض کنید XY

و UV متقاطع باشند (شکل ۲).



شکل ۲

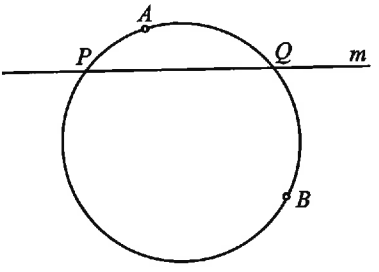
Q را تصویر P نسبت به XY، R را تصویر Q نسبت به UV و S را تصویر R نسبت به XY بگیرید. در این‌صورت P، Q، R و S به وضوح نقاطی از شکل F هستند. حالا تصویر نسبت به XY، QR را به PS می‌برد و هم‌زمان عمودمنصف QR، یعنی UV را، به عمودمنصف PS، که ما آن را $U'V'$ می‌نامیم، خواهد برد. یعنی تصویر نسبت به $U'V'$ نقطه‌ی P را به نقطه‌ی S که متعلق به همین شکل است می‌برد. در نتیجه خط $U'V'$، که تصویر UV نسبت به XY است، خود محور تقارنی دیگر برای شکل F خواهند بود (شکل ۲). بنابراین برای این‌که تعداد محور تقارن‌های F به دو محدود باشد باید دو محور تقارن آن یعنی XY و UV بر هم عمود باشند تا خط $U'V'$ بر UV منطبق شود و محور تقارن سومی برای شکل F حاصل نشود (شکل ۳).



شکل ۳

۳) A و B دو نقطه در دو سمت مختلف خط m هستند. دایره‌ای از A و B چنان بگذرانید که طول وتر حاصل از برخورد خط m با این دایره حداقل مقدار ممکن باشد

(شکل ۴)

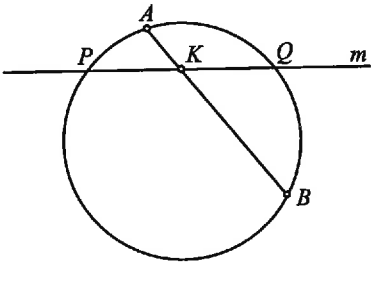


شکل ۴

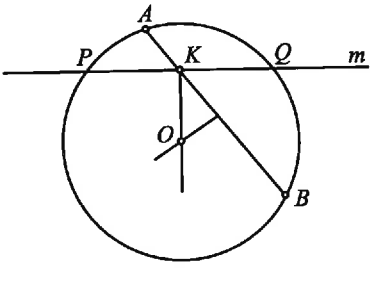
محل برخورد AB با خط m را K بنامید و فرض کنید که دایره‌ی گذرا از A و B خط m را در P و Q قطع کند. (شکل ۵). طبق رابطه‌ی مربوط به قوت

$$PK \cdot KQ = AK \cdot KB$$

بنابراین دایره‌ی گذرا از A و B هر چه که باشد، مقدار حاصل‌ضرب $PK \cdot KQ$ برای آن ثابت است. بنابراین طول وتر PQ، یعنی $PK + KQ$ زمانی حداقل خواهد شد که PK و KQ با هم برابر باشند. با توجه به این نکته برای بدست آوردن مرکز دایره‌ی خواسته شده کافیست در نقطه‌ی K عمودی بر خط m رسم کرده و محل تلاقی آن با عمودمنصف AB را بیابیم.



شکل ۵



شکل ٦